ANALYSE 1
TD
2025-2026
Chapitre 4
Séries entières
Correction

941

1 Rayon de convergence d'une série entière

Exercice 1 *(Mines 2012)*

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière de terme général $\dfrac{(3n)!}{(n!)^3}x^n$.
2. Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(3n)!}{(n!)^3}x^n$.
   Etudier $f(x)$ quand x tend vers R^-.

Correction

1. Soit $r > 0$.
   $\forall n \in \mathbb{N}\ a_n r^n > 0$
   $\dfrac{a_{n+1}r^{n+1}}{a_n r^n} = \dfrac{(3n+3)!}{(n+1)!^3}\dfrac{n!^3}{(3n)!}r = \dfrac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{(n+1)^3}r \xrightarrow[n\to+\infty]{} 27r$
   Par la règle de d'Alembert :
   Si $r < \dfrac{1}{27}$ la série de terme général $a_n r^n$ converge.
   Si $r > \dfrac{1}{27}$ la série de terme général $a_n r^n$ diverge.
   On en déduit $R = \dfrac{1}{27}$.
2. Avec Stirling :

$$\begin{aligned} a_n &\sim \sqrt{2\pi(3n)}\left(\frac{3n}{\mathrm{e}}\right)^{3n}\left(\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^{n}\right)^{-3} \\ &\sim \sqrt{3}\frac{1}{2\pi n}3^{3n} = \frac{\sqrt{3}}{2\pi}\frac{27^n}{n} \end{aligned}$$

   Donc pour $x = R = \dfrac{1}{27}$, $a_n x^n \sim \dfrac{\sqrt{3}}{2\pi}\dfrac{1}{n}$ et tout est positif donc la série de terme général $a_n R^n$ diverge.
   $\forall x \in [0; R[\ f'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \geq 0$: f est croissante.

Donc $f(x) \xrightarrow[x\to R_-]{} +\infty$ ou f est majorée.
Supposons f majorée et notons M un majorant de f.
$\forall p \in \mathbb{N}\ \forall x \in [0; R[\ \sum_{n=0}^{p} a_n x^n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = f(x) \leq M$
On fait tendre x vers R :
$\forall p \in \mathbb{N}\ \sum_{n=0}^{p} a_n R^n \leq M$
Comme on a affaire à une série à termes positifs, on en déduit que la série de terme général $a_n R^n$ converge. C'est absurde donc :
$f(x) \xrightarrow[x\to R_-]{} +\infty$

Exercice 2 *(Mines 2012)*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $a_n = \ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{2n}\right)$.
Soit $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$.
Domaine de définition de S.

Correction
Soit R le rayon de convergence de la série entière étudiée.
$a_n \sim \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, $|a_n| \sim \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ donc $R = R_{CV}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} x^n\right)$
On note $b_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.
Soit $r > 0$.
$\forall n \in \mathbb{N}^*\ b_n r^n > 0$
$\dfrac{b_{n+1} r^{n+1}}{b_n r^n} = \sqrt{\dfrac{n}{n+1}}\, r \xrightarrow[n\to+\infty]{} r$
Par la règle de d'Alembert :
Si $r < 1$ la série de terme général $b_n r^n$ converge.
Si $r > 1$ la série de terme général $b_n r^n$ diverge.
On en déduit $R_{CV}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} x^n\right) = 1$.
On en déduit $R = 1$.

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2}\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2n}\right)^2 + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) \\
&= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\right) + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) \\
&= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)
\end{aligned}$$

Donc $1 \in \mathcal{D}_S$.
$a_n(-1)^n \sim \dfrac{1}{\sqrt{n}} \geq 0$
On en déduit que $-1 \notin \mathcal{D}_S$.
Finalement :

$$\mathcal{D}_S =]-1; 1]$$

2 Propriétés des sommes des séries entières

Exercice 3 *(Mines 2011)*

Résoudre $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(3n+1)^2\, x^n = 0$ pour $x \in]-1;1[$.

Correction
$\forall n \in \mathbb{N}\ (3n+1)^2 = 9n^2 + 6n + 1$

$$\begin{aligned}
\forall x \in]-1;1[\ \sum_{n=0}^{+\infty} x^n &= \frac{1}{1-x}\\
\forall x \in]-1;1[\ \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} &= \frac{1}{(1-x)^2} \text{ en dérivant}\\
\forall x \in]-1;1[\ \sum_{n=0}^{+\infty} nx^{n} &= \frac{x}{(1-x)^2}\\
\forall x \in]-1;1[\ \sum_{n=1}^{+\infty} n^2x^{n-1} &= \frac{(1-x)^2+2x(1-x)}{(1-x)^4} = \frac{1+x}{(1-x)^3} \text{ en dérivant}\\
\forall x \in]-1;1[\ \sum_{n=0}^{+\infty} n^2x^{n-1} &= \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}\\
\forall x \in]-1;1[\ \sum_{n=0}^{+\infty} (3n+1)^2x^{n} &= \frac{9x(1+x)+6x(1-x)+(1-x)^2}{(1-x)^3}\\
&= \frac{4x^2+13x+1}{(1-x)^3}
\end{aligned}$$

Une autre méthode est possible. Elle est plus complexe mais se généralise mieux à des polynômes de degré plus élevé.
La famille de polynômes $(1, X, X(X-1)$ est échelonnée en degré donc libre. Vu son cardinal, c'est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
Donc :
$\exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tq $(3X+1)^2 = aX(X-1) + bX + c$
En évaluant en 0, on obtient $c = 1$.
En évaluant en 1, on obtient $b + c = 16$ donc $b = 15$.

Enfin la comparaison des coefficients dominants donne $a = 9$.

$$\begin{aligned}
\forall x \in]-1;1[\sum_{n=0}^{+\infty} x^n &= \frac{1}{1-x} \\
\forall x \in]-1;1[\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} &= \frac{1}{(1-x)^2} \text{ en dérivant} \\
\forall x \in]-1;1[\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) x^{n-2} &= \frac{2}{(1-x)^3} \text{ en dérivant} \\
\forall x \in]-1;1[\sum_{n=0}^{+\infty} (3n+1)^2 x^n &= 9\,\frac{2x^2}{(1-x)^3} + 15\,\frac{x}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-x} \\
&= \frac{18x^2 + 15x(1-x) + (1-x)^2}{(1-x)^3} \\
&= \frac{4x^2 + 13x + 1}{(1-x)^3}
\end{aligned}$$

Le polynôme $4X^2 + 13X + 1$ a deux racines : $\dfrac{-13 - 3\sqrt{17}}{8} < -1$ et $\dfrac{-13 + 3\sqrt{17}}{8} \simeq -0,08$.

