ALGEBRE LINEAIRE
TD
2025-2026
Chapitre 5

941

Exercice 1 *(X 2020)*

Soit $E = \left\{ \varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) \text{ tq } \forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\ \varphi(B^T) = (\varphi(B))^T \right\}$.
Montrer que E est un espace vectoriel et donner sa dimension.

Correction

Soit $\psi \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ B \mapsto B^T \end{cases}$.
E est le commutant de ψ.
ψ étant une symétrie, donc étant diagonalisable, on trouve classiquement que E est un $\mathbb{R}$-ev de dimension :

$$\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + \left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2 = \frac{n^2(n^2+1)}{2}$$

Exercice 2 *(X 2017)*

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 7 & 5 & -1 \\ 8 & 6 & -3 \end{pmatrix}$.
Déterminer $\text{Card}\left(\{B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}) \text{ tq } B^3 = A\}\right)$.

Correction

$A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{bmatrix} -1/2 & 1 & -1 \\ 3/2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.
Soit $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.
B commute avec A donc les sous-espaces propres de A sont stables par B.
Mais les sous-espaces propres de A sont les droites dirigées par les colonnes de P donc chaque colonne de P dirige une droite stable par B et chaque colonne de P est un vecteur propre de B.
La matrice $P^{-1}BP$ est donc une matrice diagonale qu'on note Δ.
$\Delta^3 = (P^{-1}BP)^3 = P^{-1}B^3P = P^{-1}AP = D$
Δ étant diagonale, elle est de la forme $\text{Diag}(z_1, z_2, z_3)$ avec $z_1^3 = -1$, $z_2^3 = 2$ et $z_3^3 = 1$.

La réciproque est triviale.
Tout nombre complexe non nul ayant trois racines cubiques, la réponse à la question posée est : $3^3 = 27$.

Exercice 3 *(Mines 2012)*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On suppose que A^2 est diagonalisable et que le spectre de A^2 est inclus dans $\mathbb{R}_+^*$.
Montrer que A est diagonalisable.

Correction
Plusieurs méthodes sont possibles.
Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres de A^2.
Ce sont des nombres deux à deux distincts et strictement positifs.

- **Première méthode**
  D'après le cours $(A^2 - \lambda_1 I_n)\dots(A^2 - \lambda_p I_n) = 0$
  Mais si $\lambda > 0$, $A^2 - \lambda I_n = (A - \sqrt{\lambda} I_n)(A + \sqrt{\lambda I_n}$ donc le polynôme $\prod_{i=1}^{p}(X - \sqrt{\lambda_i})(X + \sqrt{\lambda_i})$ annule A. Ce polynôme est scindé à racines simples donc A est diagonalisable.
- **Deuxième méthode**
  $\mathbb{R}^n = \bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(A^2)$
  A et A^2 commutent donc les sous-espaces propres de A^2 sont stables par A et on peut définir $u_i \begin{cases} E_{\lambda_i}(A^2) \to E_{\lambda_i}(A^2) \\ x \mapsto Ax \end{cases}$.
  $u_i^2 = \lambda_i Id_{E_{\lambda_i}(A^2)}$
  $\left(\dfrac{u_i}{\sqrt{\lambda_i}}\right)^2 = Id_{E_{\lambda_i}(A^2)}$
  $\dfrac{u_i}{\sqrt{\lambda_i}}$ est une symétrie.
  Il existe une base $\mathcal{B}_i$ de $E_{\lambda_i}(A^2)$ formée de vecteurs propres pour $\dfrac{u_i}{\sqrt{\lambda_i}}$ donc pour u_i donc pour A.
  On peut également dire que le polynôme scindé à racines simples $X^2 - \lambda_i = (X - \sqrt{\lambda_i})(X + \sqrt{\lambda_i})$ annule u_i donc u_i est diagonalisable.
  En recollant les $\mathcal{B}_i$, on a une base de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de A.

Exercice 4 *(Mines 2017)*

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3.
Soit $\mathcal{B}$ une base de E.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} 8 & -2 & 2 \\ 21 & -5 & 7 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

