# ANALYSE 1
# PC*1
# 2025 - 2026
# Chapitre 4 :
# Séries entières

Fabrice Monfront
Lycée du Parc

## 1 Rayon de convergence d'une série entière

### 1.1 Définition d'une série entière

Une série entière est une série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \begin{cases} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto a_n z^n \end{cases}$ où $a_n \in \mathbb{C}$.

Comme pour toute série de fonctions, on cherche le domaine de définition de sa somme ie le plus grand ensemble sur lequel elle converge simplement.
Il s'agit donc, une fois fixé $z_0 \in \mathbb{C}$, de déterminer la nature de la série de nombres $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z_0^n$.

En pratique la méthode la plus simple et la plus fréquemment employée est l'utilisation de la règle de d'Alembert :

On suppose : $\forall n \in \mathbb{N}\ a_n \neq 0$.
On suppose $z_0$ non nul.
En effet quelque soit la série entière, il y a toujours convergence pour $z_0 = 0$, la somme de la série valant alors $a_0$.
On forme le quotient des valeurs absolues de deux termes consécutifs de la série :
$\forall n \in \mathbb{N}\ \dfrac{\left|a_{n+1} z_0^{n+1}\right|}{|a_n z_0^n|} = \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\ |z_0| = \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|\ |z_0|$
On suppose $\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \in [0;+\infty]$. C'est le cas en particulier si $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ a une limite.
La règle de d'Alembert permet alors d'affirmer :

- Si $|z_0| < \dfrac{1}{l}$ alors $\sum a_n\, z_0^n$ converge absolument.
- Si $|z_0| > \dfrac{1}{l}$ alors $\sum a_n\, z_0^n$ diverge grossièrement, et plus précisément : $|a_n\, z_0^n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

Par contre si $|z_0| = \dfrac{1}{l}$, on ne peut rien dire.
Le domaine de définition de la somme de la série entière est donc, en posant $R = \dfrac{1}{l} \in [0;+\infty]$ :

- $\{0\}$ si $R = 0$.
- $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ si $R = +\infty$.
- $]-R; R[$ éventuellement augmenté de $-R$ ou de $R$ si on travaille avec une variable réelle dans le cas où $R \in \mathbb{R}_+^*$
- le disque ouvert centré en 0 et de rayon $R$, éventuellement augmenté de certains points du cercle de rayon $R$ si on travaille avec une variable complexe dans le cas où $R \in \mathbb{R}_+^*$

Toutefois, $\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ n'a aucune raison d'avoir une limite.
C'est le cas particulier, classique dans les cours sur les séries entières, de la série dite militaire :
$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}\ a_{2n} = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}\ a_{2n+1} = 2 \end{cases}$
Le quotient $\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ qui vaut alternativement 2 ou $\dfrac{1}{2}$ n'a pas de limite.
Toutefois, une utilisation judicieuse de la règle de D'Alembert permet de déterminer à peu près complètement le domaine de définition de la somme de la série entière $\sum a_n\, x^n$.

On considère $\sum a_{2n}\, z_0^{2n}$.
$\dfrac{|a_{2n+2}|}{|a_{2n}|} = 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ : **Attention danger** sans le $z_0^2$, il y a un risque élevé d'erreur.
Donc :
- Si $|z_0| < 1$ alors $\sum a_{2n}\, z_0^{2n}$ converge (absolument).
- Si $|z_0| > 1$ alors $|a_{2n}\, z_0^{2n}| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

On considère $\sum a_{2n+1}\, z_0^{2n+1}$.
$\dfrac{|a_{2n+3}|}{|a_{2n+1}|} = 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$
Donc :
- Si $|z_0| < 1$ alors $\sum a_{2n+1}\, z_0^{2n+1}$ converge (absolument).
- Si $|z_0| > 1$ alors $\left|a_{2n+1}\, z_0^{2n+1}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

Donc :
- Si $|z_0| < 1$ alors $\sum a_n\, z_0^n$ converge (absolument).
  En effet, on note $P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_{2k} z_0^{2k}$ et $I_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_{2k+1} z_0^{2k+1}$ qui ont toutes deux une limite finie, $l_P$ pour la première, $l_I$ pour la seconde.
  On note $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k z_0^k$ et on a :
  $S_{2n} = P_n + I_{n-1}$ et $S_{2n+1} = P_n + I_n$ qui convergent vers $l_P + l_I$.
- Si $|z_0| > 1$ alors $|a_n\, z_0^n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

Donc : $\mathcal{D}(0,1) \subset \mathcal{D}_S \subset \mathcal{D}_f(0,1)$.
Mais si $|z_0| = 1$, la série $\sum a_n\, z_0^n$ diverge grossièrement donc $\mathcal{D}_S = \mathcal{D}(0,1)$.
Si on se limite à la variable réelle, $\mathcal{D}_S = ]-1; 1[$.

Par contre, pour une série entière comme $\sum \sin n\, z^n$, il est impossible d'utiliser la règle de d'Alembert :
$\dfrac{\sin(n+1)}{\sin(n)}$ ou $\dfrac{|\sin(n+1)|}{|\sin(n)|}$ n'ont pas de limite.
Si $|z_0| < 1$ alors :

$\forall n \in \mathbb{N}\ |\sin(n)\, z_0^n| = |\sin(n)|\, |z_0|^n \leq |z_0|^n$ terme général d'une série convergente.
Donc $\sum \sin(n)\, z_0^n$ converge absolument.
Soit $z_0 \in \mathbb{R}$ tel que $|z_0| \geq 1$.
Supposons que $\sum \sin(n)\, z_0^n$ converge.
Alors $\sin(n)\, z_0^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
Donc $|\sin(n)| \leq |\sin(n)|\, |z_0|^n = |\sin(n)\, z_0^n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\sin(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
Donc $\sin(n+1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
Or $\sin(n+1) = \sin(n)\cos(1) + \cos(n)\sin(1)$ avec $\sin(1) \neq 0$
Donc $\cos(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
Donc $1 = \sin^2(n) + \cos^2(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
C'est absurde.
Donc si $|z_0| \geq 1$ alors $\sum \sin(n)\, z_0^n$ diverge grossièrement.
Donc $\mathcal{D}_S = \mathcal{D}(0,1)$.
Si on se limite à la variable réelle, $\mathcal{D}_S = ]-1;1[$.

On constate que le domaine de définition de la somme des séries entières précédentes est :

**i** un intervalle ouvert centré à l'origine éventuellement augmenté d'une ou de ses deux extrémités.

**ii** un disque ouvert (en considérant $\mathbb{C}$ comme un disque ouvert de rayon infini) éventuellement augmenté d'un ou de plusieurs points de sa frontière.

Nous allons montrer que cette situation est générique.

## 1.2 Définition du rayon de convergence d'une série entière

La définition du programme est la suivante :

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière.
On appelle rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ la borne supérieure dans $\overline{\mathbb{R}}$ de $\{\rho \in \mathbb{R}_+ \text{ tq la suite } (a_n \rho^n) \text{ est bornée}\}$.

Il résulte immédiatement de cette définition que si $z$ est un nombre complexe tel que $|z| > R$ alors la suite $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée (et en particulier la suite $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0 et la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ diverge).

## 1.3 Lemme d'Abel

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{C}$.
On suppose qu'il existe $z_0 \in \mathbb{C}^*$ tel que la suite $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée.
Alors pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$ la série $\sum a_n z^n$ converge absolument.

**Démonstration**
$\exists M \in \mathbb{R}_+$ tq $\forall n \in \mathbb{N}\ |a_n||z_0|^n = |a_n z_0^n| \leq M$
Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$.

$\forall n \in \mathbb{N}\ |a_n z^n| = |a_n||z|^n = |a_n||z_0|^n.\left(\dfrac{|z|}{|z_0|}\right)^n \leq M\left(\dfrac{|z|}{|z_0|}\right)^n$
Or $\dfrac{|z|}{|z_0|} < 1$ donc la série géométrique $\sum M\left(\dfrac{|z|}{|z_0|}\right)^n$ converge.
On en déduit que $\sum a_n z^n$ converge absolument.

## 1.4 Conséquences du lemme d'Abel

Soient $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R$ et $z$ un nombre complexe.
Si $|z| < R$ la série $\sum a_n z^n$ converge absolument.

**Démonstration**
Par définition de $R$, il existe $\rho \in \mathbb{R}_+$ tel que :

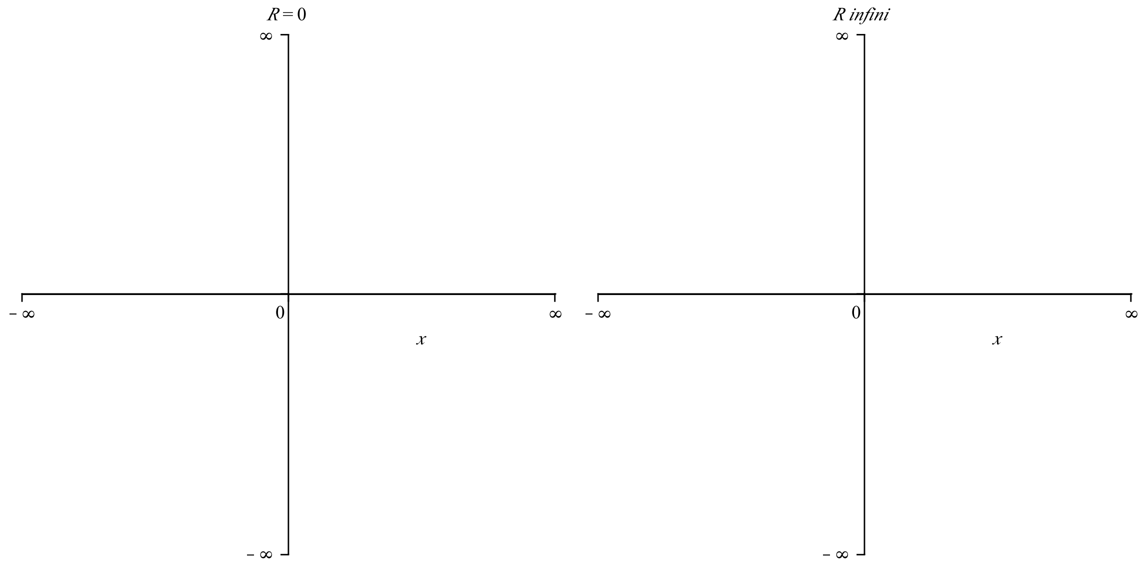
**i** $|z| < \rho \leq R$

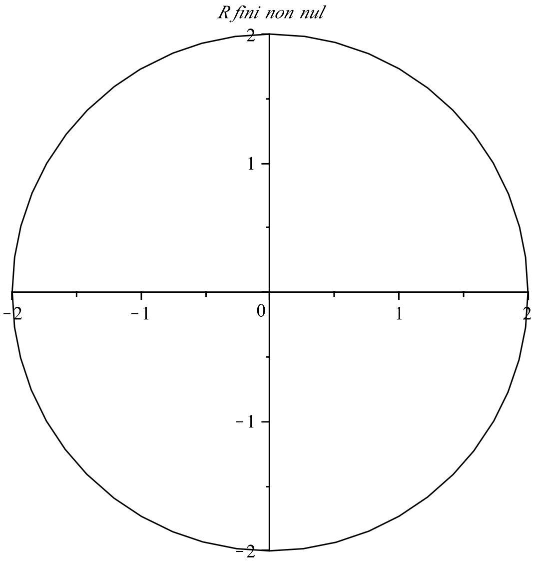
**ii** la suite $(a_n\rho^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

D'après le lemme d'Abel, la série $\sum a_n z^n$ converge absolument.

## 1.5 Remarque

On est donc dans une des trois situations suivantes :






On dispose alors d'un certain nombre de formules du genre :

$$
\begin{aligned}
R_{CV} &= \sup\left\{r \in \mathbb{R}_+ \text{ tq } \sum a_n r^n \text{ converge}\right\} \\
&= \sup\left\{r \in \mathbb{R}_+ \text{ tq } \sum a_n r^n \text{ converge absolument}\right\} \\
&= \sup\left\{|z|, z \in \mathbb{C} \text{ tq } \sum a_n z^n \text{ converge}\right\} \\
&= \sup\left\{|z|, z \in \mathbb{C} \text{ tq } \sum a_n z^n \text{ converge absolument}\right\} \\
&= \sup\left\{|z|, z \in \mathbb{C} \text{ tq } a_n z^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\right\} \\
&= \begin{cases} \inf\left\{|z|, z \in \mathbb{C} \text{ tq } (a_n z^n) \text{ n'est pas bornée}\right\} & \text{si cet ensemble n'est pas vide} \\ +\infty \text{ si il est vide} \end{cases} \\
&= \ldots
\end{aligned}
$$

## 1.6 Disque et intervalle ouverts de convergence

Soient $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière et $R$ son rayon de convergence.
$\{z \in \mathbb{C} \text{ tq } |z| < R\}$ (c'est $\emptyset$ si $R = 0$ et $\mathbb{C}$ si $R = +\infty$) est appelé disque (ouvert) de convergence.
$]-R; R[$ (c'est $\emptyset$ si $R = 0$ et $\mathbb{R}$ si $R = +\infty$) est appelé intervalle (ouvert) de convergence.

## 1.7 Détermination pratique du rayon de convergence

- **Utilisation de la règle de D'Alembert**
  C'est la méthode la plus simple à utiliser mais elle ne s'applique pas dans tous les cas.
  Le programme indique que le théorème suivant peut être utilisé :
  **Théorème**
  Soit $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière telle que :

  **i** $\forall n \in \mathbb{N}\ a_n \neq 0$

  **ii** $\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \in [0; +\infty]$

Alors le rayon de convergence est $R = \dfrac{1}{l}$.

**Exemples**

— $\sum_{n \geq 0} n^\alpha z^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$\forall n \in \mathbb{N}^* \ a_n = n^\alpha \neq 0$

$\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \dfrac{(n+1)^\alpha}{n^\alpha} = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^\alpha \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$

Donc $R = 1$.

Ce résultat est mentionné explicitement dans le programme.

— $\sum_{n \geq 0} \dfrac{(-1)^n z^{2n}}{2^n + n}$

$\forall n \in \mathbb{N} \ a_n = \dfrac{(-1)^n}{2^n + n} \neq 0$

$\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \dfrac{2^n + n}{2^{n+1} + n + 1} \sim \dfrac{2^n}{2^{n+1}} = \dfrac{1}{2}$

Donc $R = 2$.

C'est un raisonnement faux.

Le théorème est bien pratique mais doit être manié rigoureusement.

Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$.

$\forall n \in \mathbb{N} \ |a_n| \, r^{2n} > 0$

$\dfrac{|a_{n+1}| \, r^{2n+2}}{|a_n| \, r^{2n}} = \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} r^2 \xrightarrow[n \to +\infty]{} \dfrac{r^2}{2}$

Si $r < \sqrt{2}$ alors $\sum a_n r^{2n}$ converge absolument.

Si $r > \sqrt{2}$ alors $|a_n| \, r^{2n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$

Donc $R = \sqrt{2}$.

Dans les cas où on ne peut pas appliquer la règle de D'Alembert, on peut utiliser la proposition suivante qui découle immédiatement des résultats précédents :

- **Proposition**[1]

Soient $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière et $R$ son rayon de convergence.

— Si on trouve $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que la série $\sum_{n \geq 0} a_n z_0^n$ converge alors on peut dire que $R \geq |z_0|$.

— Si on trouve $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que la série $\sum_{n \geq 0} a_n z_0^n$ converge absolument alors on peut dire que $R \geq |z_0|$.

— Si on trouve $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que la suite $(a_n z_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit bornée alors on peut dire que $R \geq |z_0|$.

— Si on trouve $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que la suite $(a_n z_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 alors on peut dire que $R \geq |z_0|$.

— Si on trouve $z_1 \in \mathbb{C}$ tel que la série $\sum_{n \geq 0} a_n z_1^n$ diverge alors on peut dire que $R \leq |z_1|$.

— Si on trouve $z_1 \in \mathbb{C}$ tel que la série $\sum_{n \geq 0} a_n z_1^n$ ne converge pas absolument alors on peut dire que $R \leq |z_1|$.