L'équation proposée a donc une et une seule solution : $\dfrac{-13 + 3\sqrt{17}}{8}$.

Exercice 4 *(Centrale 2010, cet exercice est mentionné dans le rapport du concours)*

Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{x}{\mathrm{e}^x - 1}$ se prolonge en une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Correction

Soit $f : x \mapsto \dfrac{x}{\mathrm{e}^x - 1}$

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$ et f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$.

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}\ \mathrm{e}^x - 1 &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} - 1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n!} \\
&= x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}
\end{aligned}$$

$\forall x \in \mathbb{R}^*\ \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}$ et $R = +\infty$

Donc la fonction $g \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \mapsto 1 \end{cases}$ est $\mathcal{C}^\infty$sur $\mathbb{R}$.

g ne s'annule pas donc $\dfrac{1}{g}$ est $\mathcal{C}^\infty$sur $\mathbb{R}$.

Or :

$\forall x \in \mathbb{R}^*\ f(x) = \dfrac{1}{g(x)}$

donc f se prolonge en une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ en posant $f(0) = \dfrac{1}{g(0)} = 1$

Exercice 5 *(Mines 2012)*

$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{2n-1} x^n$.

1. Rayon de convergence, domaine de définition.
2. Exprimer f à l'aide des fonctions usuelles.

Correction

1. $\forall n \in \mathbb{N}\ a_n = \frac{\binom{2n}{n}}{2n-1} \neq 0$
   Après simplifications :
   $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2(2n-1)}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 4$
   On en déduit comme d'habitude que $R = \frac{1}{4}$.
   Avec Stirling : $a_n \sim \frac{2^{2n-1}}{\sqrt{\pi}\, n^{3/2}}$
   Donc $a_n \left(\pm\frac{1}{4}\right)^n = O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$
   Donc $\mathcal{D}_f = [-1; 1]$.
   Il y a convergence normale sur $[-1; 1]$ mais ce point n'a pas encore été traité en cours.
2. Du calcul précédent, on déduit la relation de récurrence :
   $\forall n \in \mathbb{N}\ (n+1)a_{n+1} = 2(2n-1)a_n$

$$\begin{aligned}\forall x \in \left]-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right[\ f'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} 2(2n-1)a_n x^n \\ &= 4xf'(x) - 2f(x)\end{aligned}$$

f est solution sur $\left]-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right[$ de $(4x-1)y' = 2y$
On en déduit :
$\exists C \in \mathbb{R}$ tq $\forall x \in \left]-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right[\ f(x) = C\sqrt{1-4x}$
$f(0) = -1$ donc :
$\forall x \in \left]-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right[\ f(x) = -\sqrt{1-4x}$
Compte tenu de la convergence normale :
$\forall x \in \left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right]\ f(x) = -\sqrt{1-4x}$

Exercice 6 *(CCP 98)*

Calcul de la somme de la série entière $\sum_{k\geq 0} \frac{r_k x^k}{k!}$ où r_k est le reste de la division euclidienne de k par 3.

Correction

$\forall k \in \mathbb{N}\ \left|\dfrac{r_k}{k!}\right| \leq \dfrac{2}{k!}$

On en déduit : $R \geq R_{CV}\left(\sum \dfrac{2}{k!}x^k\right) = +\infty$

puis $R = +\infty$.

Passons au calcul.

Pour tout $i \in \{0;1;2\}$, soit $S_i \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^{3n+i}}{(3n+i)!} \end{cases}$.

On vérifie facilement que les trois rayons de convergence sont infinis.

$\forall x \in \mathbb{R}\ S(x) = S_1(x) + 2S_2(x)$

En remarquant :

$\forall n \in \mathbb{N}\ \mathrm{j}^{3n+1} = \mathrm{j}$

on a :

$$\begin{array}{ll} L_1 & \forall x \in \mathbb{R}\ S_0(x) + S_1(x) + S_2(x) = \mathrm{e}^{x} \\ L_2 & \forall x \in \mathbb{R}\ S_0(x) + \mathrm{j}S_1(x) + \mathrm{j}^2 S_2(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{j}x} \\ L_3 & \forall x \in \mathbb{R}\ S_0(x) + \mathrm{j}^2 S_1(x) + \mathrm{j}S_2(x) = \overline{\mathrm{e}^{\mathrm{j}x}} \text{ en conjuguant } L_2 \end{array}$$

On fait $L_1 + \mathrm{j}^2 L_2 + \mathrm{j}L_3$:

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}\ 3S_1(x) &= \mathrm{e}^{x} + \mathrm{j}^2\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}x} + \overline{\mathrm{j}^2\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}x}} = \mathrm{e}^{x} + 2\Re e\left(\mathrm{j}^2\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}x}\right) \\ &= \mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x/2}\left(\sqrt{3}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) - \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right) \end{aligned}$$

On fait $L_1 + \mathrm{j}L_2 + \mathrm{j}^2 L_3$:

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}\ 3S_2(x) &= \mathrm{e}^{x} + \mathrm{j}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}x} + \overline{\mathrm{j}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}x}} = \mathrm{e}^{x} + 2\Re e\left(\mathrm{j}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}x}\right) \\ &= \mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x/2}\left(-\sqrt{3}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) - \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right) \end{aligned}$$

et finalement :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}\ S(x) = \mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x/2}\left(\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) - \frac{\sqrt{3}}{3}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)}$$

Autres méthodes

- $S^{(3)} = S$ avec $S(0) = 0$, $S'(0) = 1$ et $S''(0) = 2$
  Equation du troisième ordre théoriquement hors-programme.
- $S_2' = S_1$, $S_1' = S_0$
  Donc $S_2 + S_2' + S_2'' = \mathrm{e}^{x}$ conforme au programme
  Avec $S_2(0) = S_2'(0) = 0$
  D'où S_2 puis $S_1 = S_2'$.
  Cf l'exercice qui suit.

