ANALYSE 1
2026-2026
Correction
Correction des exercices du quatrième chapitre du cours

941

Exercice 1 *(Mines 2011)*

Déterminer le rayon de convergence de la série entière de terme général $\dfrac{x^n}{n^n}$.

Correction
Soit $r > 0$.
$\forall n \in \mathbb{N}^* \ u_n = \dfrac{r^n}{n^n} > 0$.
$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = r\dfrac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \dfrac{r}{n}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{-n}$
$\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{-n} = \exp\left(-n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right)$
$-n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \sim -n\dfrac{1}{n} = -1$ donc $-n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1$.
Donc $\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{-n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}^{-1}$ et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 < 1$.
D'après la règle de d'Alembert la série de terme général $\dfrac{r^n}{n^n}$ converge, pour tout $r > 0$.
Le rayon de convergence de la série entière de terme général $\dfrac{x^n}{n^n}$ est donc infini.

Exercice 2 *(Mines 2011)*

Déterminer le rayon de convergence de la série entière de terme général $\dfrac{\sinh n}{n}x^n$.

Correction
Soit $r > 0$.
$\forall n \in \mathbb{N}^* \ u_n = \dfrac{\sinh n}{n}r^n > 0$.
$\sinh n = \dfrac{\mathrm{e}^n + \mathrm{e}^{-n}}{2} \sim \dfrac{\mathrm{e}^n}{2}$
Donc $u_n \sim \dfrac{\mathrm{e}^n r^n}{2}$.
On en déduit $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \sim \mathrm{e}r$.
Si $r < \mathrm{e}^{-1}$ alors $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}r < 1$ et la série de terme général u_n converge.

Si $r > \mathrm{e}^{-1}$ alors $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}r > 1$ et la série de terme général u_n diverge.
Finalement le rayon de convergence de la série entière de terme général $\dfrac{\sinh n}{n}x^n$ est e^{-1}.

Exercice 3 *(Centrale 2019)*

1. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée.
   Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ est supérieur ou égal à 1.
2. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs telle que la série $\sum a_n$ converge.
   Montrer que $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Correction

1. On appelle rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ la borne supérieure dans $\overline{\mathbb{R}}$ de $\{\rho \in \mathbb{R}_+ \text{ tq la suite } (a_n\rho^n) \text{ est bornée}\}$.
   Ici, on suppose que 1 appartient à $\{\rho \in \mathbb{R}_+ \text{ tq la suite } (a_n\rho^n) \text{ est bornée}\}$.
   Donc le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ est supérieur ou égal à 1.
2. $\sum a_n$ converge donc $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
   On en déduit que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ est supérieur ou égal à 1.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n \begin{cases} [0;1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto a_n x^n \end{cases}$.
   - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[0;1]$.
   - La série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément sur $[0;1]$:
     $\forall n \in \mathbb{N}\ \displaystyle\sup_{x\in[0;1]} (|f_n(x)|) = \sup_{x\in[0;1]} (a_n x^n) = a_n$: on utilise $a_n \geq 0$
     Donc la série de terme général $\displaystyle\sup_{x\in[0;1]} (|f_n(x)|)$ converge.
     Donc la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 0} f_n$ converge normalement sur $[0;1]$.
     Donc la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément sur $[0;1]$

   On en déduit que $f = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur $[0;1]$ et :

   $$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = f(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$