1. cette proposition n'est pas mentionnée explicitement dans le programme mais relève du bon sens

— Si on trouve $z_1 \in \mathbb{C}$ tel que la suite $(a_n z_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne soit pas bornée alors on peut dire que $R \leq |z_1|$.

— Si on trouve $z_1 \in \mathbb{C}$ tel que la suite $(a_n z_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0 alors on peut dire que $R \leq |z_1|$.

## 1.8 Rayon de convergence et comparaison des coefficients

### 1.8.1 Proposition

Soit $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R_a$.
Soit $\sum\limits_{n\geq 0} b_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R_b$.
On suppose :
$a_n = O(b_n)$
Alors $R_a \geq R_b$.

**Démonstration**
Si $R_b = 0$ le résultat est clair donc on suppose $R_b > 0$.
$a_n = O(b_n)$ donc :
$\exists (M, n_0) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq n_0\ \ |a_n| \leq M\,|b_n| = |Mb_n|$
Il est clair que le rayon de convergence de $\sum\limits_{n\geq 0} Mb_n z^n$ est égal à $R_b$.
Soit $r \in [0; R_b[$.
On a :

- $\forall n \geq n_0\ 0 \leq |a_n| r^n \leq |b_n| r^n$
- la série $\sum\limits_{n\geq 0} |b_n| r^n$ converge (car $r < R_b$).

Donc la série $\sum\limits_{n\geq 0} |a_n| r^n$ converge et $R_a \geq r$.
En faisant tendre $r$ vers $R_b$ on obtient $R_a \geq R_b$.

**Remarque**
Le résultat s'applique en particulier si $a_n = o(b_n)$ puisqu'on a alors $a_n = O(b_n)$.

### 1.8.2 Proposition

Soit $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R_a$.
Soit $\sum\limits_{n\geq 0} b_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R_b$.
On suppose : $|a_n| \sim |b_n|$
Alors $R_a = R_b$.

**Démonstration**
Si $|a_n| \sim |b_n|$ alors $a_n = O(b_n)$ et $R_a \geq R_b$.
Si $|a_n| \sim |b_n|$ alors $b_n = O(a_n)$ et $R_b \geq R_a$.

### 1.9 Exemple : CCP 99

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $a_n$ la $n^{\text{ième}}$ décimale de $\pi$.
Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.
Rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{n^\alpha} x^n$ ?

**Correction**
$\pi = 3,1415\ldots$
$a_1 = 1$, $a_2 = 4\ldots$
$\forall n \in \mathbb{N}^* \ \left|\frac{a_n}{n^\alpha}\right| = \frac{a_n}{n^\alpha} \leq \frac{9}{n^\alpha}$
Donc $\frac{a_n}{n^\alpha} = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$.
Donc $R \geq R_{CV}\left(\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n^\alpha}\right) = R_{CV}\left(\sum_{n\geq 1} n^{-\alpha} x^n\right) = 1$.
D'où $R \geq 1$.
Dans l'autre sens c'est plus compliqué car $a_n$ peut être nul.
Ceci dit :
$\{n \in \mathbb{N}^* \text{ tq } a_n \neq 0\}$ est infini.
Sinon $\pi$ serait décimal donc rationnel, ce qui est faux.
Je suppose ici qu'on considère comme acquis : $\pi \notin \mathbb{Q}$.
Donc il existe $\varphi$ de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$ strictement croissante telle que :
$\forall n \in \mathbb{N}^* \ a_{\varphi(n)} \neq 0$.
Mais les $a_p$ sont des entiers positifs donc :
$\forall n \in \mathbb{N}^* \ a_{\varphi(n)} \geq 1$
Soit $x > 1$.
$\forall n \in \mathbb{N}^* \ \frac{a_{\varphi(n)}}{\varphi(n)^\alpha} x^{\varphi(n)} \geq \frac{x^{\varphi(n)}}{\varphi(n)^\alpha}$
La suite $\left(\frac{x^n}{n^\alpha}\right)_{n\geq 1}$ diverge vers $+\infty$ donc la suite extraite $\left(\frac{x^{\varphi(n)}}{\varphi(n)^\alpha}\right)_{n\geq 1}$ aussi.
Donc $\frac{a_{\varphi(n)}}{\varphi(n)^\alpha} x^{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
Une des suites extraites de $\left(\frac{a_n}{n^\alpha} x^n\right)$ diverge donc cette suite diverge.
D'où $R \leq x$.
En faisant tendre $x$ vers 1, on obtient $R \leq 1$.
Finalement, $R = 1$.

**Mines 2022**
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $a_n$ la $n^{\text{ième}}$ décimale de $\pi$.
Rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 1} a_n x^n$ ?

### 1.10 Linéarité

- **Produit par un scalaire** [2]
  Soient $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière et $R$ son rayon de convergence.

2. Il s'agit plus d'un rappel de bon sens que d'un théorème

Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$, le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} \lambda a_n z^n$ est égal à $R$.
De plus si $R > 0$ on a pour tout $z \in \mathbb{C}$ de module strictement inférieur à $R$ :
$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda a_n z^n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$

- **Somme**
Soient $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière et $R_a$ son rayon de convergence.
Soient $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ une série entière et $R_b$ son rayon de convergence.
Soit $R$ le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} (a_n + b_n) z^n$.
On a : $R \geq \min(R_a, R_b)$.
De plus :
— Si $R_a \neq R_b$ alors $R = \min(R_a, R_b)$.
— Si $\min(R_a, R_b) > 0$, on a pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \min(R_a, R_b)$ :
$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$

**Démonstration**
— Si $\min(R_a, R_b) = 0$ il est clair que $R \geq \min(R_a, R_b)$.
Supposons $\min(R_a, R_b) > 0$.
Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \min(R_a, R_b)$.
Les séries $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ convergent donc :
— la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n + b_n z^n$ ie $\sum_{n\geq 0} (a_n + b_n) z^n$ converge et par conséquent $R \geq |z|$.
— $\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$
On en déduit en particulier :
$\forall r \in [0; \min(R_a, R_b)[\ R \geq r$
D'où $R \geq \min(R_a, R_b)$.
— On suppose $R_a \neq R_b$, par exemple $R_a < R_b$
(on ne fait plus l'hypothèse : "$\min(R_a, R_b) > 0$").
Pour tout $r \in ]R_a; R_b[$ la série $\sum_{n\geq 0} a_n r^n$ diverge et la série $\sum_{n\geq 0} b_n r^n$ converge donc la série $\sum_{n\geq 0} (a_n + b_n) r^n$ diverge.
Donc :
$\forall r \in ]R_a; R_b[\ r \geq R$
D'où $R_a \geq R \geq \min(R_a, R_b) = R_a$.
Donc $R = R_a = \min(R_a, R_b)$.

**Remarque**
Si $R_a = R_b = +\infty$ alors $R = +\infty$ mais si $R_a = R_b \in \mathbb{R}_+$ il peut se passer n'importe quoi :
— Si pour tout $n \in \mathbb{N}$ $b_n = -a_n$ on a $R = +\infty$.
— Si pour tout $n \in \mathbb{N}$ $b_n = a_n$ on a $R = R_a = R_b = \min(R_a, R_b)$.

— Si pour tout $n \in \mathbb{N}$ $b_n = -a_n + c_n$ avec $R_{CV}\left(\sum_{n\geq 0} c_n z^n\right) = R_c$ réel $> R_a$ on a bien $R_b = R_a$ à cause de la proposition et $R = R_c$.

## 1.11 Produit de deux séries entières

### 1.11.1 Introduction

Considérons deux polynômes : $P = \sum_{n=0}^{p} a_n X^n$ et $Q = \sum_{n=0}^{q} b_n X^n$. Leur produit est le polynôme $\sum_{n=0}^{p+q} c_n X^n$ où :
$\forall n \in \{0; \ldots; p+q\}$ $c_n = \sum_{\substack{k+l=n \\ 0\leq k\leq p \\ 0\leq l\leq q}} a_k b_l$
Se pose alors naturellement la question suivante :
étant données deux séries entières $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n x^n$,
si on définit pour tout $n \in \mathbb{N}$ $c_n = \sum_{k+l=n} a_k b_l$
a-t-on : $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \times \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ et si oui pour quels $x$ ?

### 1.11.2 Produit de Cauchy de deux séries de nombres

Soient $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ deux séries à termes dans $\mathbb{K}$.
On appelle produit de Cauchy des deux séries $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ la série $\sum_{n\geq 0} w_n$ où :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ w_n = \sum_{p+q=n} u_p v_q = \sum_{p=0}^{n} u_p v_{n-p} = \sum_{q=0}^{n} u_{n-q} v_q}$$

### 1.11.3 Théorème

Soient $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ deux séries à termes dans $\mathbb{K}$ et $\sum_{n\geq 0} w_n$ leur produit de Cauchy.
Si les séries $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ convergent *absolument* alors la série $\sum_{n\geq 0} w_n$ converge absolument et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right) . \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$$

**Remarque**
Le théorème s'applique en particulier si $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ sont deux séries à termes réels *positifs convergentes.*

**Exemple**

Considérons la série entière $\sum \frac{z^n}{n!}$ dite série exponentielle.
$\forall n \in \mathbb{N}\ a_n = \frac{1}{n!} > 0$
$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ donc $R = +\infty$.
Donc pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série $\sum \frac{z^n}{n!}$ converge absolument.
Sa somme est notée exp. :
$\forall z \in \mathbb{C}\ \exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$
Soient $z_1$ et $z_2 \in \mathbb{C}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soient $u_n = \frac{z_1^n}{n!}$ et $v_n = \frac{z_2^n}{n!}$.

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}\ w_n &= \sum_{p=0}^{n} \frac{z_1^p}{p!} \frac{z_2^{n-p}}{(n-p)!} = \frac{1}{n!} \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} z_1^p z_2^{n-p} \\ &= \frac{1}{n!}(z_1 + z_2)^n\end{aligned}$$

Le produit de Cauchy de $\sum \frac{z_1^n}{n!}$ et de $\sum \frac{z_2^n}{n!}$ est $\sum \frac{(z_1+z_2)^n}{n!}$.
Or, pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série $\sum \frac{z^n}{n!}$ converge absolument donc :

$$\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z_1+z_2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z_1^n}{n!} \times \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z_2^n}{n!}$$

ou encore

$$\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}\ \exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \times \exp(z_2)$$

En particulier :
$\forall z \in \mathbb{C}\ \exp(z) \times \exp(-z) = \exp(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{0^n}{n!} = 1$
On en déduit :
$\forall z \in \mathbb{C}\ \exp(z) \neq 0$
et
$\forall z \in \mathbb{C}\ \frac{1}{\exp(z)} = \exp(-z)$

**Démonstration** [3]

- **Cas de deux séries à termes positifs**
  On suppose :
  $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n \in \mathbb{R}_+$ et $v_n \in \mathbb{R}_+$
  Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

3. La démonstration est mentionnée comme ”non exigible” dans le programme.

$A_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$, $B_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$ et $C_n = \sum_{k=0}^{n} w_k$

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}\ C_n &= \sum_{k=0}^{n} \sum_{p+q=k} u_p v_q = \sum_{0 \le p+q \le n} u_p v_q \\
\forall n \in \mathbb{N}\ A_n.B_n &= \left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right).\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right) = \sum_{\substack{0 \le p \le n \\ 0 \le q \le n}} u_p v_q
\end{aligned}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $D_n = \{(p,q) \in \mathbb{N}^2 \text{ tq } p+q \le n\}$
et $\Delta_n = \{(p,q) \in \mathbb{N}^2 \text{ tq } 0 \le p \le n \text{ et } 0 \le q \le n\}$.
$\forall n \in \mathbb{N}\ D_n \subset \Delta_n \subset D_{2n}$
Pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, $u_p v_q \ge 0$ donc :
$\forall n \in \mathbb{N}\ C_n = \sum_{(p,q) \in D_n} u_p v_q \le \sum_{(p,q) \in \Delta_n} u_p v_q = A_n B_n \le \sum_{(p,q) \in D_{2n}} u_p v_q = C_{2n}$
ie : $\forall n \in \mathbb{N}\ C_n \le A_n B_n \le C_{2n}$
Soient $A = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et $B = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.
Comme on a affaire à des séries à termes positifs, on a :
$\forall n \in \mathbb{N}\ 0 \le A_n \le A$ et $0 \le B_n \le B$
Donc :
$\forall n \in \mathbb{N}\ C_n \le A_n B_n \le AB$
La suite des sommes partielles de la série à termes réels positifs $\sum_{n \ge 0} w_n$ est majorée donc la série $\sum_{n \ge 0} w_n$ converge.
Soit $C$ sa somme.
$\forall n \in \mathbb{N}\ C_n \le A_n B_n \le C_{2n}$
D'où, en passant à la limite :
$C \le AB \le C$ ie $C = AB$.

- **Cas général**
Soit $\sum_{n \ge 0} \omega_n$ le produit de Cauchy de $\sum_{n \ge 0} |u_n|$ et de $\sum_{n \ge 0} |v_n|$.
$\forall n \in \mathbb{N}\ |w_n| = \left|\sum_{p=0}^{n} u_p v_{n-p}\right| \le \sum_{p=0}^{n} |u_p||v_{n-p}| = \omega_n$
D'après ce qui précède, la série $\sum_{n \ge 0} \omega_n$ converge donc la série $\sum_{n \ge 0} w_n$ converge absolument.
Si on conserve les notations précédentes, on a :
$\forall n \in \mathbb{N}\ A_n B_n - C_n = \sum_{(p,q) \in \Delta_n} u_p v_q - \sum_{(p,q) \in D_n} u_p v_q = \sum_{(p,q) \in \Delta_n \setminus D_n} u_p v_q$
D'où :
$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}\ |A_n B_n - C_n| &\le \sum_{(p,q) \in \Delta_n \setminus D_n} |u_p||v_q| \\
&\le \sum_{(p,q) \in \Delta_n} |u_p||v_q| - \sum_{(p,q) \in D_n} |u_p||v_q| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \text{ d'après ce qui précède}
\end{aligned}$$
D'où : $A_n B_n - C_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

Or $A_nB_n - C_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} AB - C$.
Finalement $C = AB$.

### 1.11.4 Produit de Cauchy de deux séries entières

Soient $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière et $R_a$ son rayon de convergence.
Soient $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ une série entière et $R_b$ son rayon de convergence.
Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite à valeurs complexes définie par :
$\forall n \in \mathbb{N}\ c_n = \sum_{p+q=n} a_p b_q = \sum_{p=0}^{n} a_p b_{n-p} = \sum_{q=0}^{n} a_{n-q} b_q$
Soit $R_c$ le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} c_n z^n$.
On a : $R_c \geq \min(R_a, R_b)$.
De plus, si $\min(R_a, R_b) > 0$, on a pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \min(R_a, R_b)$ :
$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right) . \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{p+q=n} a_p b_q\right) z^n$$

**Démonstration**
Si $\min(R_a, R_b) = 0$ le résultat est clair.
On suppose donc $\min(R_a, R_b) > 0$.
Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \min(R_a, R_b)$.
$$\forall n \in \mathbb{N}\ c_n z^n = \left(\sum_{p+q=n} a_p b_q\right) z^n = \sum_{p+q=n} (a_p b_q z^n) = \sum_{p+q=n} (a_p z^p b_q z^q)$$
ie : la série $\sum_{n\geq 0} c_n z^n$ est le produit de Cauchy des séries $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$.
Or les séries $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ convergent absolument donc :

- La série $\sum_{n\geq 0} c_n z^n$ converge absolument et par conséquent $R \geq |z|$.
- $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right) . \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right)$

On en déduit en particulier :
$\forall r \in [0; \min(R_a, R_b)[\ R_c \geq r$
D'où $R_c \geq \min(R_a, R_b)$.

**Remarque**
Même si $R_a \neq R_b$ on peut avoir $R_c > \min(R_a, R_b)$.

**Exemple**
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}\ a_n = 1$.
$$R_a = R_{CV}\left(\sum_{n\geq 0} a_n z^n\right) = R_{CV}\left(\sum_{n\geq 0} z^n\right) = 1.$$
Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $b_0 = 1$, $b_1 = -1$ et $\forall n \geq 2\ b_n = 0$.

