ALGEBRE LINEAIRE
TD
2025-2026
Chapitre 4

941

1 Trigonalisation

Exercice 1 *(CCP 2022)*

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ telle que $f^2 = 0$ et f non nulle. Pour les trois premières questions, on suppose que f existe.

1. Montrer que $\mathrm{Im}\,(f) \subset \ker(f)$, rappeler le théorème du rang et montrer que le rang de f ne peut valoir que 1 ou 2.
2. On suppose que f est de rang 1.
   (a) Montrer qu'il existe $b, c, d \in \mathbb{R}^4$ tels que $(f(d))$ est une base de $\mathrm{Im}\,(f)$ et $(f(d), b, c)$ une base de $\ker(f)$.
   (b) Montrer que $(f(d), b, c, d)$ est une base de $\mathbb{R}^4$ et donner la matrice de f dans cette base.
3. On suppose que f est de rang 2.
   (a) Montrer que $\mathrm{Im}\,(f) = \ker(f)$.
   (b) Montrer qu'il existe $u, v \in \mathbb{R}^4$ tels que $(f(u), f(v))$ est une base de $\mathrm{Im}\,(f)$.
   (c) En déduire une base de $\mathbb{R}^4$ dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
4. Caractériser matriciellement les endomorphismes de $\mathbb{R}^4$ tels que $f^2 = 0$ et $f \neq 0$.
   Sont-ils diagonalisables ?
5. Soit $f \in \mathbb{R}^4$ tel que $f^2 = 0$ et $f \neq 0$.
   Montrer que l'ensemble des endomorphismes de $\mathbb{R}^4$ qui commutent avec f est un sev de $\mathcal{L}\,(\mathbb{R}^4)$.
   Quelle est sa dimension ?

Correction

1. Soit $y \in \mathrm{Im}\,(f)$.
   $\exists x \in \mathbb{R}^4$ tq $y = f(x)$.
   $f(y) = f^2(x) = 0$ car $f^2 = 0$.
   Donc $\mathrm{Im}\,(f) \subset \ker(f)$.

$\dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(\ker(f)) = \dim(\mathbb{R}^4) = 4$

$\mathrm{Im}(f) \subset \ker(f)$ donc $\dim(\mathrm{Im}(f)) \leq \dim(\ker(f))$.
On en déduit :
$2\dim(\mathrm{Im}(f)) \leq \dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(\ker(f)) = 4$
D'où $\dim(\mathrm{Im}(f)) \leq 2$.
$\dim(\mathrm{Im}(f)) > 0$ car f est non nulle.
Donc $\dim(\mathrm{Im}(f)) \in \{1; 2\}$.

2. (a) $\mathrm{Im}(f)$ est de dimension 1 donc il existe $a \in \mathbb{R}^4$ tel que (a) soit une base de $\mathrm{Im}(f)$.
$a \in \mathrm{Im}(f)$ donc il existe $d \in \mathbb{R}^4$ tel que $f(d) = a$.
$(f(d))$ est donc une base de $\mathrm{Im}(f)$.
$\mathrm{Im}(f) \subset \ker(f)$ donc $a \in \ker(f)$.
$a \neq 0$ donc (a) est une famille libre de $\ker(f)$ qui est de dimension 3. D'après le théorème de la base incomplète, il existe b et $d \in \mathbb{R}^4$ tels que (a, b, d) est une base de $\ker(f)$.
$(f(d), b, c)$ est une base de $\ker(f)$.

   (b) Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$ tel que $\lambda_1 f(d) + \lambda_2 b + \lambda_3 c + \lambda_4 d = 0$.
On applique f : $\lambda_4 f(d) = \lambda_4 a = 0$ avec $a \neq 0$.
On en déduit $\lambda_4 = 0$.
Il reste $\lambda_1 f(d) + \lambda_2 b + \lambda_3 c = \lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c = 0$ avec (a, b, c) libre.
On en déduit $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.
La famille $(f(d), b, c, d)$ est donc une famille libre de 4 vecteurs de $\mathbb{R}^4$ qui est de dimension 4. On en déduit que c'est une base de $\mathbb{R}^4$.