Exercice 7 *(Centrale 2017)*

Soit $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f et montrer que f y est $\mathcal{C}^2$.
2. Déterminer une équation différentielle linéaire non homogène du second ordre vérifiée par f.
3. Résoudre l'équation différentielle homogène.
4. ? ? ?
   Remarque
   Il s'agit vraisemblablement d'exprimer $f(x)$ à l'aide des fonctions usuelles.

Correction

1. Soit $r>0$.
   $\forall n\in\mathbb{N}\ \frac{r^{3n}}{(3n)!}>0$
   $\frac{\frac{r^{3n+3}}{(3n+3)!}}{\frac{r^{3n}}{(3n)!}}=\frac{r^3}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0<1$
   Par la règle de d'Alembert, la série de terme général $\frac{r^{3n}}{(3n)!}$ converge.
   On en déduit que le rayon de convergence de la série entière de l'énoncé est infini et donc que f est définie sur $\mathbb{R}$.
2.
$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R}\ f'(x)&=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!}\\&=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{3n+2}}{(3n+2)!}\\f''(x)&=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{3n+1}}{(3n+1)!}\end{aligned}$$

   Je pense qu'on peut écrire sans justification :

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R}\ f''(x)+f'(x)+f(x)&=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{3n+1}}{(3n+1)!}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{3n+2}}{(3n+12)!}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}\\&=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{k!}=\mathrm{e}^x\end{aligned}$$

3. L'équation homogène associée est $y''+y'+y=0$.
   Son équation caractéristique est r^2+r+1.
   Les racines de l'équation caractéristique sont $j=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\overline{j}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
   La solution générale (réelle) de l'équation homogène est donc :
   $y(x)=\mathrm{e}^{-x/2}\left(A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+B\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)$

4. On cherche une solution particulière de l'équation complète sous la forme $y(x) = a\,\mathrm{e}^x$.
   On trouve $y(x) = \dfrac{1}{3}\,\mathrm{e}^x$.
   Il existe donc deux constantes A et B telles que :
   $\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) = \dfrac{1}{3}\,\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x/2}\left(A\cos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\right) + B\sin\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)$
   $f(0) = 1$ donc $A = \dfrac{2}{3}$.

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}\ f'(x) &= \frac{1}{3}\,\mathrm{e}^x - \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-x/2}\left(A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)\\ &\quad + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{e}^{-x/2}\left(-A\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + B\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)\\ 0 = f'(0) &= \frac{1}{3} - \frac{A}{2} + \frac{B\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

   Donc :

$$\begin{aligned}B &= \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{A}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right)\\ &= 0\end{aligned}$$

Exercice 8 *(Centrale 2023)*

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $a_0 = a_1 = 1$ et $a_{n+2} = a_{n+1} + \dfrac{2}{n+2}a_n$.

1. Montrer :
   $\forall n \in \mathbb{N}^*\ 1 \leq a_n \leq n^2$
   et en déduire le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
2. Exprimer la somme de cette série entière à l'aide des fonctions usuelles.
3. Montrer :
   $\forall x \in]-1;1[\ S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2} x^n\,\mathrm{e}^{-2x}$

Correction

1. Pour tout $n \geq 2$, soit $\mathcal{P}(n)$: $\forall k \in [\![1;n]\!]\ 1 \leq a_k \leq k^2$.
   $a_1 = 1$ et $a_2 = 2$ donc $\mathcal{P}(2)$ est vraie.
   On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie (avec n un entier supérieur ou égal à 2.
   $a_{n+1} = a_n + \dfrac{2}{n+1}a_{n-1} \geq 1 + \dfrac{2}{n+1} \geq 1$

$$\begin{aligned}a_{n+1} &\leq n^2 + \frac{2}{n+1}(n-1)^2 = \frac{n^2(n+1) + 2(n-1)^2}{n+1}\\ &\leq \frac{n^3+3n^2-4n+2}{n+1} \leq \frac{n^3+3n^2+2}{n+1}\\ &\leq \frac{n^3+3n^2+3n+1}{n+1} = \frac{(n+1)^3}{n+1}\\ &\leq (n+1)^2\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Si $x > 1$ alors :
$\forall n \in \mathbb{N}\ a_n x^n \geq x^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$
Donc $a_n x^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$
Si $0 < x < 1$ alors :
$\forall n \in \mathbb{N}\ 0 \leq a_n x^n \leq n^2 x^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
Donc $a_n x^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
On en déduit $R = 1$.

2.

$$\begin{aligned}
\forall x \in]-1;1[\ S(x) &= 1 + x + \sum_{n=2}^{+\infty} a_n x^n = 1 + x + \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+2} x^{n+2} \\
&= 1 + x + \sum_{n=0}^{+\infty} \left(a_{n+1} + \frac{2}{n+2} a_n\right) x^{n+2} \\
&= 1 + x + x \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+2}}{n+2}
\end{aligned}$$

La séparation de la somme en 2 est légitime : la somme complète converge et un des deux termes de la séparation (celui de gauche) converge assurément.

$$\begin{aligned}
\forall x \in]-1;1[\ S(x) &= 1 + x + x\left(S(x) - 1\right) + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+2}}{n+2} \\
S'(x) &= 1 + S(x) - 1 + xS'(x) + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} \\
&= = S(x) + xS'(x) + 2xS(x)
\end{aligned}$$

S est solution sur $]-1;1[$ de $(1-x)y' = (2x+1)y$
$\displaystyle\int \frac{2x+1}{1-x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2x-2+3}{1-x}\,\mathrm{d}x = \int \left(-2 + \frac{3}{1-x}\right)\mathrm{d}x = -2x - 3\ln(1-x)$
Compte tenu de $S(0) = 0$, on a :

$$\boxed{\forall x \in]-1;1[\ S(x) = \frac{\mathrm{e}^{-2x}}{(1-x)^3}}$$

3. $\displaystyle\forall x \in]-1;1[\ \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$
En dérivant deux fois, on obtient :
$\displaystyle\forall x \in]-1;1[\ \frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(n+2)x^n$
Finalement :
$\displaystyle\forall x \in]-1;1[\ S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2} x^n\,\mathrm{e}^{-2x}$

Exercice 9 *(Centrale 2002)*

Rayon de convergence et somme de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ avec $a_0 = a_1 = 1$ et $a_{n+1} = a_n + \frac{2}{n+1} a_{n-1}$.