$R_b = R_{CV}\left(\sum_{n\geq 0} b_n z^n\right) = +\infty.$
$c_0 = a_0.b_0 = 1$ et :
$\forall n \in \mathbb{N}^*\ c_n = \sum_{q=0}^{n} a_{n-q}b_q = b_0 + b_1 = 0$
Donc $R_c = +\infty$.

### 1.11.5 Centrale 2003

$a_0 = 1$
$\forall n \in \mathbb{N}^*\ a_n = -\frac{1}{2}\left(\frac{a_0}{n!} + \cdots + \frac{a_{n-2}}{2!} + a_{n-1}\right)$

1. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*\ |a_n| \leq 1$
   Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*\ |a_n| \leq \left(\frac{1}{\ln 3}\right)^n$
   Qu'en déduire ? (sur $R$ rayon de convergence de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$)
2. Montrer : $\forall x \in ]-R;R[\ (\mathrm{e}^x + 1).\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 2$
3. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*\ a_{2n} = 0$
4. Calculer $a_0, \ldots, a_6$ à l'aide de Maple.

```
def a(n):
    from math import factorial
    tab=[1.0]*(n+1)
    for i in range(1,n+1):
        tab[i]=-0.5*sum(tab[k]/factorial(i-k) for k in range(i))
    return(tab)

print(a(6))
[1.0, -0.5, -0.0, 0.041666666666666667, -3.469446951953614e-18, \\
-0.004166666666666667, 4.336808689942018e-19]
```

Une solution récursive est envisageable. Sa complexité est très mauvaise mais cela ne pose pas de problème pour les premiers termes de la suite.

```
def a_rec(n):
    from math import factorial
    if n==0:
        return 1.0
    return(-0.5*sum(a_rec(k)/factorial(n-k) for k in range(n)))

for i in range(7):
    print(a_rec(i))
1.0
-0.5
-0.0
```

```
0.0416666666667
-3.46944695195e-18
-0.00416666666667
4.33680868994e-19
```

**Correction**

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n) : \forall k \in [\![0;n]\!]\ |a_k| \leq 1$.
   $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
   On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie.

$$\begin{aligned} |a_{n+1}| &\leq \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{|a_{n+1-k}|}{k!} \leq \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k!} \\ &\leq \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k!} = \frac{\mathrm{e}-1}{2} \leq \frac{3-1}{2} = 1 \end{aligned}$$

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n) : \forall k \in [\![0;n]\!]\ |a_k| \leq \left(\frac{1}{\ln 3}\right)^k$.
   $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
   On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie.

$$\begin{aligned} |a_{n+1}| &\leq \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{|a_{n+1-k}|}{k!} \leq \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{(\ln 3)^{n+1-k}k!} \\ &\leq \frac{1}{2(\ln 3)^{n+1}}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{(\ln 3)^k}{k!} \leq \frac{1}{2(\ln 3)^{n+1}}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(\ln 3)^k}{k!} \\ &\leq \frac{\mathrm{e}^{\ln 3}-1}{2(\ln 3)^{n+1}} \leq \frac{1}{(\ln 3)^{n+1}} \end{aligned}$$

   On a donc prouvé par récurrence :
   $\forall n \in \mathbb{N}\ |a_n| \leq \left(\frac{1}{\ln 3}\right)^n$.
   On en déduit $a_n = O\left(\left(\frac{1}{\ln 3}\right)^n\right)$ puis $R \geq R_{CV}\left(\sum \frac{z^n}{(\ln 3)^n}\right) = \ln 3$

2. $\forall x \in \mathbb{R}\ \mathrm{e}^x + 1 = 2 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n\ (R = +\infty)$
   $\forall x \in \mathbb{R}\ (\mathrm{e}^x + 1)\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$
   avec :
   $\forall n \in \mathbb{N}\ c_n = \sum_{k=0}^{n} b_k a_{n-k}$
   $c_0 = a_0 b_0 = 2$
   $\forall n \in \mathbb{N}^*\ c_n = 2a_n + \sum_{k=1}^{n}\frac{a_{n-k}}{k!} = 0$
   Donc $\forall x \in ]-R;R[\ (\mathrm{e}^x + 1).\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 2$ avec $\mathrm{e}^x + 1 \neq 0$
   Donc :
   $\forall x \in ]-R;R[\ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \frac{2}{\mathrm{e}^x + 1}$

3.

$$\forall x \in ]-R;R[ \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n = \frac{2}{\mathrm{e}^x+1} - a_0 = \frac{2}{\mathrm{e}^x+1} - 1$$
$$= \frac{1-\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} \text{ noté } f(x)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}\ f(-x) = \frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}} = \frac{\mathrm{e}^x(1-\mathrm{e}^{-x})}{\mathrm{e}^x(1+\mathrm{e}^{-x})} = \frac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1} = -f(x)$$

$f$ est impaire donc :
$\forall n \in \mathbb{N}^*\ a_{2n} = 0$

**Remarque**

$$\forall x \in ]-R;R[\ f(x) = \frac{1-\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1} = \frac{-\mathrm{e}^{x/2}\left(\mathrm{e}^{x/2}-\mathrm{e}^{-x/2}\right)}{\mathrm{e}^{x/2}\left(\mathrm{e}^{x/2}+\mathrm{e}^{-x/2}\right)}$$
$$= -\tanh\left(\frac{x}{2}\right)$$

# 2 Les séries entières comme fonctions : continuité, dérivation, intégration

## 2.1 Modes de convergence d'une série entière

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.
Il y a convergence normale sur tout segment de $]-R;R[$.

En effet, considérons $[a;b]$ $(-R < a < b < R)$ un segment inclus dans $]-R;R[$.
Soit $c = \max(|a|, |b|) = \max_{x\in[a;b]} |x|$.
$c < R$ donc la série $\sum_{n\geq 0} |a_n| c^n$ converge.
$\forall x \in [a;b]\ \forall n \in \mathbb{N}\ |a_n x^n| = |a_n||x|^n \leq |a_n| c^n$
On en déduit que la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ converge normalement sur $[a;b]$.

**Il n'y a pas en général convergence normale sur** $]-R;R[$.

**Exemple :** $\sum_{n\geq 0} x^n$
$\sup_{x\in]-1;1[} |x^n| = 1$ qui est le terme général d'une série divergente.
On en déduit que la série entière $\sum_{n\geq 0} x^n$ ne converge pas normalement sur $]-1;1[$.

**Il n'y a pas en général convergence uniforme sur** $]-R;R[$.

Si on reprend l'exemple précédent, $\sup_{x\in]-1;1[} |x^n|$ ne tend pas vers 0 et la condition nécessaire de convergence uniforme vue en ? du chapitre précédent n'est pas vérifiée.

## 2.2 Continuité de la somme d'une série entière

- **Cas de la variable complexe**
  Soient $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et $D$ son disque (ouvert) de convergence.
  La fonction $S \begin{cases} D \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \end{cases}$ est continue.
  Le programme signale que ce théorème est admis.

- **Cas de la variable réelle**
  Soient $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et $]-R;R[$ son intervalle (ouvert) de convergence.
  La fonction $S \begin{cases} ]-R;R[\to \mathbb{C} \\ x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \end{cases}$ est continue.
  **Démonstration**
  Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n \begin{cases} ]-R;R[\to \mathbb{C} \\ x \mapsto a_n x^n \end{cases}$.
  — Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n$ est continue sur $]-R;R[$.
  — La série de fonctions $\sum f_n$ convergence uniformément sur tout segment de $]-R;R[$ : en effet, il y a convergence normale sur tout segment et la convergence normale entraîne la convergence uniforme.
  On en déduit que la fonction $S$ est continue sur $]-R;R[$.

- **Remarque**
  Je cite le programme :

  > L'étude des propriétés de la somme au bord de l'intervalle ou du disque de convergence n'est pas un objectif du programme.

## 2.3 Intégration terme à terme des séries entières

### 2.3.1 A propos du rayon de convergence

Le résultat qui suit n'est pas explicitement au programme.
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{C}$.
Les séries entières $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geq 0} a_n \frac{z^{n+1}}{n+1} = \sum_{n\geq 1} a_{n-1} \frac{z^n}{n}$ ont le même rayon de convergence.

**Démonstration**
Soit $R_1$ le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$.
Soit $R_2$ le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n \frac{z^{n+1}}{n+1}$.
Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ on a :

la série $\sum_{n\geq 0} a_n \frac{z^{n+1}}{n+1}$ converge $\Longleftrightarrow$ la série $\sum_{n\geq 0} a_n \frac{z^n}{n+1}$ converge
Donc $R_2$ est aussi le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n+1} z^n$.
$\forall n \in \mathbb{N}\ \left|\frac{a_n}{n+1}\right| = \frac{|a_n|}{n+1} \leq |a_n|$
donc $R_2 \geq R_1$.
Supposons $R_2 > R_1$.
Soient $r_1$ et $r_2$ deux réels tels que $R_1 < r_1 < r_2 < R_2$.
$r_2 < R_2$ donc la suite $\left(\frac{a_n}{n+1} r_2^n\right)$ est bornée et :
$\frac{a_n}{n+1} r_1^n = \frac{a_n}{n+1} r_2^n \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^n = O\left(\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^n\right)$.
D'où $|a_n| r_1^n = O\left(n\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^n\right)$.
On a de plus :

- $\forall n \in \mathbb{N}\ n\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^n \geq 0$
- la série $\sum_{n\geq 0} n\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^n$ converge (en effet $\frac{r_1}{r_2} \in ]0;1[$ et le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} n z^n$ est égal à 1, cf ).

On en déduit que la série $\sum_{n\geq 0} |a_n| r_1^n$ converge (absolument), ce qui contredit $r_1 > R_1$.
Donc on a bien $R_1 = R_2$.

### 2.3.2 Proposition

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.
Soit $S \begin{cases} ]-R;R[ \to \mathbb{C} \\ x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \end{cases}$.
Soit $T$ une primitive de $S$ sur $]-R;R[$.
On a :
$\forall x \in ]-R;R[\ T(x) = T(0) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = T(0) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n-1}}{n} x^n$
En d'autres termes, les primitives de $S$ s'obtiennent en intégrant terme à terme.

**Démonstration**
Soit $x \in ]-R;R[\setminus\{0\}$ (le cas $x = 0$ est clair).
$S$ étant continue, on a :

$$T(x) = T(0) + \int_0^x S(t)\,\mathrm{d}t = T(0) + \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n\right) \mathrm{d}t$$

Soit $J = [\min(0,x), \max(0,x)]$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n \begin{cases} J \to \mathbb{C} \\ t \mapsto a_n t^n \end{cases}$.

On a :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$ $f_n$ est continue sur $J$.
- La série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge normalement sur $J$.

On a alors d'après le théorème d'intégration terme à terme des séries de fonctions vu au paragraphe 5.3.1 du chapitre précédent :

$$T(x) = T(0) + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_0^x t^n \, \mathrm{d}t = T(0) + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

### 2.3.3 Exemple

$\forall x \in ]-1;1[ \ \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}$ $(R = 1)$

En intégrant terme à terme :

$\forall x \in ]-1;1[ \ \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$

D'après le théorème spécial sur la convergence des séries alternées, la série $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{1^n}{n}$ converge.

Il est évidemment tentant d'écrire $\ln(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$

C'est vrai mais cela doit être justifié.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n \begin{cases} [0;1[ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \end{cases}$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) \xrightarrow[x<1]{x \to 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.
- $\sum f_n$ converge uniformément sur $[0;1[$ :
  D'après le calcul initial, il y a convergence simple.
  A $x \in [0;1[$ fixé :
  — $\sum (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ est alternée
  — $(-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$
  — $\left( \left| (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \right| \right)_{n \geq 1} = \left( \frac{x^n}{n} \right)_{n \geq 1}$ décroît.
  Donc par le théorème sur la convergence des séries alternées :
  $\forall x \in [0;1[ \ \forall p \in \mathbb{N}^* \ \ |R_p(x)| \leq |f_{p+1}(x)| = \frac{x^{p+1}}{p+1} \leq \frac{1}{p+1}$ indépendant de $x$ et $\xrightarrow[p \to +\infty]{} 0$
  Donc $(R_p)$ converge uniformément vers 0 sur $[0;1[$.
  Donc $\sum f_n$ converge uniformément sur $[0;1[$.

Par le théorème de la double limite :

$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \xrightarrow[x<1]{x \to 1} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

Mais :

$\forall x \in ]-1;1[ \ \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$

Donc :
$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} \xrightarrow[\substack{x\to 1\\ x<1}]{} \ln(2)$
Par unicité de la limite :
$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2)$
Finalement :

$$\boxed{\forall x \in ]-1;1] \;\; \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}} \quad (R=1)$$

qu'on peut également écrire :

$$\boxed{\forall x \in [-1;1[ \; \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)}$$

### 2.3.4 Exemple

arctan est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et :
$\forall x \in \mathbb{R} \;\; \arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$
Donc :
$\forall x \in ]-1;1[ \; \arctan'(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n} \;\; (R=1)$
D'où :

$$\forall x \in ]-1;1[ \; \arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (R=1)$$

La série $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ vérifie les hypothèses du théorème spécial sur la convergence des séries alternées :

- La série $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ est alternée.
- La suite $\displaystyle\left(\left|\frac{(-1)^n}{2n+1}\right|\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{2n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
- $\displaystyle\frac{(-1)^n}{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Donc la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ converge.
Donc, comme dans l'exemple précédent :
$\forall x \in [0;1] \;\; \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \arctan x$
Finalement, compte tenu de la parité, on a :

$$\forall x \in [-1;1] \;\; \arctan x = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \text{ formule de Gregory (1638-1675)}$$

En prenant $x=1$, ce que Gregory n'a jamais fait, on a :

$$\boxed{\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}}$$

formule proposée par Leibniz (1646-1716) en 1674, mais déjà connue par le mathématicien indien Madhava en 1410 et demeurée inconnue en Occident.
Cette formule est inutilisable en pratique pour calculer une valeur approchée de $\pi$ : la convergence est trop lente :
$4\left(1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}\cdots+\dfrac{1}{100001}\right)=\boxed{3,141}\,612\ldots$
Mais on dispose de la formule de John Machin (1680-1752) :
$\pi=4\left(4\arctan\left(\dfrac{1}{5}\right)-\arctan\left(\dfrac{1}{239}\right)\right)$
D'où :

$$\pi=4\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{4(-1)^n}{(2n+1)5^{2n+1}}-\frac{(-1)^n}{(2n+1)239^{2n+1}}\right)$$

Machin est, grâce à cette formule, le premier à calculer 100 décimales de $\pi$.

## 2.4 Dérivation terme à terme des séries entières

### 2.4.1 A propos du rayon de convergence

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{C}$.
Les séries entières $\displaystyle\sum_{n\geq 0}a_nz^n$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 1}na_nz^{n-1}=\sum_{n\geq 0}(n+1)a_{n+1}z^n$ ont le même rayon de convergence.

**Démonstration**

$$\begin{aligned}R_{CV}\left(\sum_{n\geq 0}(n+1)a_{n+1}z^n\right) &= R_{CV}\left(\sum_{n\geq 0}(n+1)a_{n+1}\frac{z^{n+1}}{n+1}\right)=R_{CV}\left(\sum_{n\geq 0}a_{n+1}z^{n+1}\right)\\ &= R_{CV}\left(\sum_{n\geq 1}a_nz^n\right)=R_{CV}\left(\sum_{n\geq 0}a_nz^n\right)\end{aligned}$$

### 2.4.2 Corollaire

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{C}$.
Pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, la série entière
$\displaystyle\sum_{n\geq k}n(n-1)\ldots(n-k+1)a_nz^{n-k}=\sum_{n\geq 0}(n+1)\ldots(n+k)a_{n+k}z^n=\sum_{n\geq 0}\frac{(n+k)!}{n!}a_{n+k}z^n$ a le même rayon de convergence que la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0}a_nz^n$.
(Il suffit de raisonner par récurrence sur $k$)

### 2.4.3 Le résultat du programme

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{C}$.
Les séries entières $\displaystyle\sum_{n\geq 0}a_nz^n$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 0}na_nz^n$ ont le même rayon de convergence.