La matrice de f dans cette base est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3. (a) D'après la formule du rang $\ker(f)$ est de dimension 2 comme $\mathrm{Im}(f)$.
Comme $\mathrm{Im}(f)$ est inclus dans $\ker(f)$, on en déduit $\mathrm{Im}(f) = \ker(f)$.

   (b) $\mathrm{Im}(f)$ est de dimension 2 donc il existe a et $b \in \mathbb{R}^4$ tels que (a, b) est une base de $\mathrm{Im}(f)$.
$a \in \mathrm{Im}(f)$ donc il existe $u \in \mathbb{R}^4$ tel que $f(u) = a$.
$b \in \mathrm{Im}(f)$ donc il existe $v \in \mathbb{R}^4$ tel que $f(v) = b$.
$(f(u), f(v))$ est donc une base de $\mathrm{Im}(f)$.

   (c) Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$ tel que $\lambda_1 f(u) + \lambda_2 f(v) + \lambda_3 u + \lambda_4 v = 0$.
On applique f : $\lambda_3 f(u) + \lambda_4 f(v) = \lambda_3 a + \lambda_4 b = 0$ avec (a, b) libre donc $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$.
Il reste $\lambda_1 f(u) + \lambda_2 f(v) = \lambda_1 a + \lambda_2 b = 0$ avec (a, b) libre donc $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.
La famille $(f(u), f(v), u, v)$ est donc une famille libre de 4 vecteurs de $\mathbb{R}^4$ qui est de dimension 4. On en déduit que c'est une base de $\mathbb{R}^4$.
La matrice de f dans cette base est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4. On vient de montrer que si f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ tel que $f^2 = 0$ et $f \neq 0$

alors il existe une base de $\mathbb{R}^4$ dans laquelle la matrice de f est $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ou

$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Réciproquement, un calcul élémentaire donne $A_1^2 = A_2^2 = 0$ donc tout endomorphisme f de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans une certaine base de $\mathbb{R}^4$ est A_1 ou A_2 vérifie $f^2 = 0$ et $f \neq 0$.

A_1 et A_2 étant triangulaires, on lit leurs valeurs propres sur leurs diagonales. Il s'agit de 0 de multiplicité 4 dans les deux cas. Mais A_1 est de rang 1 donc $E_0(A_1)$ est de dimension $3 < 4$ et A_1 n'est pas diagonalisable.
De même, A_2 est de rang 2 donc $E_0(A_2)$ est de dimension $2 < 4$ et A_2 n'est pas diagonalisable.
Les endomorphismes de $\mathbb{R}^4$ tels que $f \neq 0$ et $f^2 = 0$ sont diagonalisables.

5. Soit $C = \{g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4) \text{ tq } f \circ g = g \circ f\}$.
   - $C \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$
   - $0 \in C$
   - C est stable par combinaisons linéaires :
     Soient $(g_1, g_2) \in C^2$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{array}{rcl} f \circ (\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2) & = & \lambda_1 f \circ g_1 + \lambda_2 f \circ g_2 = \lambda_1 g_1 \circ f + \lambda_2 g_2 \circ f \\ & = & (\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2) \circ f \end{array}$$

C est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$.

Il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^4$ dans laquelle la matrice de f est A_i avec $i = 1, 2$.

Soit g un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ et $M = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{pmatrix}$ sa matrice dans la base $\mathcal{B}$.

$g \in C \iff MA_i = A_i M$.

$MA_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & e \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & m \end{pmatrix}$ et $A_1 M = \begin{pmatrix} m & n & o & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$g \in C \iff M$ est de la forme $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 0 & f & g & h \\ 0 & j & k & l \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$

C est de dimension 10.

