ALGEBRE LINEAIRE
PC*1
2025 - 2026
Chapitre 5 :
Commutation

Fabrice Monfront
Lycée du Parc

1 Vecteurs propres communs

Deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui commutent ont un vecteur propre en commun.

Démonstration
Soient A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB = BA$.
Soient u et v les endomorphismes canoniquement associés.
$u \circ v = v \circ u$
χ_u est un polynôme unitaire de degré $n \geq 1$.
D'après le théorème de d'Alembert-Gauss, il possède au moins une racine λ.
λ est une valeur propre de u.
u et v commutent donc les sous-espaces propres de u sont stables par v.
$E_\lambda(u)$ est stable par v ce qui permet de définir :
$w \begin{cases} E_\lambda(u) \to E_\lambda(u) \\ x \mapsto v(x) \end{cases}$
$E_\lambda(u)$ est un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie non nulle d.
χ_w est un polynôme unitaire de degré $d \geq 1$.
D'après le théorème de d'Alembert-Gauss, il possède au moins une racine μ.
μ est une valeur propre de w.
Soit x_0 un vecteur propre de w associé à μ.
$x_0 \neq 0$
$v(x_0) = w(x_0) = \mu x_0$
$u(x_0) = \lambda x_0$
x_0 est un vecteur propre commun à u et à v.

Matriciellement, A et B ont un vecteur propre commun.

2 Commutant d'un endomorphisme diagonalisable

- **X 2016**
  Soit E un espace vectoriel de dimension n.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable.
Soit $v \in \mathcal{L}(E)$.
Montrer :
u et v commutent $\iff$ les sous-espaces propres de u sont stables par v.

Correction

— $\Longrightarrow$
L'hypothèse u diagonalisable n'est pas utile.
Soit $x \in E_\lambda(u)$: $u(x) = \lambda x$
$u(v(x)) = v(u(x)) = v(\lambda x) = \lambda v(x)$
Donc $v(x) \in \mathrm{Ker}\,(u - \lambda id_E) = E_\lambda(u)$.
$E_\lambda(u)$ est stable par v.

— $\Longleftarrow$
L'hypothèse u diagonalisable est utile.
Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres deux à deux distinctes de u.
Soit $x \in E$.
$\exists(!)(x_1, \ldots, x_p) \in E_{\lambda_1}(u) \times \cdots \times E_{\lambda_p}(u)$ tq $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} x_i$ (on utilise u diagonalisable)
$u \circ v(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} u\left(v(x_i) \in E_{\lambda_i}(u)\right) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i v(x_i)$

$$\begin{aligned} v \circ u(x) &= \sum_{i=1}^{p} v(u(x_i)) \\ &= \sum_{i=1}^{p} v(\lambda_i x_i) \text{ car } x_i \in E_{\lambda_i}(u) \\ &= \sum_{i=1}^{p} \lambda_i v(x_i) = u \circ v(x) \end{aligned}$$

- **Mines 2019**
Soit E un $\mathbb{K}$ ev de dimension finie.
Soit u un endomorphisme diagonalisable de E.
Montrer que la dimension du commutant de E est $\displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \left(\dim\left(E_\lambda(u)\right)\right)^2$.

- **X 2015**
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable.
On note $\mathcal{C}(A) = \{B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \text{ tq } AB = BA\}$.
Etudier la dimension de $\mathcal{C}(A)$ selon les multiplicités des racines du polynôme caractéristique de A.

Remarques de l'examinateur

— Cas $n = 2$, $n = 3$ puis cas général.
— Stabilité par B de $E_\lambda(A)$, B DZ dans la même base que A si toutes les valeurs propres sont simples.

Correction

On poursuit avec les notations de l'exercice précédent.
Le commutant de u ie $\mathcal{C}(u) = \{v \in \mathcal{L}(E) \text{ tq } u \circ v = v \circ u\}$ est un sev de $\mathcal{L}(E)$ [1] "naturel-

1. clair par ailleurs

lement" isomorphe à $\mathrm{X}_{i=1}^{p}\,\mathcal{L}(E_{\lambda_i}(u))$. Donc :
$\dim\left(\mathcal{C}(u)\right)=\sum_{i=1}^{p}\left(\dim\left(E_{\lambda_i}(u)\right)\right)^2=\sum_{i=1}^{p}\left(\mathrm{mul}(\lambda_i)\right)^2$
Examinons maintenant une méthode matricielle.
Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable.
$\exists P\in GL_n(\mathbb{C})$ tq $A=P\begin{pmatrix}\lambda_1 I_{d_1} & 0 & 0\\ 0 & \ddots & 0\\ 0 & 0 & \lambda_p I_{d_p}\end{pmatrix}P^{-1}$ où les λ_i sont deux à deux distincts.
$\forall i\in[\![1;p]\!]\ d_i=\dim E_{\lambda_i}(A)=\mathrm{mul}(\lambda_i)$
Soit $B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