### 2.4.4 Théorème

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

Soit $S \begin{cases} ]-R;R[\to \mathbb{C} \\ x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \end{cases}$.

$S$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R;R[$ et :

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N}^* \ \forall x \in ]-R;R[ \ S^{(k)}(x) &= \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n x^{n-k} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\dots(n+k)a_{n+k}x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+k)!}{n!} a_{n+k} x^n \end{aligned}$$

En d'autres termes, les dérivées de $S$ s'obtiennent en dérivant terme à terme.

**Démonstration**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n \begin{cases} ]-R;R[\to \mathbb{C} \\ x \mapsto a_n x^n \end{cases}$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(k)$ : $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathcal{C}^k$ et $S^{(k)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}$.

D'après le paragraphe sur la continuité, $\mathcal{P}(0)$ et vraie.

On suppose $\mathcal{P}(k)$ vraie.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n^{(k)}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $]-R;R[$.
- $\sum f_n^{(k)}$ CVS sur $]-R;R[$ : implicite dans l'hypothèse de récurrence.
- $\sum \left(f_n^{(k)}\right)' = \sum f_n^{(k+1)}$ CVU sur tout segment de $]-R;R[$.

  $\forall n \in \mathbb{N} \ \forall x \in ]-R;R[ \ f_n^{(k+1)}(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } k+1 > n \\ a_n n(n-1)\dots(n-k)x^{n-k-1} \text{ si } n \geq k \end{cases}$

  Donc $\sum f_n^{(k+1)}$ est une série entière de rayon de convergence $R$.

  Donc $\sum f_n^{(k+1)}$ CVN donc CVU sur tout segment de $]-R;R[$.

D'après le théorème de dérivation terme à terme des séries de fonctions, la fonction $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ ie $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$.

De plus :

$S^{(k+1)} = \left(S^{(k)}\right)' = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(f_n^{(k)}\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k+1)}$

et $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

### 2.4.5 Exemple

Soient $z \in \mathbb{C}$ et :

$$\mathrm{e}_z \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ t \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(tz)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n z^n}{n!} \end{cases}$$

La fonction $\mathrm{e}_z$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $\mathrm{e}_z' = z\,\mathrm{e}_z$.

**Démonstration**

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, la série $\sum \frac{(tz)^n}{n!}$ converge absolument.

Donc $R\left(\sum \frac{t^n z^n}{n!}\right) = +\infty$ (la variable est $t$).

Donc $\mathrm{e}_z$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et :

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R} \;\; \mathrm{e}_z'(t) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n \frac{z^n}{n!} t^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n t^{n-1}}{(n-1)!} = z \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(zt)^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= z\,\mathrm{e}_z(t) \end{aligned}$$

### 2.4.6 Expression des coefficients en fonction de la somme

Soit $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

Soit $S \begin{cases} ]-R;R[ \to \mathbb{C} \\ x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \end{cases}$.

On a :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N} \; a_k = \frac{1}{k!} S^{(k)}(0)}$$

**Démonstration**

$\forall k \in \mathbb{N} \; \forall x \in ]-R;R[ \; S^{(k)}(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+k)!}{n!} a_{n+k} x^n$

En particulier, si on prend $x = 0$ on en déduit :

$\forall k \in \mathbb{N} \; S^{(k)}(0) = \frac{(0+k)!}{0!} a_{0+k} = k! a_k$.

D'où le résultat.

**Corollaire**

Soit $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R_a > 0$.

Soit $\sum\limits_{n\geq 0} b_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R_b > 0$.

On suppose qu'il existe $r \in ]0; \min(R_a, R_b)]$ tel que :

$\forall x \in ]-r;r[ \; \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$

Alors :

$\forall n \in \mathbb{N} \; a_n = b_n$

En particulier, si il existe $\rho \in ]0; R_a]$ tel que :

$\forall x \in ]-\rho;\rho[ \; \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0$

alors :
$\forall n \in \mathbb{N}\ a_n = 0$

**Démonstration**

Soient $S_a \begin{cases} ]-R_a;R_a[\to \mathbb{C} \\ x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \end{cases}$ et $S_b \begin{cases} ]-R_b;R_b[\to \mathbb{C} \\ x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n \end{cases}$ .

On a, par hypothèse :
$\forall x \in ]-r;r[\ S_a(x) = S_b(x)$
Les fonctions $S_a$ et $S_b$ sont $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-r;r[$ donc :
$\forall x \in ]-r;r[\ \forall k \in \mathbb{N}\ S_a^{(k)}(x) = S_b^{(k)}(x)$
En particulier pour $x = 0$ on a :
$\forall k \in \mathbb{N}\ k!a_k = S_a^{(k)}(0) = S_b^{(k)}(0) = k!b_k$
D'où le résultat.

### 2.4.7 Exemple : Centrale 99

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n x^{3n} \text{ où } v_n = \frac{(n+2)!}{1\times 3\times 6\times\cdots\times(3n)}.$$

- Rayon de convergence $R$.
- Comportement pour $x = R$.
- Trouver une équation différentielle du premier ordre linéaire vérifiée par $f$. (Indication : calculer $\dfrac{v_n}{v_{n-1}}$)
- Calculer $f$.

**Correction**

$\forall n \in \mathbb{N}^*\ v_n = \dfrac{(n+2)!}{3^n n!} = \dfrac{(n+1)(n+2)}{3^n}$

- Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$.
  — $\forall n \in \mathbb{N}^*\ v_n r^{3n} > 0$
  — $\forall n \in \mathbb{N}^*\ \dfrac{v_{n+1}r^{3(n+1)}}{v_n r^{3n}} = \cdots = \dfrac{n+3}{3(n+1)}r^3 \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{r^3}{3}$
  Par la règle de d'Alembert :
  — Si $r < \sqrt[3]{3}$ alors la série de terme général $v_n r^{3n}$ converge.
  — Si $r > \sqrt[3]{3}$ alors la série de terme général $v_n r^{3n}$ diverge grossièrement.
  On en déduit $R = \sqrt[3]{3}$
- $\sum v_n R^{3n} = \sum (n+1)(n+2)$ est grossièrement divergente.
  Peut-être l'examinateur voulait-il le comportement de $f(x)$ : ce n'est pas clair mais l'expression de $f(x)$ permettra de conclure.

- $\forall n \geq 2 \ \dfrac{v_n}{v_{n-1}} = \dfrac{n+2}{3n}$

$$\begin{aligned} \forall x \in ]-R;R[ \ f'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} 3nv_n x^{3n-1} = \sum_{n=2}^{+\infty}(n+2)v_{n-1}x^{3n-1} + 3v_1x^2 \\ &= 6x^2 + \sum_{l=1}^{+\infty}(l+3)v_l x^{3l+2} = 6x^2 + x^3\sum_{l=1}^{+\infty} l v_l x^{3l-1} + 3x^2 \sum_{l=1}^{+\infty} v_l x^{3l} \\ &= 6x^2 + \frac{x^3}{3}f'(x) + 3x^2 f(x) \end{aligned}$$

$\forall x \in ]-R;R[ \ \left(1 - \dfrac{x^3}{3}\right) f'(x) - 3x^2 f(x) = 6x^2$

On travaille sur $]-\sqrt[3]{3};\sqrt[3]{3}[$ donc $1 - \dfrac{x^3}{3}$ ne s'annule pas.

ESSM : $y' = \dfrac{3x^2}{1 - x^3/3}y$

Solution générale : $y = \dfrac{C}{(1 - x^3/3)^3}$

Variation de la constante : $\dfrac{C'(x)}{(1 - x^3/3)^2} = 6x^2$

$C(x) = -2\left(1 - \dfrac{x^3}{3}\right)^3 + Cte$

D'où la solution générale : $y(x) = -2 + \dfrac{C}{(1 - x^3/3)^3}$

En particulier $g \begin{cases} ]-R;R[ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{2}{(1-x^3/3)^3} - 2 \end{cases}$ est solution sur $]-R;R[$ du problème de Cauchy

$\begin{cases} \left(1 - \dfrac{x^3}{3}\right) y' - 3x^2 y = 6x^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$ tout comme $f$.

Or les fonctions $x \mapsto 1 - \dfrac{x^3}{3}$, $x \mapsto -3x^2$ et $x \mapsto 6x^2$ sont continues, la première ne s'annulant pas sur $]-R;R[$ donc $f = g$ ie :

$$\forall x \in ]-\sqrt[3]{3};\sqrt[3]{3}[ \ \sum_{n=1}^{+\infty} v_n x^{3n} = 2\left(\frac{1}{(1-x^3/3)^3} - 1\right) = \frac{2x^3(27 - 9x^3 + x^6)}{(3 - x^3)^3}$$

**Remarque**

Il y a une méthode plus rapide pour calculer $f(x)$.

$\forall x \in ]-R;R[ \ f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)(n+2)\frac{x^{3n}}{3^n} = \sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)(n+2)\left(\frac{x^3}{3}\right)^n$.

On pose :

$$\forall x \in ]-1;1[\ S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)(n+2)x^n\ (R=1 \text{ par d'Alembert})$$

$$\begin{aligned}
S(x) &= \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n+2}\right)=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(\sum_{n=3}^{+\infty} x^{n}\right)\\
&= \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(\frac{x^3}{1-x}\right) \text{ lourd}\\
&= \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^{n}-1-x-x^2\right)=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(\frac{1}{1-x}-1-x-x^2\right)\\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{(1-x)^2}-1-2x\right)=\frac{2}{(1-x)^3}-2=2\left(\frac{1}{(1-x)^3}-1\right)
\end{aligned}$$

$$\forall x \in ]-\sqrt[3]{3};\sqrt[3]{3}[\ f(x)=2\left(\frac{1}{(1-x^3/3)^3}-1\right)$$

#### 2.4.8 Exemple : Mines 2009

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{2n}{n}x^n.$$

Déterminer $S_n=\displaystyle\sum_{p=0}^{n}\binom{2p}{p}\binom{2n-2p}{n-p}$.

**Correction**

On note $a_n=\binom{2n}{n}$.

Soit $r\in\mathbb{R}_+^*$.

$\forall n\in\mathbb{N}\ a_nr^n>0$

$\dfrac{a_{n+1}r^{n+1}}{a_nr^n}=\dfrac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!}\dfrac{n!n!}{(2n)!}r=\dfrac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+1)}r=2\dfrac{2n+1}{n+1}r\xrightarrow[n\to+\infty]{}4r$

On en déduit classiquement $R=\dfrac{1}{4}$.

$\forall x\in\left]-\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{4}\right[\ f(x)^2=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{n}\binom{2p}{p}\binom{2n-2p}{n-p}\right)x^n=\sum_{n=0}^{+\infty}S_nx^n$

mais que vaut $f(x)$ ?

Dans la recherche du rayon de convergence, on a obtenu :

$\forall n\in\mathbb{N}\ \dfrac{a_{n+1}}{a_n}=2\dfrac{2n+1}{n+1}$

ou encore :

$\forall n\in\mathbb{N}\ (n+1)a_{n+1}=2(2n+1)a_n$

$$\begin{aligned}
\forall x\in\left]-\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right[\ f'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1}=\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n\\
&= 2\sum_{n=0}^{+\infty}(2n+1)a_nx^n=4x\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1}+2\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n\\
&= 4xf'(x)+2f(x)
\end{aligned}$$

$f$ est solution de l'équation différentielle $(1-4x)y'=2y$ et $f(0)=1$.

La résolution est standard et :

$\forall x \in \left]-\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right[\ f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-4x}}$

$$\begin{aligned}\forall x \in \left]-\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right[\ \sum_{n=0}^{+\infty} S_n x^n &= f(x)^2 = \frac{1}{1-4x}\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} 4^n x^n\end{aligned}$$

Finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N}\ S_n = \sum_{p=0}^{n} \binom{2p}{p}\binom{2n-2p}{n-p} = 4^n$$

# 3 Fonctions développables en série entière

## 3.1 Définitions

Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que 0 ne soit pas une extrémité de $I$.
Soit $f : I \to \mathbb{C}$.

- Soit $r \in ]0;+\infty]$ tel que $]-r;r[ \subset I$.
  On dit que $f$ est développable en série entière sur $]-r;r[$ si et seulement si il existe une série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ de rayon de convergence $R \geq r$ telle que :
  $\forall x \in ]-r;r[\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

  **Exemples**

  — La fonction $f \begin{cases} ]-\infty;1[ \text{ ou } \mathbb{R}\setminus\{1\} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{1}{1-x} \end{cases}$ est développable en série entière sur $]-1;1[$ et on a :

  $$\forall x \in ]-1;1[\ f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \quad (R=1)$$

  Le programme mentionne également le développement de $\frac{1}{1-z}$ sur le disque ouvert :

  Pour tout nombre complexe $z$ de module strictement inférieur à 1, $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$.

  — La fonction exponentielle est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et on a :

  $$\forall x \in \mathbb{R}\ \mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (R=+\infty)$$

  **Démonstration**

  On fixe $z$ dans $\mathbb{C}$ et on considère de nouveau $\mathrm{e}_z \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ t \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n z^n}{n!} \end{cases}$.

  $\mathrm{e}_z$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et : $\mathrm{e}_z' = z\,\mathrm{e}_z$ ie $\mathrm{e}_z$ est solution de $y' = zy$.
  Donc :

$\exists C \in \mathbb{C}$ tq $\forall t \in \mathbb{R}$ $\mathrm{e}_z(t) = C \exp(zt) = C\,\mathrm{e}^{(zt)}$
où $\exp(a+ib) = \mathrm{e}^{a+ib}$ est défini par $\mathrm{e}^{(a+ib)} = \mathrm{e}^a(\cos b + i \sin b)$
$t = 0$ donne $C = 1$.
$\forall (z,t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n z^n}{n!} = \mathrm{e}^{zt}$
$t = 1$ donne :
$\forall z \in \mathbb{C}$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = \mathrm{e}^z$
Le programme mentionne explicitement ce résultat.
En particulier :
$\forall x \in \mathbb{R}$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \mathrm{e}^x$
En particulier :
$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = \mathrm{e}$
Supposons $\mathrm{e} \in \mathbb{Q}$.
Il existe $(p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tels que $\mathrm{e} = \dfrac{p}{q}$.
$\dfrac{p}{q} = 1 + 1 + \cdots + \dfrac{1}{q!} + \displaystyle\sum_{n=q+1}^{+\infty} \frac{1}{n!}$
On multiplie tout par $q!$.
$p(q-1)! - (q! + q! + \cdots + q + 1) = \displaystyle\sum_{n=q+1}^{+\infty} \frac{q!}{n!}$
$p(q-1)! - (q! + q! + \cdots + q + 1) \in \mathbb{Z}$ mais :

$$\begin{aligned} 0 < \sum_{n=q+1}^{+\infty} \frac{q!}{n!} &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{q!}{(q+k+1)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(q+1)\dots(q+k+1)} \\ &< \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(q+1)^{k+1}} = \frac{1}{q+1} \frac{1}{1 - \frac{1}{q+1}} \\ &< \frac{1}{q} \leq 1 \end{aligned}$$

Donc $\displaystyle\sum_{n=q+1}^{+\infty} \frac{q!}{n!} \in \mathbb{Z} \cap ]0;1[$.
On aboutit à une contradiction.
Donc $\mathrm{e} \notin \mathbb{Q}$.

- On dit que $f$ est développable en série entière si et seulement si il existe $r \in ]0;+\infty]$ tel que :
$\begin{cases} - \; ]-r;r[ \subset I \\ - \; f \text{ est développable en série entière sur } ]-r;r[ \end{cases}$
- Développer en série entière $f$, c'est déterminer (si c'est possible) $r \in ]0;+\infty]$ et $\displaystyle\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ série entière de rayon de convergence $R \geq r$ tels que :

$$\begin{cases} - \ ]-r;r[ \subset I \\ - \ \forall x \in ]-r;r[ \ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \end{cases}$$

Il résulte immédiatement de 2.4.4 que si $f$ est développable en série entière sur $]-r;r[$ alors :

- $f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-r;r[$.
- $\forall n \in \mathbb{N} \ a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$

**Définition**

Soient $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que 0 ne soit pas une extrémité de $I$ et $f : I \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$.

