ANALYSE 1

TD

2025-2026

Chapitre 4

Séries entières : calculs et applications

941

1 Rayon de convergence d'une série entière

Exercice 1 *(Mines 2012)*

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière de terme général $\dfrac{(3n)!}{(n!)^3}x^n$.
2. Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(3n)!}{(n!)^3}x^n$.
   Etudier $f(x)$ quand x tend vers R^-.

Exercice 2 *(Mines 2012)*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $a_n = \ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{2n}\right)$.
Soit $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$.
Domaine de définition de S.

2 Propriétés des sommes des séries entières

Exercice 3 *(Mines 2011)*

Résoudre $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (3n+1)^2\, x^n = 0$ pour $x \in]-1;1[$.

Exercice 4 *(Centrale 2010, cet exercice est mentionné dans le rapport du concours)*

Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{x}{\mathrm{e}^x - 1}$ se prolonge en une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5 *(Mines 2012)*

$f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{2n-1}x^n.$

1. Rayon de convergence, domaine de définition.
2. Exprimer f à l'aide des fonctions usuelles.

Exercice 6 *(CCP 98)*

Calcul de la somme de la série entière $\sum_{k \geq 0} \frac{r_k x^k}{k!}$ où r_k est le reste de la division euclidienne de k par 3.

Exercice 7 *(Centrale 2017)*

Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f et montrer que f y est $\mathcal{C}^2$.
2. Déterminer une équation différentielle linéaire non homogène du second ordre vérifiée par f.
3. Résoudre l'équation différentielle homogène.
4. ? ? ?
   Remarque
   Il s'agit vraisemblablement d'exprimer $f(x)$ à l'aide des fonctions usuelles.

Exercice 8 *(Centrale 2023)*

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $a_0 = a_1 = 1$ et $a_{n+2} = a_{n+1} + \frac{2}{n+2} a_n$.

1. Montrer :
   $\forall n \in \mathbb{N}^* \ 1 \leq a_n \leq n^2$
   et en déduire le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
2. Exprimer la somme de cette série entière à l'aide des fonctions usuelles.
3. Montrer :
   $\forall x \in]-1;1[\ S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2} x^n \, \mathrm{e}^{-2x}$

Exercice 9 *(Centrale 2002)*

Rayon de convergence et somme de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ avec $a_0 = a_1 = 1$ et $a_{n+1} = a_n + \frac{2}{n+1} a_{n-1}$.

3 Fonctions développables en séries entières

Exercice 10 *(Mines 2006)*

Développer en série entière $x \mapsto \int_{-\infty}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{1+t+t^2}$.

Exercice 11 *(X 2006)*

Développement en série entière de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que :
$\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) = \mathrm{e}^{x^2/2} \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t$

Exercice 12 *(Centrale 2012)*

$$f(x) = \sqrt{1+x+x^2}$$

1. En remarquant que $1+x+x^2 = \dfrac{1-x^3}{1-x}$ (pour $x \neq 1$), montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0 ; soit $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$ et que le rayon de convergence R de ce développement est supérieur à 1.
2. Montrer que $(1+x+x^2)\, f'(x)^2 = (x+1/2)^2$ pour tout x dans $\mathbb{R}$.
3. Montrer qu'on peut prolonger f au disque ouvert $D(0,R)$ par $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, z^n$ et, en utilisant un complexe bien choisi, montrer que R ne peut être strictement supérieur à 1.
4. Trouver une équation différentielle linéaire à coefficient polynomiaux que satisfait f. En déduire une méthode de calcul simple des a_n.

Exercice 13 *(Centrale 2022)*

Soit $q \in]0;1[$.

1. Montrer :
   $\exists! f \in \mathcal{C}^0([-1;1],\mathbb{R})$ tq $f(0) = 1$ et $f(x) = (1-qx)f(qx)$ pour tout $x \in [-1;1]$.
2. f est-elle développable en série entière ?

Exercice 14 *(Centrale 2022)*

Développement en série entière de $f : x \mapsto \dfrac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$.
A la fin de la planche, l'examinateur a demandé de préciser le comportement de la série entière en ± 1.

4 Applications des séries entières

Exercice 15 *(Mines 2017)*

Soit I_n le nombre d'involutions de $[\![1;n]\!]$ ie le nombre d'applications f de $[\![1;n]\!]$ dans $[\![1;n]\!]$ telles que $f \circ f = id$.

1. Montrer que :
   $\forall n > 2\ I_n = I_{n-1} + (n-1)I_{n-2}$
2. Soit $S : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{I_n}{n!} x^n$
   (a) Montrer que S est définie sur $]-1;1[$.
   (b) Trouver une relation entre $S(x)$ et $S'(x)$.
   (c) Déterminer $S(x)$ puis I_n.

Exercice 16 *(Mines 2019)*

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et :
$\forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_k u_{n-k}$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq n!$.
2. Montrer que la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{u_n}{n!} x^n$ a un rayon de convergence strictement positif.

   On note S sa somme.
3. Etablir une équation différentielle non linéaire vérifiée par S.
4. Etablir une autre expression de $S(x)$.
5. Calculer u_n.

Exercice 17 *(X 2018)*

Déterminer les deux premières décimales de $\cos(1)$.