$MA_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & e & f \\ 0 & 0 & i & j \\ 0 & 0 & m & n \end{pmatrix}$ et $A_2 M = \begin{pmatrix} i & l & k & l \\ m & n & o & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$g \in C \iff M \text{ est de la forme } \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & e & f \end{pmatrix}$$

C est de dimension 8

Exercice 2 *(X 2015)*

Soit $u : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ linéaire.
Soit $\epsilon > 0$.
Montrer qu'il existe une base dans laquelle la matrice A de u est triangulaire supérieure et vérifie :
$i \neq j \Longrightarrow |a_{i,j}| < \epsilon$

Correction
Tout endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie est trigonalisable donc il existe $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de $\mathbb{C}^n$ dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure. On note M la matrice de u dans cette base $\mathcal{B}$.
Soit $a_1, \dots, a_n$ des scalaires non nuls.
La famille $\mathcal{C} = (a_1 e_1, \dots, a_n e_n)$ est également une base de $\mathbb{C}^n$.
On note A la matrice de u dans cette base $\mathcal{C}$.
La matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{C}$ est $P = \mathrm{Diag}(a_1, \dots, a_n)$ et on a $A = P^{-1}MP$.
$a_{i,j} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \left(P^{-1}\right)_{i,k} m_{k,l} p_{l,j}$
$p_{l,j}$ est nul si l est différent de j et $\left(P^{-1}\right)_{i,k}$ est nul si k est différent de i. Il reste :
$a_{i,j} = \left(P^{-1}\right)_{i,i} m_{i,j} p_{j,j} = \dfrac{a_j}{a_i} m_{i,j}$
En dessous de la diagonale, ie si $i > j$, $m_{i,j} = 0$ donc $|a_{i,j}| = 0 \leq \epsilon$ pour tout choix des nombres $a_1, \dots, a_n$.
Au dessus de la diagonale, on a :
$|a_{i,j}| \leq \left(\displaystyle\max_{1 \leq i < j \leq n} \frac{|a_j|}{|a_i|}\right) \times (|m_{i,j}|)$
Pour simplifier cette condition, on prend $a_i = \delta^i$ avec $\delta > 0$.
Si $\delta < 1$ alors pour tout $i < j$, on a :
$\dfrac{|a_j|}{|a_i|} = \delta^{j-i} \leq \delta$
Si on prend $\delta > 0$ suffisamment petit, on obtient une matrice conforme aux réquisitions de l'énoncé.

Exercice 3

Soient A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $A^n = B^n = 0$.
On suppose $A^{n-1} \neq 0$ ainsi que $B^{n-1} \neq 0$.
Montrer que A et B sont semblables.

Correction
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.
Soit u un endomorphisme de E tel que $u^{n-1} \neq 0$ et $u^n = 0$.
$u^{n-1} \neq 0$ donc il existe $x \in E$ tel que $u^{n-1}(x) \neq 0$.
Supposons que la famille $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est liée :

$\exists(\lambda_0,\dots,\lambda_{n-1}) \in \mathbb{K}^n \setminus \{(0,\dots,0\}$ tq $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k u^k(x) = 0$
Soit $r = \min\left(\{k \in [\![0;n-1]\!] \text{ tq } \lambda_k \neq 0\}\right)$.
On a donc :
$\displaystyle\sum_{k=r}^{n-1} \lambda_k u^k(x) = 0$
On applique u^{n-1-r} (qui est bien défini : $n-1-r \geq 0$) à cette égalité :
$\displaystyle\sum_{k=r}^{n-1} \lambda_k u^{n-1-r+k}(x) = 0$
Mais si $k > r$ alors $n-1-r+k \geq n$ donc il reste :
$\lambda_r u^{n-1}(x) = 0$ avec $\lambda_r \neq 0$ et $u^{n-1}(x) \neq 0$.
C'est absurde donc la famille $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est libre. Vu le nombre de vecteurs c'est une base de E.