$$\begin{aligned}
AB=BA &\iff u_A\circ u_B=u_B\circ u_A\\
&\iff \text{les sous-espaces propres de } u_A \text{ sont stables par } u_B \text{ (car } u_A \text{ est diagonalisable)}\\
&\iff Mat_{\mathcal{B}}(u_B)=\begin{pmatrix}B_1 & 0 & 0\\ 0 & \ddots & 0\\ 0 & 0 & B_p\end{pmatrix} \text{ avec } \forall i\in[\![1;p]\!]\ B_i\in\mathcal{M}_{d_i}(\mathbb{C})\\
&\qquad \text{où } \mathcal{B} \text{ est la base de } \mathbb{K}^n \text{ formée par les colonnes de } P\\
&\iff B=P\begin{pmatrix}B_1 & 0 & 0\\ 0 & \ddots & 0\\ 0 & 0 & B_p\end{pmatrix}P^{-1} \text{ avec } \forall i\in[\![1;p]\!]\ B_i\in\mathcal{M}_{d_i}(\mathbb{C})
\end{aligned}$$

$\mathcal{C}(A)$ est donc un sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de dimension $\sum_{i=1}^{p} d_i^2=\sum_{\lambda\in Sp(A)}\mathrm{mul}(\lambda)^2$.

- **X 2013**
  1. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ayant n valeurs propres deux à deux distinctes. Quelle est la dimension du sous-espace vectoriel $\mathcal{C}(A)$ des matrices qui commutent avec A ?
  2. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, diagonalisable, ayant exactement $n-1$ valeurs propres deux à deux distinctes. Quel est le rang de l'endomorphisme Φ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ défini par $\Phi(M)=A\,M-M\,A$?

  Correction
  1. En appliquant les résultats des exercices précédents, la réponse est $\sum_{i=1}^{n}1^2=n$
  2. A a $n-2$ valeurs propres simples et une double.
     Le noyau de Φ, qui est aussi le commutant de A est de dimension $n-2+4=n+2$.
     Le rang de Φ est donc n^2-n-2.

2.1 Commutant d'un endomorphisme dont le polynôme caractéristique est scindé à racines simples

Exercice 1 *(X 2021)*

Soit $n\in\mathbb{N}^*$.
Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n et $u\in\mathcal{L}(E)$ ayant n valeurs propres distinctes.

1. Déterminer l'ensemble $\mathcal{C}(u)$ des $v\in\mathcal{L}(E)$ tels que $u\circ v=v\circ u$.

2. Soit $v \in \mathcal{C}(u)$.
   Montrer qu'il existe $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ tel que $v = a_0 id_E + a_1 u + \dots + a_{n-1}u^{n-1}$.

Mines 2016, 2017
Soit E un espace vectoriel de dimension n.
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
On appelle commutant de u l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec u :
$\mathcal{C}(u) = \{v \in \mathcal{L}(E) \text{ tq } u \circ v = v \circ u\}$.
On suppose que u a n valeurs propres distinctes.
Montrer que $\mathcal{C}(u) = \text{Vect}(Id_E, u, \dots, u^{n-1})$.

Correction
Soit E un espace vectoriel de dimension n.
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ ayant n valeurs propres distinctes.
On sait qu'alors u est diagonalisable.
Soit $\mathcal{B}$ une base de E formée de vecteurs propres de u.
Soit $v \in \mathcal{L}(E)$.
On va montrer :
$u \circ v = v \circ u \iff \text{Mat}_{\mathcal{B}}(v)$ est diagonale.
Je vais le faire indépendamment de ce qui précède.

- $\Longrightarrow$
  On note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$.
  Pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, soit λ_i la valeur propre associée à e_i.
  $e_i \in E_{\lambda_i}(u)$, de dimension 1 donc :
  $\forall i \in [\![1; n]\!]\ E_{\lambda_i}(u) = \mathbb{K}e_i$
  $u \circ v = v \circ u$ donc les sous-espaces propres de u sont stables par v.
  Soit $i \in [\![1; n]\!]$.
  $e_i \in E_{\lambda_i}(u)$ et $E_{\lambda_i}(u)$ est stable par u donc : $v(e_i) \in E_{\lambda_i}(u)$
  $v(e_i) \in E_{\lambda_i}(u)$ et $E_{\lambda_i}(u) = \mathbb{K}e_i$ donc $v(e_i) \in \mathbb{K}e_i$ ie : $\exists \mu_i \in \mathbb{K}$ tq $v(e_i) = \mu_i e_i$
  D'où $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(v) = \text{Diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$
- $\Longleftarrow$
  Trivial : deux matrices diagonales commutent.

