ALGEBRE LINEAIRE
TD
2025-2026
Chapitre 5

941

Exercice 1 *(X 2020)*

Soit $E = \left\{ \varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) \text{ tq } \forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \ \varphi(B^T) = (\varphi(B))^T \right\}$.
Montrer que E est un espace vectoriel et donner sa dimension.

Exercice 2 *(X 2017)*

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 7 & 5 & -1 \\ 8 & 6 & -3 \end{pmatrix}$.
Déterminer $\text{Card}\left(\{B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}) \text{ tq } B^3 = A\}\right)$.

Exercice 3 *(Mines 2012)*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On suppose que A^2 est diagonalisable et que le spectre de A^2 est inclus dans $\mathbb{R}_+^*$.
Montrer que A est diagonalisable.

Exercice 4 *(Mines 2017)*

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3.
Soit $\mathcal{B}$ une base de E.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} 8 & -2 & 2 \\ 21 & -5 & 7 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

1. Montrer que le noyau de $f^2 - 2f + 2id_E$ est stable par f.
2. Trouver les sous-espaces de E stables par f.

Exercice 5 *(Centrale 2019)*

Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension finie.
On fait les hypothèses suivantes :
$f^2 = Id_E$, $g^2 = Id_E$ et $f \circ g = g \circ f$
Montrer que f et g ont une base commune de diagonalisation.