Dans cette base, la matrice de u est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

La famille $(u^{n-1}(x), \dots, x)$ est également une base de E. La matrice de u dans cette base est $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & & 0 \end{pmatrix}$.

En appliquant ce qui précède aux endomorphismes canoniquement associés, on montre que A et B sont semblables à $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & & 0 \end{pmatrix}$. Elles sont donc semblables.

Exercice 4

1. Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
   Montrer :
   N nilpotente $\iff$ $\mathrm{Sp}(N) = \{0\}$
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
   (a) On suppose que la matrice nulle est point adhérent à la classe de similitude de A.
   Montrer que A est nilpotente.
   (b) Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et P la matrice diagonale dont les coefficients sont $1, \epsilon, \epsilon^2, \dots, \epsilon^{n-1}$ avec $\epsilon > 0$.
   Calculer les coefficients de $P^{-1}MP$.
   (c) On suppose que A est nilpotente.
   Montrer que la matrice nulle est point adhérent à la classe de similitude de A.

Correction

1. • $\Longrightarrow$
   $\exists p \in \mathbb{N}^*$ tq $N^p = 0$

Le spectre de N est donc contenu dans l'ensemble des racines de X^p : $\mathrm{Sp}(N) \subset \{0\}$.
Mais le spectre de N est non vide (cf d'Alembert-Gauss appliqué à χ_N) donc $\mathrm{Sp}(N) = \{0\}$.

- $\Longleftarrow$
  χ_N est un polynôme unitaire de degré n. D'après d'Alembert-Gauss, il est entièrement factorisable en produit de polynômes de degré 1, de la forme $X - 0 = X$ d'après l'hypothèse $\mathrm{Sp}(N) = \{0\}$.
  On en déduit $\chi_N = X^n$.
  D'après le théorème de Cayley-Hamilton, $N^n = 0$.

2. (a) Il existe une suite de matrices $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ telle que :
   - $A_p \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$
   - $\forall p \in \mathbb{N}$ A_p est semblable à A.

   Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$.
   $\forall p \in \mathbb{N}$ $\det(\lambda I_n - A_p) = 0$ car $\lambda \in \mathrm{Sp}(A_p) = \mathrm{Sp}(A)$.
   On fait tendre p vers $+\infty$: $\det(\lambda I_n) = \lambda^n = 0$
   Donc $\lambda = 0$ et $\mathrm{Sp}(A) \subset \{0\}$.
   Comme $\mathrm{Sp}(A) \neq \emptyset$ (on est dans $\mathbb{C}$), $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$

   (b) Le coefficient d'indice i, j est $\epsilon^{j-i} A_{i,j}$.

   (c) A étant trigonalisable et son spectre étant réduit à 0, il y a dans la classe de similitude de A une matrice triangulaire supérieure T dont tous les coefficients diagonaux sont nuls.
   On note P_p la matrice diagonale dont les coefficients sont $1, p, \ldots, p^{n-1}$ et $T_p = P_p T P_p^{-1}$ qui est aussi dans la classe de similitude de A.
   $T_p \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$:
   - Si $i \geq j$, $(T_p)_{i,j} = 0 \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$
   - Si $i < j$, $(T_p)_{i,j} = p^{i-j} T_{i,j} \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$ car $i - j < 0$.

   La matrice nulle est bien point adhérent à la classe de similitude de A.

Exercice 5 *(X 2021)*

Trouver toutes les matrices $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telles que A et A^2 sont semblables.

Correction
Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ semblable à A^2.