Correction
Une récurrence triviale donne :
$\forall n \in \mathbb{N}\ a_n > 0$
On en déduit alors :
$\forall n \geq 1\ a_{n+1} > a_n$
On en déduit :
$\forall n \geq 2\ 1 \leq \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + \frac{2}{n+1} \frac{a_{n-1}}{a_n} \leq 1 + \frac{2}{n+1}$
Donc $\frac{a_{n+1}}{a_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$ et $R = 1$

La division par $n+1$ signale une intégration qui s'avère peu pratique dans les calculs.
Il vaut donc mieux commencer par réécrire la relation de récurrence sous la forme :
$\forall n \in \mathbb{N}^*\ (n+1)a_{n+1} = (n+1)a_n + 2a_{n-1}$
On a alors :

$$\begin{aligned}
\forall x \in]-1;1[; S'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n \\
&= a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left((n+1)a_n + 2a_{n-1}\right) x^n \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n \\
&= 1 + xS'(x) + S(x) - 1 + 2xS(x) = xS'(x) + (2x+1)S(x)
\end{aligned}$$

S est solution sur $]-1;1[$ de $(1-x)y' = (2x+1)y$
$\int \frac{2x+1}{1-x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2x-2+3}{1-x}\,\mathrm{d}x = \int \left(-2 + \frac{3}{1-x}\right)\mathrm{d}x = -2x - 3\ln(1-x)$
Compte tenu de $S(0) = 0$, on a :

$$\boxed{\forall x \in]-1;1[\ S(x) = \frac{\mathrm{e}^{-2x}}{(1-x)^3}}$$

3 Fonctions développables en séries entières

Exercice 10 *(Mines 2006)*

Développer en série entière $x \mapsto \int_{-\infty}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{1+t+t^2}$.

Correction
Soit $f \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{1}{1+x+x^2} \end{cases}$.
f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$:
$\Delta(1+X+X^2) = -3 < 0$ donc :
$\forall x \in \mathbb{R}\ 1+x+x^2 > 0$

$f(x) \sim_{-\infty} \dfrac{1}{x^2}$
Classiquement, f est intégrable sur $]-\infty; x]$.

F est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et :
$\forall x \in \mathbb{R}\ F'(x) = \dfrac{1}{1+x+x^2} = \dfrac{1-x}{1-x^3}$

$$\begin{aligned}\forall x \in]-1;1[\ F'(x) &= (1-x)\sum_{n=0}^{+\infty}\left(x^3\right)^n \text{ car } \left|x^3\right| < 1\\ &= (1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} x^{3n} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \ (*)\end{aligned}$$

avec pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$a_{3n} = 1$
$a_{3n+1} = -1$
$a_{3n+2} = 0$
Au vu des coefficients, il est clair que $R = 1$.
Remarques

- On peut justifier la formule $(*)$ de plusieurs manières :
  — Par permutation des termes :
  $\forall x \in]-1;1[\ F'(x) = (1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} x^{3n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(x^{3n} - x^{3n+1}\right)$
  et on réordonne les termes par puissances croissantes de x : cette méthode est correcte mais n'est pas justifiable dans le cadre du programme.
  — Par un produit de Cauchy :
  $\forall x \in]-1;1[\ F'(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty}\alpha_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\beta_n x^n\right)$
  avec $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = -1$ et $\alpha_n = 0$ pour tout $n \geq 2$
  et $\beta_n = 1$ si n est divisible par 3 et $\beta_n = 0$ sinon.
  La première série entière a un rayon de convergence infini et la seconde un rayon de convergence égal à 1. Le minimum de ces deux rayons est 1 donc :
  $\forall x \in]-1;1[\ F'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$
  avec $a_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \beta_{n-k}$
  On a donc $a_0 = \alpha_0\beta_0 = 1$ en cohérence avec la valeur de $F'(0)$.
  Pour tout $n \geq 1$, $a_n = \beta_n - \beta_{n-1}$ donc :
  $a_{3n} = \beta_{3n} - \beta_{3n-1} = 1$
  $a_{3n+1} = \beta_{3n+1} - \beta_{3n} = -1$
  $a_{3n+2} = \beta_{3n+2} + \beta_{3n+1} = 0$

  Le rayon de convergence est d'après le cours supérieur ou égal à 1. Comme la suite (a_n) ne converge pas vers 0, il vaut 1.

- Par linéarité :

$$\begin{aligned}\forall x \in]-1;1[\ F'(x) &= (1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} x^{3n} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{3n} - \sum_{n=0}^{+\infty} x^{3n+1}\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \gamma_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} \delta_n x^n\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\end{aligned}$$

  avec pour tout $n \in \mathbb{N}$:
  $\gamma_{3n} = 1$ et $\gamma_{3n+1} = \gamma_{3n+2} = 1$
  $\delta_{3n+1} = -1$ et $\delta_{3n+2} = \delta_{3n} = 0$
  $a_n = \gamma_n + \delta_n$
  Le rayon de convergence est d'après le cours supérieur ou égal à 1. Comme la suite (a_n) ne converge pas vers 0, il vaut 1.
- On peut donner une expression de a_n valable pour tout n et utilisant les fonctions usuelles.
  Comme l'a fait remarquer Hamza :
  $\forall n \in \mathbb{N}\ a_{n+2} + a_{n+1} + a_n = 0$
  L'équation caractéristique est $r^2 + r + 1 = 0$.
  Elle a deux racines simples $j = \mathrm{e}^{2i\pi/3}$ et $\overline{j}$.
  On en déduit :
  $\exists (A,B) \in \mathbb{R}^2$ tq $\forall n \in \mathbb{N}\ a_n = A\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) + B\sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)$
  La condition $a_0 = 1$ donne $A = 1$.
  La condition $a_1 = -1$ donne $-\frac{A}{2} + B\frac{\sqrt{3}}{2} = -1$ donne $B = -\frac{\sqrt{3}}{3}$
- Toute suite périodique de période 3, et il y en a plusieurs dans ce qui précède, vérifie la relation de récurrence $u_{n+3} = u_n$.
  L'équation caractéristique est $r^3 = 1$ qui a trois racines complexes simples : 1, j et j^2.
  D'après le cours d'analyse :
  $\exists (A,B,) \in \mathbb{C}^3$ tq $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n = A + Bj^n + Cj^{2n}$