On appelle série de Taylor (en 0) de $f$ la série entière $\displaystyle\sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

On a donc :

$f$ est développable en série entière $\Longleftrightarrow$ la série de Taylor de $f$ est convergente de somme $f$ sur un intervalle $]-r;r[ \subset I$ avec $r \in ]0;+\infty]$

## 3.2 Remarques

Soient $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que 0 ne soit pas une extrémité de $I$ et $f : I \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Il peut se passer beaucoup de choses :

- La série de Taylor de $f$ peut avoir un rayon de convergence nul. Dans ce cas $f$ n'est pas développable en série entière.
  On cherche $F \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telle que ;

$$\forall n \in \mathbb{N} \ F^{(n)}(0) = (-1)^n \, (n!)^2 \tag{1}$$

1. Définition d'une fonction développable en 0, d'une série de Taylor en 0.
2. Une fonction $F$ vérifiant (1) est-elle développable en série entière en 0 ?
3. Tracer les 7 premières sommes partielles de la série de Taylor de $F$ entre 0 et $\dfrac{1}{2}$.
4. Pourquoi ne peut-on pas résoudre directement ce problème : $\begin{cases} x^2 y' + (x+1) y = 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ ?
   Le transformer en problème de Cauchy approchant sur $\left[10^{-3}; \dfrac{1}{2}\right]$.
   Tracer les solutions et comparer les tracés avec ceux de la question 3).
5. Résoudre le problème de 4) sur $\mathbb{R}_+^*$.
6. 4 autres questions

**Correction**

1. $f$ est développable en série entière en 0 si, et seulement si, il existe $r > 0$ et une série entière $\displaystyle\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ de rayon de convergence $R \geq r$ telle que :
   $\forall x \in ]-r;r[ \ f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$
   Soient $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que 0 ne soit pas une extrémité de $I$ et $f : I \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$.

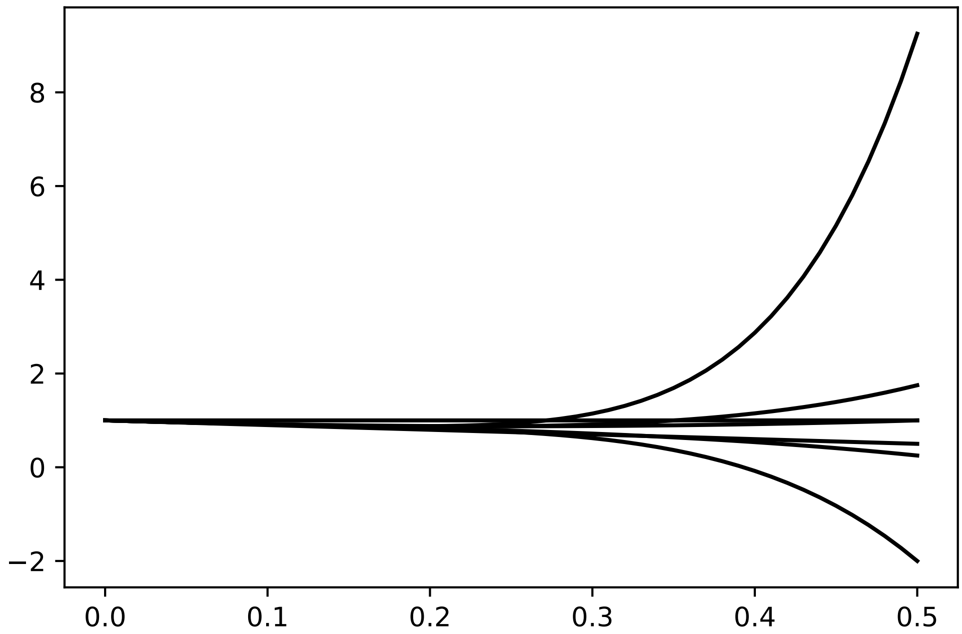
On appelle série de Taylor (en 0) de $f$ la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$.

On a donc :
$f$ est développable en série entière $\iff$ la série de Taylor de $f$ est convergente de somme $f$ sur un intervalle $]-r;r[\subset I$ avec $r\in]0;+\infty]$

2. La réponse est non.
   En effet la série de Taylor de $f$ est $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ avec $a_n = (-1)^n n!$.
   $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = n+1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc le rayon de convergence de la série de Taylor de $F$ est nul.
3. 
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from math import factorial

les_x=np.arange(0,0.51,0.01)
def F(N,x):
    return(sum(factorial(n)*((-1)*x)**n for n in range(N+1)))

for N in range(7):
    les_y=[F(N,x) for x in les_x]
    plt.plot(les_x,les_y,color='black')
plt.show()
```




Plus $N$ est grand, plus la valeur en $\frac{1}{2}$ est grande en valeur absolue.

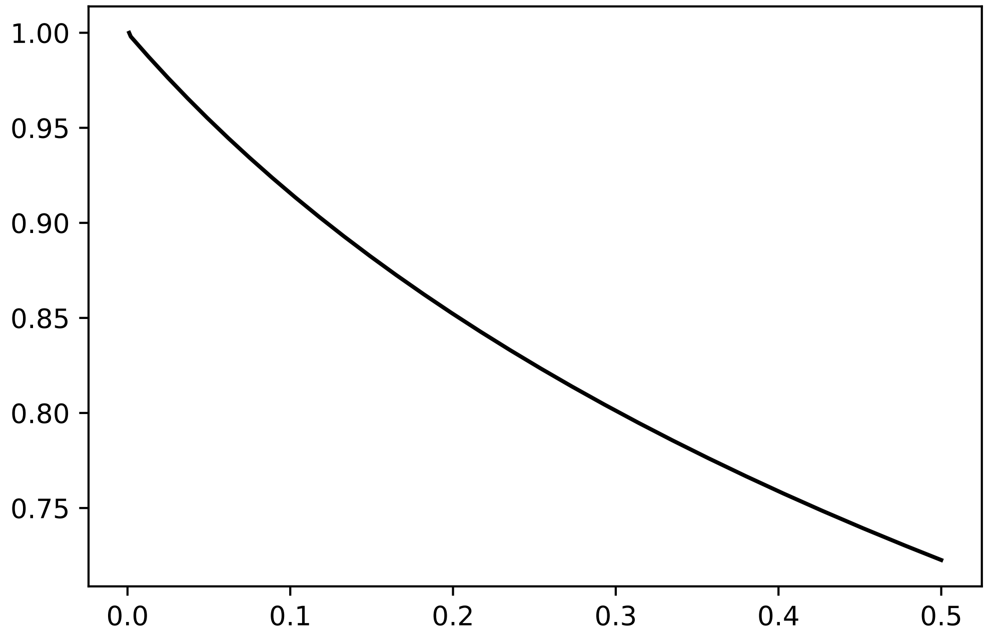
4. Le théorème Cauchy linéaire ne s'applique pas car le coefficient de $y'$ est nul en 0. A priori, on ne peut rien dire sur l'existence ou l'unicité d'une solution.

Sur $\mathbb{R}_+^*$, l'équation différentielle s'écrit : $y' = -\dfrac{x+1}{x^2}y + \dfrac{1}{x^2}$.
Je propose de prendre comme condition initiale : $y(0,001) = y(0) = 1$.