- **Premier cas :** $\chi_A = X^2 - \mathrm{tr}(A)X + \det A$ a deux racines simples λ_1 et λ_2.
  (Cela revient à dire que $\Delta = \mathrm{tr}(A)^2 - 4\det A \neq 0$)
  A est diagonalisable.
  $\exists P \in GL_2(\mathbb{C})$ tq $A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} P^{-1}$
  $A^2 = P \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 \end{pmatrix} P^{-1}$
  — **Premier cas :** $\lambda_1^2 = \lambda_1$ et $\lambda_2^2 = \lambda_2$
  Dans ce cas $\lambda_i = 0$ ou 1. mais les λ_i sont distincts.
  A est donc semblable à la matrice diagonale $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc A est la matrice dans la base canonique d'un projecteur de rang 1 et $A^2 = A$ ainsi que $\chi_A = X^2 - X$.

— **Deuxième cas :** $\lambda_1^2 = \lambda_2$ et $\lambda_2^2 = \lambda_1$
$\lambda_1^4 = \lambda_1$
$\lambda_2 = \lambda_1^2 \neq \lambda_1$ donc $\lambda_1 \neq 0, 1$ et $\lambda_1 = j$ ou j^2.
A est donc semblable à la matrice diagonale $\begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & j^2 \end{pmatrix}$ et $\chi_A = X^2 + X + 1$.

- **Deuxième cas :** $\chi_A = X^2 - \mathrm{tr}\,(A)X + \det A$ a une racine double λ
(Cela revient à dire que $\Delta = \mathrm{tr}\,(A)^2 - 4\det A = 0$)
A est diagonalisable $\iff A = \lambda I_2$.
Dans ce cas $A^2 = \lambda^2 I_2$.
A^2 et A sont semblables donc $\lambda^2 = \lambda$ et $\lambda = 0$ ou 1.
A est donc égale à 0 (projecteur de rang 0) ou I_2 (projecteur de rang 2).
On suppose désormais que A n'est pas diagonalisable
$1 \leq \dim E_\lambda(A) < 2$ donc $E_\lambda(A) = \mathbb{C}e_1$ avec e_1 vecteur non nul de $\mathbb{C}^2$.
On complète (e_1) en une base $\mathcal{B}_1 = (e_1, e_2)$ de $\mathbb{C}^2$.
Soit P_1 la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{C}^2$ à $\mathcal{B}_1$.
$A = P_1 \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \beta \end{pmatrix} P_1^{-1}$.
$\mathrm{tr}\,(A) = 2\lambda = \lambda + \beta$ donc $\beta = \lambda$.
A n'est pas diagonalisable donc $\alpha \neq 0$.
$A = P_1 \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} P_1^{-1}$ avec $\alpha \neq 0$.

On peut aller plus loin :
$u_A(e_2) = \alpha e_1 + \lambda e_2$
$u_A\left(\frac{1}{\alpha}e_2\right) = \frac{1}{\alpha}u_A(e_2) = e_1 + \lambda\,\frac{1}{\alpha}e_2$
$\frac{1}{\alpha} \neq 0$ donc $\mathcal{B} = \left(e_1, \frac{1}{\alpha}e_2\right)$ est une base de $\mathbb{C}^2$.
Soit P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{C}^2$ à $\mathcal{B}$.
$A = P \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} P^{-1}$
$A^2 = P \begin{pmatrix} \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix} P^{-1}$
A^2 et A sont semblables donc $\lambda^2 = \lambda$ et $\lambda = 0$ ou 1.
$\lambda = 0$ est exclus : $A^2 = 0$ et $A \neq 0$.
Donc $\lambda = 1$ et $\chi_A = X^2 - 2X + 1$.

On a donc prouvé :
A^2 semblable à $A \Longrightarrow (A = 0$ ou $\chi_A \in \{X^2 - X, X^2 + X + 1, X^2 - 2X + 1\})$
Passons à la réciproque :
Si $A = 0$, $A^2 = 0$ est semblable à A.
Si $\chi_A = X^2 - X = X(X-1)$ scindé à racines simples, A est semblable à $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc A est la matrice d'un projecteur. On a donc $A^2 = A$ semblable à A.
Si $\chi_A = X^2 + X + 1 = (X - j)(X - j^2)$ scindé à racines simples, A est semblable à $\begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & j^2 \end{pmatrix}$.
A^2 est alors semblable à $\begin{pmatrix} j^2 & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix}$ qui est semblable à $\begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & j^2 \end{pmatrix}$. Donc A^2 est semblable à A.