$\forall x \in]-1;1[\ F(x) = F(0) + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$

$$\begin{aligned}F(0) &= \int_{-\infty}^0 \frac{\mathrm{d}t}{1+t+t^2} = \int_{-\infty}^0 \frac{\mathrm{d}t}{1+(t+1/2)^2+3/4}\\ &= \frac{4}{3}\int_{-\infty}^0 \frac{\mathrm{d}t}{4/3(t+1/2)^2+1} = \frac{4}{3}\int_{-\infty}^0 \frac{\mathrm{d}t}{((2t+1)/\sqrt{3})^2+1}\\ &= \frac{4}{3}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\arctan\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)\right]_{-\infty}^0 = \frac{4}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)\\ &= \frac{4}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\pi}{6} + \frac{\pi\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{4}{3}\frac{4\pi\sqrt{3}}{12} = \frac{4\pi\sqrt{3}}{9}\end{aligned}$$

$\forall x \in]-1;1[\ \int_{-\infty}^0 \frac{\mathrm{d}t}{1+t+t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$
avec :
$b_0 = \frac{4\pi\sqrt{3}}{9}$

$\forall n \in \mathbb{N}^* \ b_{3n} = 0$
$\forall n \in \mathbb{N} \ b_{3n+1} = \dfrac{1}{3n+1}$
$\forall n \in \mathbb{N} \ b_{3n+2} = \dfrac{-1}{3n+2}$

Exercice 11 *(X 2006)*

Développement en série entière de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que :
$\forall x \in \mathbb{R} \ f(x) = \mathrm{e}^{x^2/2} \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2/2} \, \mathrm{d}t$

Correction
f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et :
$\forall x \in \mathbb{R} \ f'(x) = xf(x) + \mathrm{e}^{-x^2/2} \ \mathrm{e}^{x^2/2} = xf(x) + 1$
f est donc solution sur $\mathbb{R}$ du problème de Cauchy $\mathcal{P} \begin{cases} y' = xy + 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$.

Soient $\displaystyle\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et S sa somme.

$$\begin{aligned}
& S \text{ est solution de } \mathcal{P} \text{ sur }]-R;R[\\
\iff & \begin{cases} a_0 = 0 \\ \forall x \in]-R;R[\ \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} - 1 = 0 \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} a_0 = 0 \\ \forall x \in]-R;R[\ \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n - 1 = 0 \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} a_0 = 0 \\ \forall x \in]-R;R[\ a_1 - 1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left((n+1)a_{n+1} - a_{n-1}\right) x^n = 0 \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^* \ a_{n+1} = \dfrac{a_{n-1}}{n+1} \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} \forall p \in \mathbb{N} \ a_{2p} = 0 \\ \forall p \in \mathbb{N} \ a_{2p+1} = \dfrac{2^p p!}{(2p+1)!} \end{cases}
\end{aligned}$$

Soit $r > 0$.
$\forall p \in \mathbb{N} \ a_{2p+1} r^{2p+1} > 0$
$\dfrac{a_{2p+3} r^{2p+3}}{a_{2p+1} r^{2p+1}} = \dfrac{r^2}{2p+3} \xrightarrow[p \to +\infty]{} 0 < 1$
Donc pour tout $r \in \mathbb{R}_+^*$, la série de terme général $a_{2p+1} r^{2p+1}$ converge.
Donc le rayon de convergence de la série entière de terme général $\dfrac{2^p p!}{(2p+1)!} x^{2p+1}$ est infini.

Donc $S \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \dfrac{2^p p!}{(2p+1)!} x^{2p+1} \end{cases}$ est solution sur $\mathbb{R}$ de $\mathcal{P}$.

On est dans les conditions d'application de Cauchy-Lipschitz donc $S = f$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) = \mathrm{e}^{x^2/2} \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2^p p!}{(2p+1)!} x^{2p+1}$$

Exercice 12 *(Centrale 2012)*

$$f(x) = \sqrt{1 + x + x^2}$$

1. En remarquant que $1 + x + x^2 = \dfrac{1 - x^3}{1 - x}$ (pour $x \neq 1$), montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0 ; soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$ et que le rayon de convergence R de ce développement est supérieur à 1.
2. Montrer que $(1 + x + x^2)\, f'(x)^2 = (x + 1/2)^2$ pour tout x dans $\mathbb{R}$.
3. Montrer qu'on peut prolonger f au disque ouvert $D(0, R)$ par $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, z^n$ et, en utilisant un complexe bien choisi, montrer que R ne peut être strictement supérieur à 1.
4. Trouver une équation différentielle linéaire à coefficient polynomiaux que satisfait f. En déduire une méthode de calcul simple des a_n.

Correction

1. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}\ f(x) = \dfrac{1 - x^3}{1 - x}$: RAS
   $\forall x \in]-1; 1[\ f(x) = (1 - x^3)^{1/2}\ (1 - x)^{-1/2}\ (1 - x \text{ et } 1 - x^3 > 0)$
   + Binôme généralisé
   + Produit de Cauchy.
2. $\forall x \in \mathbb{R}\ (1 + x + x^2) f'(x)^2 = (1 + x + x^2) \left(\dfrac{2x + 1}{2\sqrt{1 + x + x^2}}\right)^2 = \left(\dfrac{2x + 1}{2}\right)^2 = \left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2$
3. On **définit** pour z de module strictement inférieur à R :
   $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$
   Les propriétés des séries entières permettent d'affirmer l'existence de coefficients b_n tels que :
   $\forall z \in D(0, R)\ (1 + z + z^2) \left(\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z^{n-1}\right)^2 - \left(z + \dfrac{1}{2}\right)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$
   Les propriétés des séries entières et la question précédente permettent d'affirmer :
   $\forall x \in]-1; 1[\ (1 + x + x^2) \left(\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}\right)^2 - \left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n = 0$
   On en déduit :
   $\forall n \in \mathbb{N}\ b_n = 0$
   puis :
   $\forall z \in D(0, R)\ (1 + z + z^2) \left(\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z^{n-1}\right)^2 - \left(z + \dfrac{1}{2}\right)^2 = 0$
   Supposons $R > 1$.

On a alors $\mathrm{j} \in D(0,R)$ donc :
$(1+\mathrm{j}+\mathrm{j}^2)\left(\sum_{n=1}^{+\infty} na_n \mathrm{j}^{n-1}\right)^2 - \left(\mathrm{j}+\frac{1}{2}\right)^2 = 0$
Mais $1+\mathrm{j}+\mathrm{j}^2 = 0$ et $\mathrm{j}+\frac{1}{2} \neq 0$: on aboutit à une contradiction.
Finalement $R = 1$.