```
import scipy.integrate as integr

def f(y,x):
    return ((-1)*(x+1)*y+1)/x**2

X=np.arange(0.001,0.501,0.001)
Y=integr.odeint(f,1,X)
plt.plot(X,Y,color='black')
plt.show()
```




Le tracé est très différent de ceux de la question précédente, ce qui peut paraître surprenant.
En fait le tracé de la question 3, suppose que la formule de Taylor-Young approche $F$ jusque $\dfrac{1}{2}$ alors que Taylor-Young dit seulement qu'on approche $F$ sur un intervalle de la forme $[0;\delta]$ avec $\delta > 0$ mais sans donner d'ordre de grandeur pour $\delta$.

5. On commence par résoudre l'équation sans second membre :
$\displaystyle\int -\frac{x+1}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\ln(x) + \frac{1}{x}$
Donc la solution générale de l'équation sans second membre est : $y = C\dfrac{\mathrm{e}^{1/x}}{x}$.
On cherche ensuite une solution particulière avec la variation de la constante :
$C'(x)\dfrac{\mathrm{e}^{1/x}}{x} = \dfrac{1}{x^2}$
$C(x) = \displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^{-1/x}}{x}\,\mathrm{d}x$

D'où la solution générale :
$y(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{1/x}}{x}\displaystyle\int_{0,001}^{x} \dfrac{\mathrm{e}^{-1/t}}{t}\,\mathrm{d}t + C\dfrac{\mathrm{e}^{1/x}}{x}$
et on prend $C = 0,001\,\mathrm{e}^{-1000}$ pour avoir la solution du problème de Cauchy approchant de la question 4).
On remarque que $C$ est très proche de 0.

Dans la suite de l'exercice, on s'intéresse naturellement à la fonction $G \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{1/x}}{x}\displaystyle\int_0^x \dfrac{\mathrm{e}^{-1/t}}{t}\,\mathrm{d}t \end{cases}$.

La fonction $g \begin{cases} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-1/x}}{x} \text{ si } x > 0 \\ 0 \mapsto 0 \end{cases}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ donc $G$ est bien définie sur $\mathbb{R}_+$.
$G$ est clairement de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\begin{aligned} & \forall x > 0\ x^2G'(x) + (x+1)G(x) \\ = \ & x^2\frac{\mathrm{e}^{1/x}}{x}\frac{\mathrm{e}^{-1/x}}{x} + x^2\frac{-1/x\,\mathrm{e}^{1/x} - \mathrm{e}^{1/x}}{x^2}\int_0^x \frac{\mathrm{e}^{-1/t}}{t}\,\mathrm{d}t + \frac{x+1}{x}\,\mathrm{e}^{1/x}\int_0^x \frac{\mathrm{e}^{-1/t}}{t}\,\mathrm{d}t \\ = \ & 1 \end{aligned}$$

Donc $G$ est solution de (1) sur $\mathbb{R}_+^*$.
Il faut maintenant préciser le comportement de $G$ en 0, ce qui revient à déterminer un équivalent de $\displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{e}^{-1/t}}{t}\,\mathrm{d}t$.
Comme souvent, on fait une intégration par parties :
$u(t) = t$, $u'(t) = 1$
$v'(t) = \dfrac{\mathrm{e}^{-1/t}}{t^2}$ $v(t) = \mathrm{e}^{-1/t}$
$u$ et $v$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0; x]$ et $u(t)v(t) \xrightarrow[t\to 0^+]{} 0$
Donc :
$\forall x > 0\ G(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{1/x}}{x}\left(x\,\mathrm{e}^{-1/x} - \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-1/t}\,\mathrm{d}t\right) = 1 - \dfrac{\mathrm{e}^{1/x}}{x}\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-1/t}\,\mathrm{d}t$
$0 \le \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-1/t}\,\mathrm{d}t \le x\,\mathrm{e}^{-1/x}$
Donc $G(x) = 1 + O(1)$.
Il faut être plus précis donc on va devoir procéder à des intégrations par parties successives.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n)$ : $G(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k! x^k + (-1)^{n+1}(n+1)!\frac{\mathrm{e}^{1/x}}{x}\int_0^x t^n\,\mathrm{e}^{-1/t}\,\mathrm{d}t$.
On vient de montrer que $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie.

$$\begin{aligned} \int_0^x t^n\,\mathrm{e}^{-1/t}\,\mathrm{d}t &= \int_0^x t^{n+2}\frac{\mathrm{e}^{-1/t}}{t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= x^{n+2}\,\mathrm{e}^{-1/x} - (n+2)\int_0^x t^{n+1}\,\mathrm{e}^{-1/t}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

On en déduit facilement que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
$\forall x > 0\ \forall n \in \mathbb{N}\ 0 \le \displaystyle\int_0^x t^{n+1}\,\mathrm{e}^{-1/t}\,\mathrm{d}t \le \int_0^x x^{n+1}\,\mathrm{e}^{-1/x}\,\mathrm{d}t = x^{n+2}\,\mathrm{e}^{-1/x}$

On en déduit :
$\forall n \in \mathbb{N}\ G(x) = \sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k k! x^k + O(x^{n+1}) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k k! x^k + O(x^{n+1}) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k k! x^k + o(x^n)$
$G$ a des développements limités de tous en ordre en 0 mais cela ne permet pas d'affirmer que $G$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
On peut quand même dire que $G$ se prolonge par continuité en 0 avec $G(0) = 1$ et que $G$ est alors dérivable avec $G'(0) = -1$.
$G$ est une solution de (1) : $0^2 G'(0) + (0+1)G(0) = 1$.
C'est la seule. En effet, si $H$ en est une autre, $G - H$ est solution de l'équation homogène associée et $G - H$ est nulle en 0.
La résolution de l'ESSM a déjà été faite :
$\exists C \in \mathbb{R}$ tq $\forall x > 0\ G(x) - H(x) = C\dfrac{\mathrm{e}^{1/x}}{x}$
En faisant tendre $x$ vers 0, on obtient $C = 0$. $G$ et $H$ coïncident sur $\mathbb{R}_+^*$.
Comme elles sont continues sur $\mathbb{R}_+$, elles sont égales.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n)$ : $G^{(n)}$ possède un développement limité à tout ordre.
On vient de montrer que $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
On suppose $\mathcal{P}(k)$ vraie pour tout $k$ compris entre 0 et $n$ avec $n \in \mathbb{N}$.
$\forall x > 0\ G'(x) = -x^{-2}G(x) - x^{-1}G(x) - x^{-2}$
On dérive $n$ fois :

$$\begin{aligned}
\forall x > 0\ G^{(n+1)}(x) &= -\sum_{k=0}^{n}\binom{n-1}{k}(-2)(-3)\ldots(-2-k+1)x^{-2-k}G^{(n-k)}(x) \\
&\quad -\sum_{k=0}^{n}\binom{n-1}{k}(-1)(-2)\ldots(-1-k+1)x^{-2-k}G^{(n-k)}(x) \\
&\quad -(-2)\ldots(-2-(n-1))x^{-2-n}
\end{aligned}$$

et en multipliant par $x^{n+1}$ :

$$\begin{aligned}
\forall x > 0\ x^{n+2}G^{(n+1)}(x) &= -\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(k+1)!x^{n-k}G^{(n-k)}(x) \\
&\quad -\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k! x^{n-k}G^{(n-k)}(x) - (-1)^n(n+1)!
\end{aligned}$$

Pour tout $k$ compris entre 0 et $n$, $n-k$ est compris entre 0 et $n$ et $G^{(n-k)}$ possède un développement limité à tout ordre.
On en déduit que $x^{n+2}G^{(n+1)}(x)$ a un développement limité à tout ordre.
Mais au vu des hypothèses de récurrence, $G^{(n)}$ a une limite en 0 donc $\int_0^1 G^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$ converge. On en déduit que le terme de plus bas degré du développement de $x^{n+2}G^{(n+1)}(x)$ est de degré supérieur ou égal à $n+2$ et $G^{(n+1)}$ a bien un développement limité à tout ordre.
On en déduit que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie puis que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n$.
Il en résulte alors que toutes les dérivées de $G$ ont une limite finie en 0.
Par conséquent, $G$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
Par Taylor-Young et unicité du DL, on a bien :
$\forall n \in \mathbb{N}\ G^{(n)}(0) = (-1)^n\,(n!)^2$

- Si la série de Taylor de $f$ a un rayon de convergence $R > 0$, il est possible que pour tout $x \in (I \setminus \{0\}) \cap ]-R; R[$, $f(x) \neq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

**Exemple**

Soit $f \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \mathrm{e}^{-1/x^2} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \mapsto 0 \end{cases}$.

$f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et :
$\forall n \in \mathbb{N}\ f^{(n)}(0) = 0$
Le rayon de convergence de la série de Taylor de $f$ est $+\infty$ mais :
$\forall x \in \mathbb{R}^*\ f(x) \neq 0 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$

**Démonstration**

Les théorèmes généraux assurent que $f$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$.
Un examen des premières dérivées suggère l'hypothèse de récurrence :
$\mathcal{P}(n) : \exists P_n \in \mathbb{R}[X]$ tq $\forall x \in \mathbb{R}^*\ f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) \mathrm{e}^{-1/x^2}$.
$\mathcal{P}(0)$ est vraie avec $P_0 = 1$.
On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie.

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}^*\ f^{(n+1)}(x) &= -\frac{1}{x^2} P_n'\left(\frac{1}{x}\right) \mathrm{e}^{-1/x^2} + P_n\left(\frac{1}{x}\right) \frac{2}{x^3} \mathrm{e}^{-1/x^2} \\ &= \left(-\frac{1}{x^2} P_n'\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{2}{x^3} P_n\left(\frac{1}{x}\right)\right) \mathrm{e}^{-1/x^2} \\ &= P_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right) \mathrm{e}^{-1/x^2} \end{aligned}$$

avec $P_{n+1}(X) = 2X^3 P_n(X) - X^2 P_n'(X)$
Donc :
$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists P_n \in \mathbb{R}[X]$ tq $\forall x \in \mathbb{R}^*\ f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) \mathrm{e}^{-1/x^2}$.

Il est notoire que :
$\forall \alpha \in \mathbb{R}\ t^\alpha \mathrm{e}^{-t} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$
$\forall k \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{R}^*\ \left|\frac{1}{x^k} \mathrm{e}^{-1/x^2}\right| = \frac{1}{|x|^k} \mathrm{e}^{-1/x^2} = \left(\frac{1}{x^2}\right)^{k/2} \mathrm{e}^{-1/x^2}$
$\frac{1}{x^2} \xrightarrow[\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}]{} +\infty$ donc :
$\forall k \in \mathbb{N}\ \frac{1}{x^k} \mathrm{e}^{-1/x^2} \xrightarrow[\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}]{} 0$
Donc :
$\forall P \in \mathbb{R}[X]\ P\left(\frac{1}{x}\right) \mathrm{e}^{-1/x^2} \xrightarrow[\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}]{} 0$
Donc :
$\forall n \in \mathbb{N}\ f^{(n)}(x) \xrightarrow[\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}]{} 0$

$f(x) = \mathrm{e}^{-1/x^2} \xrightarrow[\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}]{} 0$

Donc $f$ est continue sur $\mathbb{R}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $\mathcal{P}(n)$ : $f$ est $n$ fois dérivable en 0 et $f^{(n)}(0) = 0$.
$\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{1}{x} \,\mathrm{e}^{-1/x^2} \xrightarrow[\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}]{} 0$
Donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie.
$\dfrac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x - 0} = \dfrac{1}{x} P_n\left(\dfrac{1}{x}\right) \mathrm{e}^{-1/x^2} \xrightarrow[\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}]{} 0$
Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Donc $f$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ ie $f$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ avec :
$\forall n \in \mathbb{N}\ f^{(n)}(0) = 0$

- Si la série de Taylor de $f$ a un rayon de convergence $R > 0$, il est possible qu'on ait $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ pour tout $x \in I \cap ]-r; r[$ avec $0 < r < R$ mais pas pour tout $x \in I \cap ]-R; R[$.

## 3.3 Utilisation des formules de Taylor

### 3.3.1 Formule de Taylor-Young

La formule de Taylor-Young ne peut pas servir à montrer qu'une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ est développable en série entière.

### 3.3.2 Inégalité de Taylor-Lagrange

Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que 0 ne soit pas une extrémité de $I$.
Soit $f : I \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$.
On calcule pour tout $n \in \mathbb{N}$ $f^{(n)}(0)$.
On a :
$$\forall x \in I\ \forall p \in \mathbb{N}\ \left| f(x) - \sum_{n=0}^{p} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \right| \leq \frac{|x|^{p+1}}{(p+1)!} \sup_{\theta \in [0;1]} \left| f^{(p+1)}(\theta x) \right|$$
On en déduit :
Si il existe $r \in ]0; +\infty]$ tel que :
$$\begin{cases} -\ ]-r; r[ \subset I \\ -\ \forall x \in ]-r; r[\ \dfrac{|x|^{p+1}}{(p+1)!} \displaystyle\sup_{\theta \in [0;1]} \left| f^{(p+1)}(\theta x) \right| \xrightarrow[p \to +\infty]{} 0 \end{cases}$$
alors $f$ est développable en série entière (sur $]-r; r[$).

**Exemple**
Soit $z \in \mathbb{C}$.
Soit $f \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ t \mapsto \mathrm{e}^{tz} \end{cases}$.
D'après le cours de SUP, $f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et :
$\forall t \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}\ f^{(n)}(t) = z^n \mathrm{e}^{tz}$
En particulier :

$\forall n \in \mathbb{N}\ f^{(n)}(0) = z^n$

$$\begin{aligned}
\forall t \in \mathbb{R}\ \forall p \in \mathbb{N}\ \left| f(t) - \sum_{n=0}^{p} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} t^n \right| &\leq \frac{|t|^{p+1}}{(p+1)!} \sup_{\theta \in [0;1]} \left| z^{p+1}\, \mathrm{e}^{\theta t z} \right| \\
&\leq \left( \frac{|t|^{p+1}}{(p+1)!} |z|^{p+1} \xrightarrow[p \to +\infty]{} 0(\text{à } t \text{ fixé}) \right). \\
&\quad \left( \sup_{\theta \in [0;1]} \mathrm{e}^{\theta t \Re e(z)} \text{ indep de } p \right)
\end{aligned}$$

Donc :

$\forall t \in \mathbb{R}\ \displaystyle\sum_{n=0}^{p} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} t^n \xrightarrow[p \to +\infty]{} f(t)$

Donc $f$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et :

$\forall t \in \mathbb{R}\ \mathrm{e}^{tz} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n z^n}{n!} \quad$ (avec évidemment $R = +\infty$)

On a en particulier :

$\forall z \in \mathbb{C}\ \mathrm{e}^{z} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$

$\forall t \in \mathbb{R}\ \mathrm{e}^{t} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} \quad (R = +\infty)$

En particulier : $\mathrm{e} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$

On peut déterminer de la même manière le développement en série entière des fonctions cosinus, sinus, cosinus hyperbolique ou sinus hyperbolique.
Les calculs sont laissés aux lecteurs en exercice.

**Exemple :**
**Centrale 99**

Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que :

$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in ]-2;2[\ \left| f^{(n)}(x) \right| \leq \dfrac{n!}{2^n}$

Montrer que $f$ est développable en série entière sur $]-2;2[$.

**Correction**

$\forall x \in ]-2;2[\ \forall p \in \mathbb{N}\ \left| f(x) - \displaystyle\sum_{n=0}^{p} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \right| \leq \dfrac{|x|^{p+1}}{(p+1)!} \displaystyle\sup_{\theta \in [0;1]} \left| f^{(p+1)}(\theta x) \right|$

$\theta x \in ]-2;2[$ donc $\left| f^{(p+1)}(\theta x) \right| \leq \dfrac{(p+1)!}{2^{p+1}}$ et :

$\forall x \in ]-2;2[\ \forall p \in \mathbb{N}\ \left| f(x) - \displaystyle\sum_{n=0}^{p} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \right| \leq \dfrac{|x|^{p+1}}{(p+1)!} \dfrac{(p+1)!}{2^{p+1}} = \left( \dfrac{|x|}{2} \right)^{p+1} \xrightarrow[p \to +\infty]{} 0$ (à $x$ fixé).

D'où :

$\forall x \in ]-2;2[\ \displaystyle\sum_{n=0}^{p} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \xrightarrow[p \to +\infty]{} f(x)$.

Donc :

$\forall x \in ]-2;2[\ f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ (la série converge bien sûr).

Donc $f$ est développable en série entière sur $]-2;2[$ et $R \geq 2$.

### 3.3.3 Formule de Taylor avec reste intégral

Cette formule n'est pas exigible dans le programme de première année.
Elle figure explicitement au programme en seconde année dans le chapitre sur les séries entières.
Cette formule s'énonce ainsi :
Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.
Soit $a$ et $b$ deux éléments de $I$.
$f(b) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$
Cette formule se démontre par récurrence sur $n$.
La propriété est vraie au rang $n = 0$ :
On suppose ici $f$ de classe $\mathcal{C}^1$.
$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t = f(a) + \int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t = f(t)$ car $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$.
On suppose la propriété vraie au rang $n$.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.
La propriété est vraie au rang $n$ donc :

$$\begin{aligned}
f(b) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \left[\frac{-(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)\right]_a^b - \int_a^b \frac{-(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

et la formule est vraie au rang $n+1$.

**Remarque**
L'inégalité de Taylor-Lagrange se déduit de la formule de Taylor avec reste intégral :
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.
Dans le cas $a \le b$ :

$$\begin{aligned}
\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k \right| &= \left| \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t \right| \\
&\le \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} \left| f^{(n+1)}(t) \right| \mathrm{d}t \quad b - t \ge 0 \\
&\le \sup_{y \in [a;b]} \left| f^{(n+1)}(y) \right| \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!}\,\mathrm{d}t \\
&\le \sup_{y \in [a;b]} \left| f^{(n+1)}(y) \right| \left[ \frac{-(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} \right]_a^b \\
&\le \sup_{y \in [a;b]} \left| f^{(n+1)}(y) \right| \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{y \in [\min(a,b);\max(a,b)]} \left| f^{(n+1)} y) \right|
\end{aligned}$$

Dans le cas $a > b$ :

$$\begin{aligned}
\left|f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(b-a)^n\right| &= \left|\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t\right| = \left|\int_b^a \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t\right| \\
&\leq \int_b^a \frac{(t-b)^n}{n!}\left|f^{(n+1)}(t)\right|\,\mathrm{d}t \quad b-t \leq 0 \\
&\leq \sup_{y\in[b;a]}\left|f^{(p+1)}(y)\right| \int_b^a \frac{(t-b)^n}{n!}\,\mathrm{d}t \\
&\leq \sup_{y\in[b;a]}\left|f^{(p+1)}(y)\right| \left[\frac{(t-b)^{n+1}}{(n+1)!}\right]_b^a \\
&\leq \sup_{y\in[b;a]}\left|f^{(p+1)}(y)\right| \frac{(a-b)^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{y\in[\min(a,b);\max(a,b)]}\left|f^{(n+1)}(y)\right|
\end{aligned}$$

Si on revient au développement en série entière, on a la méthode suivante :
Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que 0 ne soit pas une extrémité de $I$.
Soit $f : I \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$.
On calcule pour tout $n \in \mathbb{N}$ $f^{(n)}(0)$.
On a :
$\forall x \in I\ \forall p \in \mathbb{N}\ f(x) - \sum_{n=0}^{p} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \int_0^x \frac{(x-t)^p}{p!} f^{(p+1)}(t)\,\mathrm{d}t$

$f$ est développable en série entière $\Leftrightarrow \exists r \in ]0;+\infty]$ tq $\begin{cases} -\ ]-r;r[\subset I \\ -\ \forall x \in ]-r;r[\ \displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^p}{p!} f^{(p+1)}(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0 \end{cases}$