Si $\chi_A = X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$ alors $A = I_2$ et dans ce cas $A^2 = A$ est semblable à A ou A est semblable à $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Dans ce cas A^2 est semblable à $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ qui est semblable à $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

2 Suites récurrentes

Exercice 6 *(X)*

On note A_n le nombre de façons de recouvrir un damier de dimension $2 \times n$ avec des pièces de dimension 2×1. Calculer A_n, et montrer que, si n est assez grand, A_n est la partie entière de $\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2}$.

Correction
$A_1 = 1$, $A_2 = 2$ (les deux dominos sont horizontaux ou les deux dominos sont verticaux).
Soit $n \geq 3$.
On recouvre le coin en haut à gauche par un premier domino. Celui-ci est soit horizontal, soit vertical.
On aboutit à $A_n = A_{n-1} + A_{n-2}$
Pour les calculs, il est astucieux de poser $A_0 = 1$ de manière à obtenir :
$\forall n \geq 2 \; A_n = A_{n-1} + A_{n-2}$
La résolution est standard.

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} \; A_n &= \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} \end{aligned}$$

$\frac{1-\sqrt{5}}{2} \in]-1;0[$ donc $\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
Donc :
$\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq n_0 \; \left|\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right| < \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \forall n \geq n_0 \; \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{2} < A_n < \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2} \\ A_n < \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2} < A_n + 1 \end{aligned}$$

Mais $A_n \in \mathbb{N}$ (c'est du dénombrement) donc :
$\forall n \in \mathbb{N} \; A_n = \left\lfloor \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2} \right\rfloor$

Exercice 7 *(Mines 2006)*

Calculer : $\begin{vmatrix} a+b & 1 & & & 0 \\ a\,b & a+b & 1 & & \\ & a\,b & a+b & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & & & a\,b & a+b \end{vmatrix}$

Correction
D_1 n'est pas clair.
$D_2 = a^2 + ab + b^2$
Un calcul standard donne : $D_3 = a^3 + ab^2 + a^2b + b^3$
Si on développe par rapport à la première colonne puis par rapport à la première ligne, on obtient :
$\forall n \geq 4\ D_n = (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2}$
Cette formule est vraie pour $n = 3$, en prenant $D_1 = a + b$, ce qui est assez naturel.
Elle est vraie aussi pour $n = 2$ en posant $D_0 = 1$.
L'équation caractéristique est $r^2 = (a + b)r - ab$.
$X^2 - (a + b)X + ab = (X - a)(X - b)$ d'où deux cas :

- **Premier cas :** $a \neq b$
  $\exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ tq $\forall n \in \mathbb{N}\ D_n = \lambda a^n + \mu b^n$
  Les conditions initiales donnent $\begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ \lambda a + \mu b = a + b \end{cases}$
  On en déduit $\lambda = \dfrac{a}{a-b}$ et $\mu = \dfrac{-b}{a-b}$ et :
  $\forall n \in \mathbb{N}\ D_n = \dfrac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}$
- **Deuxième cas :** $a = b$
  $\exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ tq $\forall n \in \mathbb{N}\ D_n = (\lambda n + \mu)a^n$
  Les conditions initiales donnent $\begin{cases} \mu = 1 \\ (\lambda + \mu)a = 2a \end{cases}$
  On en déduit $\lambda = \mu = 1$ et :
  $\forall n \in \mathbb{N}\ D_n = (n+1)a^n$

Remarque
On peut aussi après calcul des premières valeurs intuiter la formule :
$D_n = \sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}$
et la démontrer par récurrence.
On prendra 2 minutes pour comprendre pourquoi les deux méthodes donnent bien le même résultat quoique sous des formes différentes.