4. $\forall x \in \mathbb{R}\ (1+x+x^2)f'(x) = \left(x+\frac{1}{2}\right)f(x)$
$\forall x \in]-1;1[\ \sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n-1} + \sum_{n=1 \text{ puis } 0}^{+\infty} na_n x^n + \sum_{n=1 \text{ puis } 0}^{+\infty} na_n x^{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$
$\forall x \in]-1;1[\ \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} na_n x^n + \sum_{n=1}^{+\infty}(n-1)a_{n-1}x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}x^n + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$
$\forall x \in]-1;1[\ a_1 - \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left((n+1)a_{n+1} + na_n + (n-1)a_{n-1} - a_{n-1} - \frac{1}{2}a_n\right)x^n = 0$
D'où :
$a_0 = f(0) = 1$
$a_1 = \frac{1}{2}a_0 = \frac{1}{2}$ on peut vérifier : $a_1 = f'(0)$ qui vaut bien $\frac{1}{2}$
$\forall n \geq 1\ (n+1)a_{n+1} + \left(n-\frac{1}{2}\right)a_n + (n-2)a_{n-1} = 0$
$\forall n \geq 2\ a_n = -\frac{1}{n}\left(\left(n-\frac{3}{2}\right)a_{n-1} + (n-3)a_{n-2}\right)$

Exercice 13 *(Centrale 2022)*

Soit $q \in]0;1[$.

1. Montrer :
$\exists! f \in \mathcal{C}^0([-1;1],\mathbb{R})$ tq $f(0) = 1$ et $f(x) = (1-qx)f(qx)$ pour tout $x \in [-1;1]$.
2. f est-elle développable en série entière ?

Correction

1. On suppose que f existe.
Une récurrence facile permet de prouver :
$\forall n \in \mathbb{N}^*\ \forall x \in [-1;1]\ f(x) = f(q^n x)\prod_{k=1}^{n}\left(1-q^k x\right)$
$q \in]0;1[$ donc $q^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
f est continue donc $f(q^n x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(0) = 1$ pour tout $x \in [-1;1]$
On en déduit que pour tout $x \in [-1;1]$, la suite $\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1-q^k x\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et :
$\forall x \in [-1;1]\ f(x) = \lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1-q^k x\right)$
D'où l'unicité en cas d'existence.

Réciproquement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ soit $f_n \begin{cases} [-1;1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln\left(1-q^n x\right) \end{cases}$.
$\forall n \in \mathbb{N}^*\ \forall x \in [-1;1]\ |q^n x| \leq q^n < 1$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est bien définie sur $[-1;1]$. De plus elle est continue.

La fonction $\begin{cases} [-q;q] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{\ln(1+x)}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \mapsto 1 \end{cases}$ est continue sur le segment $[-q:q]$ donc elle y est bornée et :

$\exists M \in \mathbb{R}_+$ tq $\forall x \in [-q;q]$ $|\ln(1+x)| \leq Mx$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\forall x \in [-1;1]$ $|q^n x| \leq q^n \leq q$

Donc :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\forall x \in [-1;1]$ $|f_n(x)| \leq Mq^n x \leq Mq^n$

On en déduit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $[-1;1]$.

Sa somme S est donc une fonction continue sur $[-1;1]$.

$f = \mathrm{e}^S$ est donc une fonction continue sur $[-1;1]$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ $f_n(0) = 0$

Donc $S(0) = 0$ et $f(0) = 1$.

$$\begin{aligned}
\forall x \in [-1;1]\ S(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1-q^n x) \\
&= \ln(1-qx) + \sum_{n=2}^{+\infty} \ln(1-q^n x) \\
&= \ln(1-qx) + \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1-q^{n+1} x\right) \\
&= \ln(1-qx) + \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1-q^n qx) \\
&= \ln(1-qx) + S(x)
\end{aligned}$$

En prenant l'exponentielle :

$\forall x \in [-1;1]$ $f(x) = (1-qx)f(qx)$

2. Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

   Si $|x| < \dfrac{R}{q}$ alors :

$$\begin{aligned}
(1-qx)S(qx) &= S(qx) - qxS(qx) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n q^n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n q^{n+1} x^{n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n q^n x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} q^n x^n \\
&= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n - a_{n-1}) q^n x^n
\end{aligned}$$

   Si S vérifie les mêmes conditions que f alors $a_0 = 1$ et :

   $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $(a_n - a_{n-1})q^n = a_n$

   ce qui donne $a_n = -\dfrac{q^n}{1-q^n} a_{n-1}$

   Réciproquement, on définit la suite a_n par :

$a_0 = 1$
$\forall n \in \mathbb{N}^* \; a_n = -\dfrac{q^n}{1-q^n} a_{n-1}$
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \neq 0$ et $\dfrac{|a_{n+1}|}{a_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
Donc le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ est infini.
On montre alors en reprenant les calculs précédents que :
$\forall x \in \mathbb{R} \; S(x) = (1-qx)S(qx)$
D'après la partie unicité de la première question :
$\forall x \in [-1;1] \; f(x) = S(x)$
et f est développable en série entière.
Remarque
On peut se demander pourquoi on se limite à $[-1;1]$ dans la première question alors que le rayon de convergence est infini. C'est pour simplifier l'exercice : dans le cas général, les facteurs $1-q^n x$ peuvent être négatifs ou nuls ce qui pose problème pour le logarithme.

Exercice 14 *(Centrale 2022)*

Développement en série entière de $f : x \mapsto \dfrac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$.
A la fin de la planche, l'examinateur a demandé de préciser le comportement de la série entière en ± 1.

Correction
La fonction $x \mapsto (1+x)^{-1/2}$ est développable en série entière avec un rayon de convergence égal à 1 (c'est dans le cours).
On en déduit que la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est développable en série entière avec un rayon de convergence égal à 1.
Il en est de même de la fonction arcsin qui est sa primitive nulle en 0.
Par produit, f est développable en série entière sur $]-1;1[$ et $R \geq 1$.
Si $R > 1$, la série entière a une limite finie en 1. Or $f(x) \xrightarrow[\substack{x\to 1\\ <1}]{} +\infty$ donc $R = 1$.