### 3.3.4 Exemple : Mines 2003

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}, (x \in ]-1;1[)$$

1. Définition de la somme.
2. Montrer que $f$ est continue.
3. Montrer que $f$ est $\mathcal{C}^\infty$.
4. Montrer que $f$ est développable en série entière (et montrer que $R_{CV} = 1$).
5. Montrer que : $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{-t^x}{1+t}\,\mathrm{d}t$

**Correction**
Il s'agit d'un exercice classique dont il existe de nombreuses versions. Je n'en ai gardé qu'une.

1. Soit $x \in ]-1;1[$ fixé.
   - $\forall n \in \mathbb{N}^*\ x+n \geq n-1 \geq 0$
     Donc $\sum \frac{(-1)^n}{x+n}$ est alternée.
   - $\left(\left|\frac{(-1)^n}{x+n}\right|\right)_{n\geq 1} = \left(\frac{1}{n+x}\right)_{n\geq 1}$ est décroissante.
   - $\frac{(-1)^n}{x+n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

D'après le TSCSA, $\sum \dfrac{(-1)^n}{x+n}$ converge.

Donc, si on note pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n \begin{cases} ]-1;1[ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{(-1)^n}{n+x} \end{cases}$ alors $\sum f_n$ CVS sur $]-1;1[$.

$f$ est bien définie sur $]-1;1[$.

2. - Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n$ est continue sur $]-1;1[$.
   - $\sum f_n$ CVU sur tout segment de $]-1;1[$.

     Comme $\sum f_n$ CVS sur $]-1;1[$, on peut définir $R_p = \displaystyle\sum_{n=p+1}^{+\infty} f_n$.

     Soit $[a;b]$ $(-1 < a < b < 1)$ un segment de $]-1;1[$.

$$\begin{array}{rcl} \forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in [a;b]\ \ |R_n(x)| & \leq & |f_{n+1}(x)| \ \text{ d'après le TSCSA cf 1)} \\ & \leq & \dfrac{1}{n+1+x} \leq \dfrac{1}{n+1+a} \\ & & \text{indépendant de } x \text{ et } \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \end{array}$$

     Donc $(R_p)$ CVU vers 0 sur $[a;b]$.
     Donc $(R_p)$ CVU vers 0 sur tout segment de $]-1;1[$.
     Donc $\sum f_n$ CVU sur tout segment de $]-1;1[$.
     Donc $f$ est continue sur $]-1;1[$.

3. On calcule d'abord $f_n^{(p)}$.
   $\forall p \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in ]-1;1[\ f_n^{(p)}(x) = (-1)^n \dfrac{(-1)^p p!}{(x+n)^{p+1}}$
   Pour tout $p \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(p)$ :
   $f$ est $\mathcal{C}^p$ sur $]-1;1[$ et :
   $\forall x \in ]-1;1[\ f^{(p)}(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n+p} p!}{(x+n)^{p+1}}$
   $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

   On suppose $\mathcal{P}(p)$ vraie.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $g_n \begin{cases} ]-1;1[ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{(-1)^{n+p} p!}{(x+n)^{p+1}} \end{cases}$.
   - Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $g_n$ est $\mathcal{C}^1$ sur $]-1;1[$.
   - $\sum g_n$ CVS sur $]-1;1[$ (implicite dans $\mathcal{P}(p)$)
   - $\sum g_n'$ CVU sur tout segment de $]-1;1[$.
     Soit $[a;b]$ $(-1 < a < b < 1)$ un tel segment.
     $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in [a;b]\ \ |g_n'(x)| = \dfrac{(p+1)!}{(x+n)^{p+2}} \leq \dfrac{(p+1)!}{(a+n)^{p+2}}$ indépendant de $x$ et terme général d'une série convergente.
     Donc $\sum g_n'$ CVN sur tout segment de $]-1;1[$.
     Donc $\sum g_n'$ CVU sur tout segment de $]-1;1[$.

   Donc $f^{(p)}$ est $\mathcal{C}^1$ ie $f$ est $\mathcal{C}^{p+1}$ et :
   $f^{(p+1)} = \left(f^{(p)}\right)' = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} g_n'$ et $\mathcal{P}(p+1)$ est vraie.

Donc $f$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1;1[$ et

$$\forall p \in \mathbb{N}\ \forall x \in ]-1;1[\ f^{(p)}(x) = (-1)^p p! \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+x)^{p+1}}$$

4. $\forall p \in \mathbb{N}\ \forall x \in ]-1;1[\ f(x) - \displaystyle\sum_{n=0}^{p} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \int_0^x \frac{(x-t)^p}{p!} f^{(p+1)}(t)\,\mathrm{d}t$

Le cas $x = 0$ est clair.

Supposons $x \in ]0;1[$.

$\forall p \in \mathbb{N}\ \left| f(x) - \displaystyle\sum_{n=0}^{p} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \right| \leq \int_0^x \frac{(x-t)^p}{p!} \left| f^{(p+1)}(t) \right| \mathrm{d}t = \int_0^x \frac{(x-t)^p}{p!} \left| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+p+1}(p+1)!}{(t+n)^{p+2}} \right| \mathrm{d}t$

Donc :

$\forall p \in \mathbb{N}\ \left| f(x) - \displaystyle\sum_{n=0}^{p} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \right| \leq \int_0^x (p+1)(x-t)^p \left| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(t+n)^{p+2}} \right| \mathrm{d}t$

Pour tout $t \in [0;1[$, la série $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{(t+n)^{p+2}}$ vérifie les hypothèses du TSCSA (facile à vérifier) donc :

$\forall p \in \mathbb{N}\ \left| f(x) - \displaystyle\sum_{n=0}^{p} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \right| \leq \int_0^x (p+1)(x-t)^p \frac{1}{(t+1)^{p+2}}\,\mathrm{d}t$

Comme $x > 0$, $t > 0$ donc :

$\forall p \in \mathbb{N}\ \left| f(x) - \displaystyle\sum_{n=0}^{p} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \right| \leq \int_0^x (p+1)(x-t)^p\,\mathrm{d}t = \left[ -(x-t)^{p+1} \right]_0^x = x^{p+1} \xrightarrow[p \to +\infty]{} 0.$

Supposons $x \in ]-1;0[$.

$\forall p \in \mathbb{N}\ \left| f(x) - \displaystyle\sum_{n=0}^{p} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \right| \leq \int_x^0 \frac{(t-x)^p}{p!} \left| f^{(p+1)}(t) \right| \mathrm{d}t = \int_0^x \frac{(t-x)^p}{p!} \left| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+p+1}(p+1)!}{(t+n)^{p+2}} \right| \mathrm{d}t$

Donc :

Donc :

$\forall p \in \mathbb{N}\ \left| f(x) - \displaystyle\sum_{n=0}^{p} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \right| \leq \int_x^0 (p+1)(t-x)^p \left| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(t+n)^{p+2}} \right| \mathrm{d}t$

Pour tout $t \in ]-1;0]$, la série $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{(t+n)^{p+2}}$ vérifie les hypothèses du TSCSA (facile à vérifier) donc :

$$\begin{aligned} \forall p \in \mathbb{N}\ \left| f(x) - \sum_{n=0}^{p} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \right| &\leq \int_x^0 (p+1)(t-x)^p \frac{1}{(t+1)^{p+2}}\,\mathrm{d}t \\ &\leq \frac{1}{(1+x)^2} \int_x^0 (p+1) \left( \frac{t-x}{1+t} \right)^p \mathrm{d}t \end{aligned}$$

$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left( \dfrac{t-x}{1+t} \right) = \dfrac{x+1}{(1+t)^2} > 0$ donc :

$\forall p \in \mathbb{N}\ \left| f(x) - \displaystyle\sum_{n=0}^{p} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \right| \leq \frac{1}{(1+x)^2} \int_x^0 (p+1) \left( \frac{0-x}{1+0} \right)^p \mathrm{d}t = \frac{(p+1)\,|x|^{p+1}}{(1+x)^2} \xrightarrow[p \to +\infty]{} 0$

On a donc montré que $f$ est DSE sur $]-1;1[$ et que $R \geq 1$.

Si $R$ était strictement supérieur à 1, $f$ aurait une limite finie en -1 mais :

$$\forall x \in ]-1;1[\ f(x) = -\frac{1}{1+x} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n} = -\frac{1}{1+x} - f(x+1)$$

et on arrive à une absurdité en utilisant la continuité de $f$ en 0.

5. On fixe $x \in ]-1;1[$.
$\forall t \in ]0;1[\ \dfrac{t^x}{1+t} = t^x \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n t^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n t^{n+x}$
A première vue, aucun des deux théorèmes du cours ne s'applique.
Soit $N \in \mathbb{N}$.
$\forall t \in ]0;1]\ \sum_{n=0}^{N}(-1)^n t^{n+x} = t^x \sum_{n=0}^{N}(-1)^n t^n = t^x\ \dfrac{1-(-t)^{N+1}}{1+t}$
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x+n > -1$ donc $t \mapsto t^{n+x}$ est intégrable sur $]0;1]$.
D'où :
$$\sum_{n=0}^{N}(-1)^n \int_0^1 t^{n+x}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \left(\frac{t^x}{1+t} + (-1)^N \frac{t^{N+1+x}}{1+t}\right)\mathrm{d}t$$
Donc :
$$\sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n}{n+1+x} = \int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\,\mathrm{d}t + (-1)^N \int_0^1 \frac{t^{N+1+x}}{1+t}\,\mathrm{d}t \text{ (pas de problème)}$$
Or :
$$0 \le \int_0^1 \frac{t^{N+1+x}}{1+t}\,\mathrm{d}t \le \int_0^1 t^{N+1+x}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{N+2+x} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$$
Donc :
$$\int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1+x} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n+x}$$
Finalement :
$$\forall x \in ]-1;1[\ f(x) = -\int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

## 3.4 Combinaisons linéaires de développements connus

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}\ \cos x &= \frac{\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{-ix}}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{i^n x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-i)^n x^n}{n!}\right) \text{ ( cf la fonction } e_z) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} i^n\left(1+(-1)^n\right)\frac{x^n}{n!} = \frac{1}{2}\sum_{p=0}^{+\infty} i^{2p}.2.\frac{x^{2p}}{(2p)!} \\ &= \sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p\frac{x^{2p}}{(2p)!}\end{aligned}$$

On raisonne de même pour sin.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}\ \cos x = \sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!}} \quad (R = +\infty)$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}\ \sin x = \sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}} \quad (R = +\infty)$$

On démontre de même :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}\ \cosh x = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p}}{(2p)!}} \quad (R = +\infty)$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}\ \sinh x = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}} \quad (R = +\infty)$$

### 3.5 Intégration et dérivation de développements connus

- **Intégration**

  Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que 0 ne soit pas une extrémité de $I$.
  Soit $f : I \to \mathbb{C}$ dérivable sur $I$.
  On suppose que $f'$ est développable en série entière ie : il existe $r \in ]0; +\infty]$ tel que $]-r; r[ \subset I$ et $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R \geq r$ tels que :
  $\forall x \in ]-r; r[\ f'(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$
  Alors :
  $\forall x \in ]-r; r[\ f(x) = f(0) + \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$
  et $f$ est développable en série entière sur $]-r; r[$.

  **Exemples**

  — Soit $f \begin{cases} ]-1; +\infty[ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln(1+x) \end{cases}$.
  $f$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1; +\infty[$.
  $\forall x \in ]-1; 1[\ f'(x) = \dfrac{1}{1+x} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n \quad (R = 1)$
  D'où :
  $\forall x \in ]-1; 1[\ \ln(1+x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{x^{n+1}}{n+1} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{x^n}{n} \quad (R = 1)$
  On sait que la série $\sum\limits_{n\geq 1} (-1)^n \dfrac{1^n}{n}$ converge donc aussi la série $\sum\limits_{n\geq 1} (-1)^{n-1} \dfrac{1^n}{n}$.
  Il est alors tentant de prendre $x = 1$ dans la formule précédente et d'écrire :
  $\ln 2 = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \dots$
  C'est légitime mais il faut le justifier rigoureusement.
  Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n \begin{cases} [0; 1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{(-1)^{n-1} x^n}{n} \end{cases}$.
  — Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n$ est continue sur $[0; 1]$.
  — La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur $[0; 1]$.
  Par propriété des séries entières, on sait que la série de nombres $\sum f_n(x)$ converge pour tout $x \in [0; 1[$ et comme remarqué ci-dessus, elle converge pour $x = 1$.
  La série de fonctions $\sum f_n$ est donc simplement convergente sur $[0; 1]$, ce qui

permet de définir la suite de ses restes.
Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur $[0;1]$ revient à montrer que la suite de fonctions $(R_n)$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $[0;1]$.
Pour $x$ positif fixé, la série de terme général $f_n(x)$ est alternée.
A $x \in [0;1]$ fixé, la suite $(|R_n(x)|)_{n\in\mathbb{N}^*} = \left(\frac{x^n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et converge vers 0. On en déduit :
$\forall n \in \mathbb{N}^* \ \forall x \in [0;1] \ \ |R_n(x)| = \left|\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}\right| \leq \frac{x^n}{n} \leq \frac{1}{n}$ indépendant de $x$ et $\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
Donc la suite de fonctions $(R_n)$ converge uniformément vers 0 sur $[0;1]$.

La fonction $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n \begin{cases} [0;1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} \end{cases}$ est donc continue sur $[0;1]$ et :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} &= \lim_{\substack{x\to1\\x<1}} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}\right) = \lim_{\substack{x\to1\\x<1}} (\ln(1+x)) \\ &= \ln(2) \end{aligned}$$

Finalement :

$$\boxed{\forall x \in ]-1;1] \ \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}} \quad (R=1)$$

qu'on peut également écrire :

$$\boxed{\forall x \in [-1;1[ \ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)}$$

— arctan est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et :
$\forall x \in \mathbb{R} \ \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$
Donc :
$\forall x \in ]-1;1[ \ \arctan'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n} \ (R=1)$
D'où :

$$\forall x \in ]-1;1[ \ \arctan x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (R=1)$$

La série $\sum_{n\geq0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ vérifie les hypothèses du théorème spécial sur la convergence des séries alternées :
— La série $\sum_{n\geq0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ est alternée.
— La suite $\left(\left|\frac{(-1)^n}{2n+1}\right|\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{2n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
— $\frac{(-1)^n}{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Donc la série $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ ie $\sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{1^{2n+1}}{2n+1}$ converge.
Comme pour la fonction précédente, on peut justifier :
$\forall x \in [0;1]\ \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \arctan x$
Finalement, compte tenu de la parité, on a :

$$\forall x \in [-1;1]\ \arctan x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \text{ formule de Gregory (1638-1675)}$$

- **Dérivation**
  Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que 0 ne soit pas une extrémité de $I$.
  Soit $f : I \to \mathbb{C}$ continue.
  On suppose que $f$ possède une primitive $F$ développable en série entière :
  il existe $r \in ]0;+\infty]$ tel que $]-r;r[ \subset I$ et $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R \geq r$ tels que :
  $\forall x \in ]-r;r[\ F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$
  Alors :
  $\forall x \in ]-r;r[\ f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$
  et $f$ est développable en série entière sur $]-r;r[$.

**Exemple**

Soit $f \begin{cases} ]-1;1[ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{1}{(1-x)^2} \end{cases}$.

$f$ est la dérivée de $F \begin{cases} ]-1;1[ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{1}{1-x} \end{cases}$.

$\forall x \in ]-1;1[\ F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \ (R=1)$
Donc :
$\forall x \in ]-1;1[\ f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) x^n \ (R=1)$

Plus généralement, on a :

$$\begin{aligned}\forall p\geq 2\ \forall x\in]-1;1[\ \frac{1}{(1-x)^p} &= \frac{F^{(p-1)}(x)}{(p-1)!}\\ &= \sum_{n=p-1}^{+\infty}\frac{n(n-1)\dots(n-p+2)}{(p-1)!}x^{n-p+1}\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(n+1)\dots(n+p-1)}{(p-1)!}x^n\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}C_{n+p-1}^{p-1}x^n \quad (R=1)\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\binom{n+p-1}{p-1}x^n \quad (R=1)\end{aligned}$$

### 3.6 Produit de développements connus

$$\begin{aligned}\forall x\in]-1;1[\ \frac{1}{(1-x)^2} &= \frac{1}{1-x}.\frac{1}{1-x}\\ &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty}x^n\right).\left(\sum_{n=0}^{+\infty}x^n\right) \text{ avec } R_{CV}=1 \text{ pour les 2 séries}\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{p+q=n}1.1\right)x^n\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\text{Card}\left(\left\{(p,q)\in\mathbb{N}^2 \text{ tq } p+q=n\right\}\right)x^n\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n \text{ et } R\geq 1\end{aligned}$$

On a $R=1$ car la série diverge pour $x=1$ vu que $(n+1)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0.
L'avantage de cette technique (dans le cadre du programme) est qu'elle s'applique au cas où $z\in\mathbb{C}$ avec $|z|<1$. On a donc :
$\forall z\in D(0;1)\ \dfrac{1}{(1-z)^2}=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)z^n\ (R=1)$
On a en fait :
$\forall p\geq 2\ \forall z\in D(0;1)\ \dfrac{1}{(1-z)^p}=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}C_{n+p-1}^{p-1}z^n \quad (R=1)$

Pour le démontrer (dans la cadre du programme) on utilise le produit pour prouver que $\begin{cases}D(0;1)\to\mathbb{C}\\ z\mapsto \dfrac{1}{(1-z)^p}\end{cases}$ est développable en série entière sur $D(0;1)$ et on utilise 3.3.3 et 3.4.5 pour calculer les coefficients.

### 3.7 Utilisation d'une équation différentielle

Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que 0 ne soit pas une extrémité de $I$.
Soit $f : I \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$.
On suppose qu'on a trouvé un problème de Cauchy en 0 : $(\mathcal{P})$ dont $f$ est solution sur $I$.
On suppose avoir déterminé une série entière $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$ dont la somme est solution sur $]-R;R[$ de $(\mathcal{P})$.
Si $(\mathcal{P})$ possède une et une seule solution sur $I\cap]-R;R[$ alors :
$\forall x \in I\cap]-R;R[\ f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

**Remarque**
Il est écrit dans le programme :
Les étudiants doivent savoir développer une fonction en série entière à l'aide d'une équation différentielle linéaire.
L'unicité de la solution d'un problème de Cauchy adapté sera explicitement admise.

Je ne vois pas ce que cela signifie au juste.
Il a été vu en Sup le résultat suivant :
Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in I$.
Soient $a, b, c$ trois fonctions de $I$ dans $\mathbb{K}$ continues.
On suppose que $a$ ne s'annule pas sur $I$.