1. Montrer que le noyau de $f^2 - 2f + 2id_E$ est stable par f.
2. Trouver les sous-espaces de E stables par f.

Correction

1. f et $f^2 - 2f + 2id_E$ commutent donc le noyau de $f^2 - 2f + 2id_E$ est stable par f.
2. La dimension d'un sous-espace de E est 0,1,2 ou 3.
   - **Sous-espace de dimension 0**
     Il y en a un seul : $\{0\}$ et il est stable par f.
   - **Sous-espace de dimension 3**
     Il y en a un seul : E et il est stable par f
   - **Sous-espace de dimension 1**
     Il s'agit des droites incluses dans E.
     D'après le cours, une droite est stable si, et seulement si, elle est engendrée par un vecteur propre.
     On calcule le polynôme caractéristique de f : $\chi_f = X^3 - 4\,X^2 + 6\,X - 4$
     2 est racine évidente ce qui permet de factoriser χ_f dans $\mathbb{R}[X]$: $\chi_f = (X-2)\left(X^2 - 2\,X + 2\right)$
     2 est donc la seule valeur propre réelle et elle est simple. Il y a donc une et une seule droite stable, elle est dirigée par $\epsilon_1 = e_1 + 3e_2$.
   - **Sous-espace de dimension 2**
     — **Première méthode**
     La matrice de $f^2 - 2f + 2id_E$ dans la base $\mathcal{B}$ est : $\begin{bmatrix} 14 & -4 & 0 \\ 42 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.
     Elle est de rang 1 donc $\operatorname{Ker}(f^2 - 2f + 2id_E)$ est un plan stable.
     Considérons P un autre plan stable.
     $P \cap \operatorname{Ker}(f^2 - 2f + 2id_E)$ est également stable.
     Si cet espace est de dimension 1, c'est une droite stable donc la droite dirigée par ϵ_1. C'est impossible car $\epsilon_1 \notin \operatorname{Ker}(f^2 - 2f + 2id_E)$: $(f^2 - 2f + 2id_E)(\epsilon_1) = 2\epsilon_1 \neq 0$.
     Si cet espace est de dimension nulle, P et $\operatorname{Ker}(f^2 - 2f + 2id_E)$ sont deux plans en somme directe en dimension 3 : c'est impossible.
     Donc $P \cap \operatorname{Ker}(f^2 - 2f + 2id_E)$ est de dimension 2 et $P \cap \operatorname{Ker}(f^2 - 2f + 2id_E) = P = \operatorname{Ker}(f^2 - 2f + 2id_E)$.
     $\operatorname{Ker}(f^2 - 2f + 2id_E)$ est le seul plan stable par f.

     Deuxième méthode
     Soit P un plan stable.
     Dans une base adaptée à P, la matrice de f est $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ avec $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
     $(X-2)\left(X^2 - 2\,X + 2\right) = (X - \lambda)\chi_A$
     $X^2 - 2X + 2$ n'ayant pas de racine réelle, $\lambda = 2$.
     On peut alors simplifier par $X - 2$ et $\chi_A = X^2 - 2X + 2$.
     D'après Cayley-Hamilton, $\chi_A(A) = 0$.
     A étant la matrice, dans une certaine base de E, de l'endomorphisme de P induit par f, P est inclus dans le noyau de $f^2 - 2f + 2d_E$.
     Il n'y a plus qu'à calculer comme ci-dessus la dimension du noyau de $f^2 - 2f + 2id_E$ pour conclure.

Exercice 5 *(Centrale 2019)*

Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension finie.
On fait les hypothèses suivantes :

$f^2 = Id_E$, $g^2 = Id_E$ et $f \circ g = g \circ f$
Montrer que f et g ont une base commune de diagonalisation.

Correction
f et g commutent donc les sous-espaces propres de f sont stables par g.
f est une symétrie.
Les cas $f = Id_E$ et $f = -Id_E$ sont clairs : g est aussi une symétrie donc g est diagonalisable. Il existe donc une base de E formée de vecteurs propres de g. Elle est aussi formée de vecteurs propres de f.
On peut donc supposer que f a deux valeurs propres 1 et -1.
f est une symétrie donc f est diagonalisable et $E = E_1(f) \oplus E_{-1}(f)$.
$E_1(f)$ est stable par g ce qui permet de définir g_1 l'endomorphisme de $E_1(f)$ induit par g.
$g^2 = Id_E$ donc $g_1^2 = Id_{E_1(f)}$: g_1 est une symétrie.
Il existe donc une base de $E_1(f)$ formée de vecteurs propres de g_1 donc de g. Elle est évidemment formée de vecteurs propres de f.
On montre de même qu'il existe une base de $E_{-1}(f)$ formée de vecteurs propres de f et de g.
En recollant les deux bases, on obtient une base de E formée de vecteurs propre de f et de g.

Remarque
Avec les outils du programme actuel, on peut aller beaucoup plus loin : si f et g sont deux endomorphismes diagonalisables qui commutent alors il existe une base de E formée de vecteurs propres communs à f et g.
En effet $E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} E_\lambda(f)$ car f est diagonalisable.
f et g commutent donc les sous-espaces propres de f sont stables par g ce qui permet de définir g_λ l'endomorphisme de $E_\lambda(f)$ induit par g.
g étant diagonalisable, les g_λ le sont aussi et dans chaque sous-espace propre de f il existe une base formée de vecteurs propres de f.
En recollant ces bases, on obtient une base de E formée de vecteurs propres communs à f et g.