Par parité :
$\forall x \in]-1;1[\; f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+1}$
$f(x) \sim_0 x$ donc $a_1 = 1$.

$$\begin{array}{rcl} \forall x \in]-1;1[\; f'(x) & = & \dfrac{1}{1-x^2} + \left(-\dfrac{1}{2}\right)(-2x)(1-x^2)^{-3/2}\arcsin(x) \\ (1-x^2)f'(x) & = & 1 + xf(x) \end{array}$$

On a donc pour tout $x \in]-1;1[$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(2n+1)a_n x^{2n} - \sum_{n=0}^{+\infty}(2n+1)a_n x^{2n+2} \quad = \quad 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+2}$$

On en déduit :

$$a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}(2n+1)a_n x^{2n} - \sum_{n=1}^{+\infty}(2n-1)a_{n-1}x^{2n} \quad = \quad 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}x^{2n}$$

On retrouve $a_0 = 1$ et on a :
$\forall n \in \mathbb{N}^*\ a_n = \dfrac{2n}{2n+1} a_{n-1}$.
On en déduit classiquement :
$\forall n \in \mathbb{N}\ a_n = \dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$.
Les a_n étant positifs, si la série $\sum a_n$ convergeait alors la série entière convergerait normalement sur $[0;1]$ et f aurait une limite finie en 1. Ce n'est pas le cas donc la série $\sum a_n$ diverge.
On peut aussi invoquer Stirling :
$a_n \sim 2^{2n} 2\pi n \left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^{2n} \dfrac{1}{2n} \dfrac{1}{2\sqrt{\pi n}} \left(\dfrac{\mathrm{e}}{2n}\right)^{2n} = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}$.
Par parité, la série entière diverge en $x = -1$.

4 Applications des séries entières

Exercice 15 *(Mines 2017)*

Soit I_n le nombre d'involutions de $[\![1;n]\!]$ ie le nombre d'applications f de $[\![1;n]\!]$ dans $[\![1;n]\!]$ telles que $f \circ f = id$.

1. Montrer que :
   $\forall n > 2\ I_n = I_{n-1} + (n-1)I_{n-2}$
2. Soit $S : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{I_n}{n!} x^n$
   (a) Montrer que S est définie sur $]-1;1[$.
   (b) Trouver une relation entre $S(x)$ et $S'(x)$.
   (c) Déterminer $S(x)$ puis I_n.

Correction

1. On note S_n l'ensemble des permutations des entiers $1, 2, \ldots, n$.
   On définit $T_n = \{\sigma \in S_n \text{ tq } \sigma^2 = Id\}$.
   On note $I_n = Card(T_n)$ et on pose $I_0 = 1$.
   $S_1 = \{id\}$, $I_1 = 1$
   $S_2 = \{id; (1\ 2)\}$, $I_2 = 2$
   Dans S_3, il y a $id, (1\ 2), (1\ 3)$ et $(2\ 3)$ qui appartiennent à T_3 et $(1\ 2\ 3)$ et $(1\ 3\ 2)$ qui n'appartiennent pas à T_3.
   $I_3 = 4$

$$\begin{aligned}
I_n &= Card(T_n) = Card\Big(\{\sigma \in S_n \text{ tq } \sigma^2 = id\}\Big) \\
&= \sum_{i=1}^{n} Card\Big(\{\sigma \in S_n \text{ tq } \sigma^2 = id \text{ et } \sigma(1) = i\}\Big) \\
&= Card\Big(\{\sigma \in S_n \text{ tq } \sigma^2 = id \text{ et } \sigma(1) = 1\}\Big) + \sum_{i=2}^{n} Card\Big(\{\sigma \in S_n \text{ tq } \sigma^2 = id \text{ et } \sigma(1) = i\}\Big) \\
&= I_{n-1} + (n-1) Card\Big(\{\sigma \in S_n \text{ tq } \sigma^2 = id \text{ et } \sigma(1) = 2\}\Big)
\end{aligned}$$

   Mais, $\{\sigma \in S_n \text{ tq } \sigma^2 = id \text{ et } \sigma(1) = 2\} = \{\sigma \in S_n \text{ tq } \sigma^2 = id \text{ et } \sigma(1) = 2 \text{ et } \sigma(2) = 1\}$ qui est de cardinal I_{n-2} (y compris si $n = 2$ avec la convention $I_0 = 1$) donc :
   $\forall n \geq 2\ I_n = I_{n-1} + (n-1)I_{n-2}$

2. (a) $\forall n \in \mathbb{N}^* \; I_n \leq Card(S_n) = n!$

   $\forall n \in \mathbb{N} \; 0 \leq \dfrac{I_n}{n!} \leq 1$

   Donc $R_{CV}\left(\sum \dfrac{I_n}{n!}x^n\right) \geq R_{CV}\left(\sum x^n\right) = 1$

   (b) On pose $a_n = \dfrac{I_n}{n!}$.

   $\forall n \geq 3 \; a_n = \dfrac{I_{n-1} + (n-1)I_{n-2}}{n!} = \dfrac{1}{n}a_{n-1} + \dfrac{1}{n}a_{n-2}$

   $\forall n \geq 3 \; na_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

$$\begin{aligned}
\forall x \in]-R;R[\; S(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n \\
S'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = a_1 + 2a_2 x + \sum_{n=3}^{+\infty}(a_{n-1} + a_{n-2})x^{n-1} \\
&= 1 + 2x + \sum_{n=3}^{+\infty} a_{n-1}x^{n-1} + x\sum_{n=3}^{+\infty} a_{n-2}x^{n-2} \\
&= 1 + 2x + \sum_{n=2}^{+\infty} a_n x^n + x\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n \\
&= 1 + 2x + S(x) - a_1 + xS(x) \\
&= (1+x)S(x) + 1 + x
\end{aligned}$$

   (c) S est solution sur $]-R;R[$ de $y' = (1+x)y + 1 + x$.

   L'équation sans second membre associée est $y' = (1+x)y$.

   $\displaystyle\int (1+x)\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{x} + x$

   La solution générale de l'équation sans second membre est $y(x) = C\,\mathrm{e}^{x^2/2+x}$.