Alors pour $y_0 \in \mathbb{K}$, le problème de Cauchy $\begin{cases} a(x)y' + b(x)y + c(x) = 0 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ possède une et une seule solution définie sur $I$.

Il a également été vu en Sup :
Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in I$.
Soient $a, b, c$ trois nombres et $d$ une fonction de $I$ dans $\mathbb{K}$ continue.
Alors pour $(y_0, y_0') \in \mathbb{K}^2$, le problème de Cauchy $\begin{cases} ay'' + by' + cy + d(x) = 0 \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_0' \end{cases}$ possède une et une seule solution définie sur $I$.

Le résultat suivant, hors-programme, semble être celui qui est évoqué par le programme :
Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in I$ (en pratique on aura $x_0 = 0$).
Soient $a, b, c, d$ quatre fonctions de $I$ dans $\mathbb{K}$ continues.
On suppose que $a$ ne s'annule pas sur $I$.
Alors pour $(y_0, y_0') \in \mathbb{K}^2$, le problème de Cauchy $\begin{cases} a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y + d(x) = 0 \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_0' \end{cases}$ possède une et une seule solution définie sur $I$.

**Exemple**

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}\ \forall x \in ]-1;1[\ (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n \quad (R = 1)$$

**Démonstration**

Soit $f \begin{cases} ]-1;+\infty[ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto (1+x)^\alpha \end{cases}$.

Si $\alpha \in \mathbb{Z}_-^*$, $f$ est définie sur $]-\infty;-1[$ mais on ne peut pas espérer dépasser $-1$.

Si $\alpha \in \mathbb{N}$, $f$ est une fonction polynômiale qu'on développe par la formule du binôme. Dans ce cas, $f$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

$f$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1;+\infty[$ et :

$\forall x \in ]-1;+\infty[\ f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$

Donc :

$\forall x \in ]-1;+\infty[\ (1+x)f'(x) = \alpha(1+x)^\alpha = \alpha f(x)$

De plus $f(0) = 1$.

$f$ est solution sur $]-1;+\infty[$ du problème de Cauchy :

$(\mathcal{P}) \begin{cases} (1+x)y' - \alpha y = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

Il a été vu en Sup que $(\mathcal{P})$ a une et une seule solution sur tout intervalle ne contenant pas $-1$.

Soit alors $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et $S$ sa somme.

$$\begin{aligned} \forall x \in ]-R;R[\ S(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\ S'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& S \text{ solution de } (\mathcal{P}) \text{ sur } ]-R;R[ \\
\iff & \begin{cases} a_0 = 1 \\ \forall x \in ]-R;R[\ (1+x)\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0 \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} a_0 = 1 \\ \forall x \in ]-R;R[\ \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{\substack{n=1 \\ n=0}}^{+\infty} n a_n x^n - \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0 \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} a_0 = 1 \\ \forall x \in ]-R;R[\ \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left((n+1)a_{n+1} + (n-\alpha)a_n\right) x^n = 0 \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} a_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}\ a_{n+1} = \dfrac{\alpha - n}{n+1} a_n \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} a_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*\ a_n = \dfrac{(\alpha-n+1)(\alpha-n+2)\dots\alpha}{n(n-1)\dots 1} a_0 \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} a_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*\ a_n = \dfrac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} \end{cases}
\end{aligned}$$

On détermine ensuite le rayon de convergence de $1+\sum_{n\geq 1}\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$.

Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$.

- $\forall n \in \mathbb{N}^* \left|\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}\right| r^n > 0$
- $\dfrac{\left|\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(n+1)+1)}{(n+1)!}\right| r^{n+1}}{\left|\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}\right| r^n} = \dfrac{|\alpha-n|}{n+1}r = \dfrac{n-\alpha \text{ pour } n >> 1}{n+1} r \xrightarrow[n\to+\infty]{} r.$

On en déduit classiquement $R = 1$.

Donc $S \begin{cases} ]-1;1[ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n \end{cases}$ est solution sur $]-1;1[$ de $(\mathcal{P})$.

Donc $f_{|]-1;1[} = S$ ie :

$\forall x \in ]-1;1[ \ (1+x)^\alpha = 1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$

**Remarques**

- La formule est en fait valable pour $\alpha \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ mais c'est alors une écriture compliquée de la formule du binôme.
  En effet, si $\alpha \in \mathbb{N}$, on a :
  $\forall n > \alpha \ \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} = 0$
  et
  $\forall n \in [\![0;\alpha]\!] \ \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} = \binom{\alpha}{n}$
- Supposons $\alpha = -\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}^* \ \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} &= \frac{(-1/2)(-3/2)\dots(-(2n-1)/2)}{n!} = (-1)^n\frac{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}{2^n n!} \\ &= (-1)^n\frac{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times\cdots\times 2n} = (-1)^n\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \\ &= (-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} = (-1)^n\frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} \text{ égal 1 pour } n=0\end{aligned}$$

$\forall x \in ]-1;1[ \ \frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(2n)!}{(2^n n!)^2}x^n \quad (R=1)$

On en déduit par exemple :

$\forall x \in ]-1;1[ \ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}x^{2n} \quad (R=1)$

et :

$\forall x \in ]-1;1[ \ \arcsin x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (R=1)$

$\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\frac{1}{2n+1} \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\frac{1}{n^{3/2}}$.

On peut montrer qu'il y a convergence normale sur $[-1;1]$ et obtenir :
$\dfrac{\pi}{2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{1}{2n+1}$

# 4 Quelques exemples d'utilisation des séries entières

- **Mines 2019**

$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k u_{n-k} \end{cases}$

On donne la série entière $\sum u_n x^n$.
Calcul de $u_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**Correction**
La suite existe et est unique.
— **Analyse**

Formellement, on pose $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$.

$S(x)^2 = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{k=0}^{n} u_k u_{n-k} \right) x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1} x^n$

$xS(x)^2 = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n = S(x) - u_0 = S(x) - 1$

$xS(x)^2 - S(x) + 1 = 0$

$\Delta = 1 - 4x$

$S(x) = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}$

— **Synthèse**

Soit $f \begin{cases} ]-1/4;1/4[ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \mapsto 1 \end{cases}$

$$\begin{aligned}
\forall t \in ]-1;1[ \ \sqrt{1+t} &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1/2)(-1/2)\dots(1/2-n+1)}{n!} t^n \quad R = 1 \\
&= 1 + \frac{t}{2} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(1/2)(1/2)\dots(2n-3)/2}{n!} (-1)^{n-1} t^n \\
&= 1 + \frac{t}{2} + \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n-3)}{2^n n!} t^n \\
&= 1 + \frac{t}{2} + \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n-2)!}{2^{2n-1} n!(n-1)!} t^n \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n-2)!}{2^{2n-1} n!(n-1)!} t^n
\end{aligned}$$

$\forall x \in \left]-\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right[\ \sqrt{1-4x} = 1+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2n-2)!}{2^{2n-1}n!(n-1)!}(-1)^n4^nx^n = 1-2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!}x^n$
$(R=1/4)$
$\forall x \in \left]-\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right[\ 1-\sqrt{1-4x} = 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!}x^n\ (R=1/4)$
$\forall x \in \left]-\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right[\setminus\{0\}\ f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!}x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n)!}{n!(n+1)!}x^n\ (R=1/4)$
La dernière formule est valable pour $x=0$ donc :
$\forall x \in \left]-\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right[\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n)!}{n!(n+1)!}x^n(R=1/4)$
On note $a_n = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$.
$\forall x \in \left]-\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right[\setminus\{0\}\ xf(x)^2 - f(x) + 1 = 0$ : on a trouvé $f(x)$ en résolvant cette équation.
D'où, par continuité ($f$ est DSE donc continue) :
$\forall x \in \left]-\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right[\ xf(x)^2 - f(x) + 1 = 0$

$$\begin{aligned}
&\forall x \in \left]-\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right[\ x\left(\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n\right)+1-\left(1+\sum_{n=1}^{+\infty}a_nx^n\right)=0\\
&x\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}a_ka_{n-k}\right)x^n-\sum_{n=1}^{+\infty}a_nx^n=0\\
&x\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}a_ka_{n-k}\right)x^n-x\sum_{n=1}^{+\infty}a_nx^{n-1}=0\\
&x\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}a_ka_{n-k}\right)x^n-\sum_{n=0}^{+\infty}a_{n+1}x^n\right)=0
\end{aligned}$$

Donc :
$\forall x \in \left]-\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right[\setminus\{0\}\ \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}a_ka_{n-k}\right)x^n-\sum_{n=0}^{+\infty}a_{n+1}x^n=0$, valable aussi en $x=0$ par continuité.
Donc :
$\forall n \in \mathbb{N}\ a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n}a_ka_{n-k}$.
Comme de plus $a_0 = 1$, on a par une récurrence triviale :
$\forall n \in \mathbb{N}\ u_n = a_n$
Finalement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ u_n = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}}$$

- **Mines 2013**
  Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $a_n$ le cardinal de l'ensemble des couples $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ tels que $n = 3p+2q$.
  Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$.
  Montrer que le rayon de convergence de $f$ est strictement positif.

Donner une expression simple de $f$.

**Correction**
Si $n = 2q + 3p$ avec $p, q \geq 0$ alors $p \leq 3p = n - 2q \leq n$.
Donc $0 \leq a_n \leq n + 1$.
Donc $R \geq R_{CV}\left(\sum (n+1) z^n\right) = 1$.

Soit $g \begin{cases} ]-1;1[ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^{3n} = \frac{1}{1-x^3} \end{cases}$

$\forall x \in ]-1;1[ \ g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n x^n$ avec $\alpha_{3p} = 1$ et $\alpha_{3p+1} = \alpha_{3p+2} = 0$

Soit $h \begin{cases} ]-1;1[ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2} \end{cases}$

$\forall x \in ]-1;1[ \ h(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n x^n$ avec $\beta_{2p} = 1$ et $\beta_{2p+1} = 0$

$\forall x \in ]-1;1[ \ g(x)h(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n x^n \times \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \gamma_n x^n$

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N} \ \gamma_n &= \sum_{k+l=n} \alpha_k \beta_l \\
&= \sum_{3p+l=n} \alpha_{3p} \beta_l \text{ car } \alpha_k = 0 \text{ si } k \text{ n'est pas un multiple de } 3 \\
&= \sum_{3p+2q=n} \alpha_{3p} \beta_{2q} \text{ car } \beta_l = 0 \text{ si } l \text{ n'est pas un multiple de } 2 \\
&= \sum_{3p+2q=n} 1 = a_n
\end{aligned}$$

Donc :
$\forall x \in ]-1;1[ \ f(x) = \dfrac{1}{1-x^2} \dfrac{1}{1-x^3}$
$f(x) \xrightarrow[x \to 1]{} +\infty$ donc $R \leq 1$ puis $R = 1$.
La décomposition en éléments simples n'étant pas au programme, on ne peut pas aller plus loin.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(1-X^2)(1-X^3)} &= \frac{1}{(1-X)^2(1+X)(j-X)(j^2-X)} \\
&= \frac{a}{1-X} + \frac{b}{(1-X)^2} + \frac{c}{1+X} + \frac{d}{j-X} + \frac{e}{j^2-X}
\end{aligned}$$

On multiplie par $j^2 - X$ et on évalue en $j^2$ :

$$\begin{aligned}
e &= \frac{1}{(1-j)^2(1+j)(j-j^2)} = \frac{-j^3(1-j)^3}{=} \frac{-1}{1-3j+3j^2-1} = \frac{-1}{3(-i\sqrt{3})} \\
&= \frac{-i}{3\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

On en déduit $d = \dfrac{i}{3\sqrt{3}}$
On multiplie par $X+1$ et on évalue en $-1$ :
$c = \dfrac{1}{4(1-1+1)} = \dfrac{1}{4}$ $((j-X)(j^2-X) = X^2+X+1)$
On multiplie par $(X-1)^2$ et on évalue en $1$ :
$b = \dfrac{1}{6}$
On multiplie par $X$ et on fait tendre $X$ vers $+\infty$ :
$-a+c-(d+e) = 0$ donc $a = \dfrac{1}{4}$

$$\begin{aligned}
& \forall x \in ]-1;1[ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\
= \quad & \frac{1}{4(1-x)} + \frac{1}{6(1-x)^2} + \frac{1}{4(1+x)} + \frac{i\sqrt{3}}{9}\left(\frac{1}{j-x} - \frac{1}{j^2-x}\right) \\
= \quad & \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty} x^n + \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n + \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n + \frac{i\sqrt{3}}{9}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{j^{n+1}} - \frac{1}{j^{2(n+1)}}\right)x^n \\
= \quad & \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty} x^n + \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n + \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n + \frac{i\sqrt{3}}{9}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\mathrm{e}^{-i(n+1)2\pi/3} - \mathrm{e}^{i(n+1)2\pi/3}\right)x^n
\end{aligned}$$

On en déduit :
$\forall n \in \mathbb{N}\ a_n = \dfrac{n+1}{6} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{(-1)^n}{4} - \dfrac{2\sqrt{3}}{9}\sin\left(\dfrac{2(n+1)\pi}{3}\right)$

- **X**
  Soit $H_{n,k}$ le nombre de permutations d'un ensemble à $n$ éléments ayant $k$ points fixes.
  On pose $h_k = H_{k,0}$.
  Prouver : $H_{n,k} = \dbinom{n}{k} h_{n-k}$.
  Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}h_k$.
  On considère la série entière $D(z) = \displaystyle\sum_{k\geq 0}\frac{h_k z^k}{k!}$.
  Minorer la rayon de convergence $R$ de cette série entière.
  Calculer $D(z)$ pour $|z| < R$ (Indication : considérer $\mathrm{e}^z D(z)$).
  En déduire que $h_k$ est la partie entière de $\dfrac{k!}{\mathrm{e}} + \dfrac{1}{2}$.

  **Correction**
  Soit $E$ un ensemble ayant $n$ éléments.
  Pour fabriquer une permutation de $E$ ayant exactement $k$ points fixes on choisit ces $k$ points : $\dbinom{n}{k}$ choix possibles, puis on choisit une permutation sans point fixe des $n-k$ éléments restant de $E$.
  D'où :
  $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall k \in \{0;\ldots;n\}\ \ H_{n,k} = \dbinom{n}{k} H_{n-k,0} = \dbinom{n}{k} h_{n-k}$

$\forall n \in \mathbb{N}\ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h_k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} h_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} H_{n,k} = n!$
$\forall k \in \mathbb{N}\ h_k = H_{k,0} \leq k!$
Donc $R \geq R_{CV}\left(\sum_{k\geq 0} z^k\right) = 1.$

$$\begin{aligned}
\forall z \in \mathbb{C} \text{ tq } |z| < R\ \mathrm{e}^z D(z) &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{h_n z^n}{n!}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} . \frac{h_{n-k}}{(n-k)!}\right) z^n \qquad \left(R_{CV}\left(\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}\right) = +\infty\right) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h_{n-k}\right) z^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}
\end{aligned}$$

Si on avait $R > 1$, on aboutirait à une contradiction donc $R = 1$ et :
$\forall z \in \mathbb{C} \text{ tq } |z| < 1\ D(z) = \frac{\mathrm{e}^{-z}}{1-z}$
$\forall z \in \mathbb{C} \text{ tq } |z| < 1\ D(z) = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k z^k}{k!}\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{+\infty} z^k\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{l=0}^{k} \frac{(-1)^l}{l!}\right) z^k$
D'où :
$\forall k \in \mathbb{N}\ h_k = \sum_{l=0}^{k} \frac{(-1)^l k!}{l!} = k! \sum_{l=0}^{k} \frac{(-1)^l}{l!}$
$\forall k \in \mathbb{N}\ \frac{k!}{\mathrm{e}} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + k! \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(-1)^l}{l!} = \sum_{l=0}^{k} \frac{(-1)^l k!}{l!} + \frac{1}{2} + k! \sum_{l=k+1}^{+\infty} \frac{(-1)^l}{l!}$
Soit $k \geq 2$.
On a :
— La série $\sum_{l\geq 0} \frac{(-1)^l}{l!}$ est alternée.
— La suite $\left(\left|\frac{(-1)^l}{l!}\right|\right)_{l\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{l!}\right)_{l\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
— $\frac{(-1)^l}{l!} \xrightarrow[l\to+\infty]{} 0$
Donc, d'après le théorème des séries alternées :
$k! \left|\sum_{l=k+1}^{+\infty} \frac{(-1)^l}{l!}\right| \leq \frac{k!}{(k+1)!} = \frac{1}{k+1} < \frac{1}{2}$
Donc :
$\frac{1}{2} + k! \sum_{l=k+1}^{+\infty} \frac{(-1)^l}{l!} \in ]0; 1[$
De plus :
$\forall l \in \{0; \ldots; k\}\ \frac{k!}{l!} \in \mathbb{N}$
Donc :

$\displaystyle\sum_{l=0}^{k} \frac{(-1)^l k!}{l!} \in \mathbb{Z}$
D'où :
$E\left(\dfrac{k!}{\mathrm{e}} + \dfrac{1}{2}\right) = \displaystyle\sum_{l=0}^{k} \frac{(-1)^l k!}{l!} = h_k$
De plus, en revenant à la définition $h_1 = 0$ et $h_0 = 1$.
$E\left(\dfrac{0!}{\mathrm{e}} + \dfrac{1}{2}\right) = 0$ et $E\left(\dfrac{1!}{\mathrm{e}} + \dfrac{1}{2}\right) = 0$ donc :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \; h_k = E\left(\frac{k!}{\mathrm{e}} + \frac{1}{2}\right)$$

**Variante : Mines 2019**
On note $N(n,p)$ le nombre de permutations de $[\![1;n]\!]$ ayant exactement $p$ points fixes.
On note $D(n) = N(n,0)$ (le nombre de dérangements de $[\![1;n]\!]$) et $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{D(n)}{n!} x^n$.

1. Relation entre $N(n,p)$ et $D(n-p)$.
2. Montrer que $f$ est définie sur $]-1;1[$ et calculer $f(x)$.
3. Calculer $D(n)$.
4. Calculer $N(n,p)$.

# 5 Exercices d'application directe du cours

**Exercice 1** *(Mines 2011)*

Déterminer le rayon de convergence de la série entière de terme général $\dfrac{x^n}{n^n}$.

**Exercice 2** *(Mines 2011)*

Déterminer le rayon de convergence de la série entière de terme général $\dfrac{\sinh n}{n} x^n$.

**Exercice 3** *(Centrale 2019)*

1. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée.
   Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ est supérieur ou égal à 1.
2. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs telle que la série $\sum a_n$ converge.
   Montrer que $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.