ALGEBRE LINEAIRE
TD
2025-2026
Chapitre 4

941

1 Trigonalisation

Exercice 1 *(CCP 2022)*

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ telle que $f^2 = 0$ et f non nulle. Pour les trois premières questions, on suppose que f existe.

1. Montrer que $\mathrm{Im}\,(f) \subset \ker(f)$, rappeler le théorème du rang et montrer que le rang de f ne peut valoir que 1 ou 2.
2. On suppose que f est de rang 1.
   (a) Montrer qu'il existe $b, c, d \in \mathbb{R}^4$ tels que $(f(d))$ est une base de $\mathrm{Im}\,(f)$ et $(f(d), b, c)$ une base de $\ker(f)$.
   (b) Montrer que $(f(d), b, c, d)$ est une base de $\mathbb{R}^4$ et donner la matrice de f dans cette base.
3. On suppose que f est de rang 2.
   (a) Montrer que $\mathrm{Im}\,(f) = \ker(f)$.
   (b) Montrer qu'il existe $u, v \in \mathbb{R}^4$ tels que $(f(u), f(v))$ est une base de $\mathrm{Im}\,(f)$.
   (c) En déduire une base de $\mathbb{R}^4$ dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
4. Caractériser matriciellement les endomorphismes de $\mathbb{R}^4$ tels que $f^2 = 0$ et $f \neq 0$.
   Sont-ils diagonalisables ?
5. Soit $f \in \mathbb{R}^4$ tel que $f^2 = 0$ et $f \neq 0$.
   Montrer que l'ensemble des endomorphismes de $\mathbb{R}^4$ qui commutent avec f est un sev de $\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^4\right)$.
   Quelle est sa dimension ?

Exercice 2 *(X 2015)*

Soit $u : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ linéaire.
Soit $\epsilon > 0$.
Montrer qu'il existe une base dans laquelle la matrice A de u est triangulaire supérieure et vérifie :
$i \neq j \Longrightarrow |a_{i,j}| < \epsilon$

Exercice 3

Soient A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $A^n = B^n = 0$.
On suppose $A^{n-1} \neq 0$ ainsi que $B^{n-1} \neq 0$.
Montrer que A et B sont semblables.

Exercice 4

1. Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
   Montrer :
   N nilpotente $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Sp}(N) = \{0\}$
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
   (a) On suppose que la matrice nulle est point adhérent à la classe de similitude de A.
   Montrer que A est nilpotente.
   (b) Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et P la matrice diagonale dont les coefficients sont $1, \epsilon, \epsilon^2, \dots, \epsilon^{n-1}$ avec $\epsilon > 0$.
   Calculer les coefficients de $P^{-1}MP$.
   (c) On suppose que A est nilpotente.
   Montrer que la matrice nulle est point adhérent à la classe de similitude de A.

Exercice 5 *(X 2021)*

Trouver toutes les matrices $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telles que A et A^2 sont semblables.

2 Suites récurrentes

Exercice 6 *(X)*

On note A_n le nombre de façons de recouvrir un damier de dimension $2 \times n$ avec des pièces de dimension 2×1. Calculer A_n, et montrer que, si n est assez grand, A_n est la partie entière de $\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} + \dfrac{1}{2}$.

Exercice 7 *(Mines 2006)*

Calculer : $\begin{vmatrix} a+b & 1 & & & 0 \\ a\,b & a+b & 1 & & \\ & a\,b & a+b & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & & & a\,b & a+b \end{vmatrix}$