   On cherche ensuite une solution particulière de la forme $y(x) = C(x)\,\mathrm{e}^{x^2/2+x}$, ce qui nous conduit à :

   $C'(x)\,\mathrm{e}^{x^2/2+x} = x + 1$ ou encore $C'(x) = (x+1)\,\mathrm{e}^{-x^2/2-x}$

   Cela s'intègre en $C(x) = -\,\mathrm{e}^{-x^2/2-x} + Cte$ et on déduit que $y = -1$ est une solution particulière de $y' = (1+x)y + 1 + x$.

   Par conséquent :

   $\exists A \in \mathbb{R}$ tq $\forall x \in]-R;R[\; S(x) = -1 + A\,\mathrm{e}^{-x^2/2-x}$

   Compte tenu de $S(0) = 0$, on en déduit :

   $\forall x \in]-R;R[\; S(x) = \mathrm{e}^{x+x^2/2} - 1$

   qu'on peut écrire :

   $\forall x \in]-R;R[\; S(x) + 1 = \mathrm{e}^{x} \times \mathrm{e}^{x^2/2}$

   $S+1$ est donc le produit de deux fonctions DSE sur $\mathbb{R}$.

   On en déduit $R = +\infty$ puis par produit de Cauchy :

$$I_n = \sum_{\substack{p,q\in\mathbb{N} \\ p+2q=n}} \frac{n!}{p!q!2^q}$$

   je ne pense pas qu'on puisse faire mieux.

Exercice 16 *(Mines 2019)*

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et :
$\forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_k u_{n-k}$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq n!$.
2. Montrer que la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{u_n}{n!} x^n$ a un rayon de convergence strictement positif.
   On note S sa somme.
3. Etablir une équation différentielle non linéaire vérifiée par S.
4. Etablir une autre expression de $S(x)$.
5. Calculer u_n.

Correction

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n) : \forall k \in [\![0; n]\!]\ 0 \leq u_k \leq k!$.
   $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
   On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie.
   $u_{n+1} \geq 0$: trivial.
   On peut multiplier sans problème des inégalités entre nombres positifs donc :
   $u_{n+1} \leq \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k!(n-k)! = \sum_{k=0}^{n} n! = (n+1)n! = (n+1)!$
   Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
2. D'après ce qui précède :
   $\forall n \in \mathbb{N}\ \left|\dfrac{u_n}{n!}\right| \leq |1|$
   donc $R = R_{CV}\left(\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{u_n}{n!} x^n\right) \geq R_{CV}\left(\sum_{n\geq 0} x^n\right) = 1$.
3. $$\begin{aligned}\forall x \in]-R; R[\ S'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n\frac{u_n}{n!} x^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{(n-1)!} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_{n+1}}{n!} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x^n}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_k u_{n-k}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(x^n \sum_{k=0}^{n} \frac{u_k}{k!} \frac{u_{n-k}}{(n-k)!}\right) \\ &= S(x)^2\end{aligned}$$
4. Il s'agit ensuite de diviser par $S(x)$.
   Compte tenu de la positivité des u_n :
   $\forall x \in [0; R[\ S(x) \geq u_0 = 1$
   Donc :
   $\forall x \in [0; R[\ \dfrac{S'(x)}{S(x)^2} = 1$
   En intégrant et compte tenu de $S(0) = 1$, on obtient :
   $\forall x \in [0; R[\ -\dfrac{1}{S(x)} + 1 = x$
   On en déduit facilement :
   $\forall x \in [0; R[\ S(x) = \dfrac{1}{1-x}$

5. On a donc :
$\forall x \in [0;\min(R,1)[\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$
ce qui n'est pas tout à fait la situation vue en cours.
Si on note f la fonction $\begin{cases}]-1;1[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{1}{1-x} \end{cases}$ alors :
$\forall x \in [0;\min(R,1)[\ S(x) = f(x)$
Cette relation peut-être dérivée car les deux fonctions sont $\mathcal{C}^\infty$:
$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in [0;\min(R,1)[\ S^{(n)}(x) = f^{(n)}(x)$
Evaluée en 0 cela donne :
$\forall n \in \mathbb{N}\ n!\frac{u_n}{n!} = n! \times 1$
Donc :
$\forall n \in \mathbb{N}\ u_n = n!$
On en déduit $R = 1$ et :
$\forall x \in]-1;1[\ S(x) = \frac{1}{1-x}$
Remarque
L'expression de u_n est facile à justifier par récurrence au moyen de la relation initiale :
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n)$: $\forall k \in [\![0;n]\!]\ u_k = k!$
$\mathcal{P}(0)$ est vraie.
On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie.

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_k u_{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k!(n-k)! = \sum_{k=0}^{n} n! = (n+1)n! = (n+1)! \end{aligned}$$

Exercice 17 *(X 2018)*

Déterminer les deux premières décimales de $\cos(1)$.

Correction
Les deux premières décimales de $\cos(1) \in [0;1]$ sont les deux chiffres décimaux de la partie entière de $100\cos(1)$.
$\cos(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} = S_n + R_n$ avec $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!}$ et $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}$.
On vérifie facilement que le théorème des séries alternées s'applique :

- La série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{(2n)!}$ est alternée.
- La suite (u_n) converge vers 0
- La suite $(|u_n|)$ est décroissante :
  $\forall n \in \mathbb{N}\ \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \leq 1$

Donc :
$\forall n \in \mathbb{N}\ |R_n| \leq \frac{1}{(2n+2)!}$
Pour $n = 2$, $\frac{1}{(2n+2)!} = \frac{1}{6!} = \frac{1}{720} < 10^{-2}$ (et c'est la première fois).

La somme d'une série qui vérifie les hypothèses du théorème des séries alternées est comprise entre deux sommes partielles consécutives quelconques donc :
$S_3 = S_2 - \dfrac{1}{720} < \cos(1) < S_2$.
Pour pouvoir conclure, il faut que $100S_3$ et $100S_2$ aient la même partie entière, ce qui n'a rien d'évident.
$100S_2 = 100 \times \left(1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{24}\right) = 50 + \dfrac{50}{12} = 50 + \dfrac{4 \times 12 + 2}{12} = 54 + \dfrac{1}{6}$.
La partie entière de $100S_2$ est 54.
$100S_3 = 100S_2 - \dfrac{100}{720} = 54 + \dfrac{1}{6} - \dfrac{5}{36} = 54 + \dfrac{1}{36}$
La partie entière de $100S_3$ est également 54.
La réponse est donc $0,54$ (ou 5 et 4 si on préfère).