On a :
$\forall k \in \mathbb{N}\ u^k \circ u = u \circ u^k$
Donc :
$\forall k \in [\![0; n-1]\!]\ u^k \in \mathcal{C}(u)$
Or $\mathcal{C}(u)$ est stable par combinaisons linéaires donc $\text{Vect}(Id_E, u, \dots, u^{n-1}) \subset \mathcal{C}(u)$.
Réciproquement, soit $v \in \mathcal{C}(u)$.
Si on reprend la base $\mathcal{B}$ ci-dessus, $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$,
$\text{Mat}_{\mathcal{B}}\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k\right) = \text{Diag}\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k \lambda_1^k, \dots, \sum_{k=0}^{n-1} a_k \lambda_n^k\right)$ et $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(v) = \text{Diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$.
On en déduit :
$\sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k = v \iff \forall i \in [\![1; n]\!]\ \sum_{k=0}^{n-1} a_k \lambda_i^k = \mu_i$

Le système linéaire $\begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k\lambda_1^k = \mu_1 \\ \vdots \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k\lambda_n^k = \mu_n \end{cases}$ d'inconnues $a_0, \ldots, a_{n-1}$ a pour déterminant :

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \ldots & \lambda_n^{n-1} \\ \vdots & & & \\ 1 & \lambda_n & \ldots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i<j}(\lambda_j - \lambda_i) \neq 0 \text{ car les } \lambda_i \text{ sont deux à deux distincts.}$$

D'où l'existence, et l'unicité, de coefficients $a_0, \ldots, a_{n-1}$ tq $v = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k$ et $v \in \mathrm{Vect}(Id_E, u, \ldots, u^{n-1})$.

On peut également invoquer l'interpolation de Lagrange.

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k = v \iff \forall i \in [\![1;n]\!]\ P(\lambda_i) = \mu_i$ où $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$

Les λ_i étant n nombres deux à deux distincts, il existe un unique polynôme P de degré inférieur ou égal à $n-1$ tel que $P(\lambda_i) = \mu_i$ pour tout $i \in [\![1;n]\!]$.

Centrale 2022

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable.

On note $\mathcal{C}(f) = \{g \in \mathcal{L}(E) \text{ tq } f \circ g = g \circ f\}$ le commutant de f.

1. Montrer :
   $g \in \mathcal{C}(f) \iff \forall \lambda \in \mathrm{Sp}(f)\ E_\lambda(f)$ est stable par g
2. Montrer : $\dim(\mathcal{C}(f)) = \displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} \mathrm{mult}(\lambda)^2$
3. On suppose que toutes les valeurs propres de f sont simples.
   Montrer que $(id_E, f, \ldots, f^{n-1})$ est une base de $\mathcal{C}(f)$.

3 Exemple de recherche des racines carrées d'une matrice carrée

Trouver toutes les matrices B telles que $B^2 = A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (Centrale 2012).

Correction

On commence par calculer le polynôme caractéristique de A :

$$\begin{aligned} \forall \lambda \in \mathbb{R}\ \chi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & -1 \\ -1 & \lambda-4 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda-4)\begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 \\ -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} \quad \text{développement par rapport à la deuxième colonne} \\ &= (\lambda-4)\left((\lambda-1)^2 - 1\right) = (\lambda-4)(\lambda-1-1)(\lambda-1+1) \end{aligned}$$

$\chi_A = (X-4)(X-2)X$

χ_A est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$ donc A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

La deuxième colonne de A est $A\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix}=4\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ donc $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ est un vecteur propre pour la valeur propre 4.
4 est valeur propre simple donc $E_4(A)$ est de dimension 1.
On a donc sans résolution de système $E_4(A)=\mathbb{R}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in E_0(A) \iff \begin{cases}x+z=0\\x+4y=0\\x+z=0\end{cases} \iff \begin{cases}x=-4y\\z=4y\end{cases}$$

Donc $E_0(A)=\mathbb{R}\begin{pmatrix}-4\\1\\4\end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in E_2(A) \iff \begin{cases}-x+z=0\\x+2y=0\\x-z=0\end{cases} \iff \begin{cases}x=-2y\\z=-2y\end{cases}$$

Donc $E_2(A)=\mathbb{R}\begin{pmatrix}-2\\1\\-2\end{pmatrix}$.

D'où $A=PDP^{-1}$ avec $P=\begin{pmatrix}-4&-2&0\\1&1&1\\4&-2&0\end{pmatrix}$ et $D=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&2&0\\0&0&4\end{pmatrix}$
sans calcul de P^{-1}.

Soit $B\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
Si $B^2=A$ alors :
$AB=B^2.B=B^3=B.B^2=BA$
B commute avec A donc les sous-espaces propres de A sont stables par B.
$\begin{pmatrix}-4\\1\\4\end{pmatrix}\in E_0(A)$ et $E_0(A)$ est stable par B donc $B\begin{pmatrix}-4\\1\\4\end{pmatrix}\in E_0(A)$.
$B\begin{pmatrix}-4\\1\\4\end{pmatrix}\in E_0(A)$ et $E_0(A)=\mathbb{R}\begin{pmatrix}-4\\1\\4\end{pmatrix}$ donc $B\begin{pmatrix}-4\\1\\4\end{pmatrix}\in\mathbb{R}\begin{pmatrix}-4\\1\\4\end{pmatrix}$.
Donc il existe $x\in\mathbb{R}$ tel que $B\begin{pmatrix}-4\\1\\4\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}-4\\1\\4\end{pmatrix}$.
$\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}\in E_2(A)$ et $E_2(A)$ est stable par B donc $B\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}\in E_2(A)$.
$B\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}\in E_2(A)$ et $E_2(A)=\mathbb{R}\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}$ donc $B\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}$.

Donc il existe $y \in \mathbb{R}$ tel que $B \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in E_4(A)$ et $E_4(A)$ est stable par B donc $B \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in E_4(A)$.

$B \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in E_4(A)$ et $E_4(A) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $B \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Donc il existe $z \in \mathbb{R}$ tel que $B \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On a donc $B = P \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix} P^{-1}$.

On peut donc chercher les racines carrées de A sous cette forme.
On a alors :

$$\begin{aligned} B^2 = A &\iff P \begin{pmatrix} x^2 & 0 & 0 \\ 0 & y^2 & 0 \\ 0 & 0 & z^2 \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\iff \begin{pmatrix} x^2 & 0 & 0 \\ 0 & y^2 & 0 \\ 0 & 0 & z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} x^2 = 0 \\ y^2 = 2 \\ z^2 = 4 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = 0 \\ y = \pm\sqrt{2} \\ z = \pm 2 \end{cases} \end{aligned}$$

A a 4 racines carrées :
$P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1}$, $P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} P^{-1}$, $P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1}$ et $P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} P^{-1}$

Pour les expliciter, il faut calculer P^{-1}.
Leur somme est la matrice nulle.
Leur produit est :
$P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} P^{-1} = A^2$

4 Exercices d'application directe du cours

Exercice 2 *(X 2013)*

Quel est le nombre de solutions de $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$? dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$?

Exercice 3 *(Mines 2016)*

Soit E un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $f^3 = id_E$.
Montrer que $E = \sum_{k=0}^{2} \operatorname{Ker}(f - j^k id_E)$ et donner la dimension du commutant de f.

Exercice 4 *(Mines 2018)*

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
Déterminer les éléments propres de f.
Déterminer les $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tels que $g^3 = f$.

Exercice 5 *(Mines 2019)*

Soient A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $\mathrm{Card}(\mathrm{Sp}(A)) = \mathrm{Card}(\mathrm{Sp}(B)) = n$.
Montrer :
$AB = BA \iff A$ et B ont les mêmes vecteurs propres.

Exercice 6 *(Mines 2019)*

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
   Montrer que si M est nilpotente alors les valeurs propres de M sont nulles.
   Quelle est la trace de M ?
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.
   (a) Existe-t-il un réel λ tel que $A - \lambda I_3$ soit nilpotente ?
   (b) Trouver les sous-espaces propres de A.
   (c) Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

5 Pour aller plus loin

Les exercices qui suivent sont plus difficiles mais reprennent l'idée de la démonstration de la trigonalisabilité des matrices dont le polynôme caractéristique est scindé.

Exercice 7 *(X 2019)*

1. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ tel que :
   $\forall x \in \mathbb{C}^n$ $(x, u(x))$ est liée.
   Que dire de u ?
2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{tr}\,(M) = 0$.
   Montrer qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que tous les coefficients diagonaux de $P^{-1}MP$ soient nuls.

3. Soit $k \in [\![1; n-1]\!]$.
   Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ qui stabilise tous les sous-espaces de dimension k de $\mathbb{C}^n$.
   Que dire de u ?

Exercice 8 *(Centrale 2018)*

Soit $A = \mathrm{Diag}(1, 2, \ldots, n)$.
Soit $g \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M \mapsto AM - MA \end{cases}$.

1. Montrer que $\mathrm{Im}\,(g)$ est l'ensemble des matrices de diagonales nulles.
2. Montrer que toute matrice de trace nulle est semblable à une matrice de diagonale nulle.
3. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de trace nulle.
   Montrer qu'il existe B et $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $M = BC - CB$.

Exercice 9 *(X 2018)*

1. Soit $(u_i)_{i \in [\![1;p]\!]}$ une famille d'endomorphismes diagonalisables qui commutent deux à deux.
   Montrer que les u_i sont simultanément diagonalisables.
2. Que dire si les u_i sont seulement supposés trigonalisables ?