ALGEBRE LINEAIRE
PC*1
2025 - 2026
Chapitre 6 :
Espaces préhilbertiens réels et espaces euclidiens

Fabrice Monfront
Lycée du Parc

1 Produits scalaires

1.1 Définitions

- Soit E un $\mathbb{R}$ ev.
  On appelle produit scalaire sur E toute application
  $\begin{cases} E \times E \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto (x \mid y)(\text{ ou } <x,y>, x.y, xy, \text{ou } \overrightarrow{x}.\overrightarrow{y} \text{ en géométrie}) \end{cases}$
  vérifiant les propriétés suivantes :
  — linéarité à droite
  $\forall (x,y_1,y_2) \in E^3 \ \forall (\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \ (x \mid \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1 (x \mid y_1) + \lambda_2 (x \mid ty_2)$
  — linéarité à gauche
  $\forall (x_1,x_2,y) \in E^3 \ \forall (\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \ (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \mid y) = \lambda_1 (x_1 \mid y) + \lambda_2 (x_2 \mid y)$
  — symétrie
  $\forall (x,y) \in E^2 \ (x \mid y) = (y \mid x)$
  — $\forall x \in E \setminus \{0\} \ (x \mid x) > 0$

  Remarques
  — En pratique si on doit prouver qu'une application $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ est un produit scalaire sur E on vérifie la symétrie et la linéarité d'un côté car alors φ est linéaire de l'autre côté.
  — Si φ est une application bilinéaire de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$, on a :
  $\forall (x,y) \in E^2 \ \varphi(x,0) = \varphi(0,y) = 0$
  et en particulier $\varphi(0,0) = 0$.
  On peut donc dans la définition remplacer la dernière propriété par :
  $\forall x \in E \ (x \mid x) \geq 0$ et $(x \mid x) = 0 \iff x = 0$
  ou même :
  $\forall x \in E \ (x \mid x) \geq 0$ et $(x \mid x) = 0 \implies x = 0$

- On appelle espace préhilbertien réel tout $\mathbb{R}$ ev muni d'un produit scalaire.
  On appelle espace euclidien tout espace préhilbertien réel de dimension finie.
- Soit E un espace préhilbertien réel.
  Pour tout $x \in E$ on appelle norme (euclidienne) de x et on note $\|x\|$ le réel positif

$\|x\| = \sqrt{(x \mid x)}$.
D'après la dernière propriété dans la définition d'un produit scalaire on a :
$\forall x \in E \setminus \{0\} \ \ \|x\| > 0$
ou encore :
$\forall x \in E \ \ \|x\| \geq 0$ et $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$
On a également :
$\forall x \in E \ \forall \lambda \in \mathbb{R} \ \ \|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$
En effet $\|\lambda x\| = \sqrt{(\lambda x \mid \lambda x)} = \sqrt{\lambda^2 (x \mid x)} = |\lambda| \, \|x\|$
On appelle vecteur unitaire de E tout vecteur de E de norme égale à 1.
$\forall x \in E \setminus \{0\} \ \ \dfrac{x}{\|x\|}$ est un vecteur unitaire de E
(car $\left\| \dfrac{x}{\|x\|} \right\| = \dfrac{1}{|\|x\||} \, \|x\| = \dfrac{\|x\|}{\|x\|} = 1$)
Pour tous x et y dans E on appelle distance (euclidienne) de x à y et on note $d(x, y)$ le réel positif $d(x, y) = \|y - x\|$.
(En géométrie on écrit $AB = \left\| \overrightarrow{AB} \right\|$)
On a :
$\forall (x, y) \in E^2 \ d(x, y) \geq 0$ et $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$
$\forall (x, y) \in E^2 \ d(x, y) = d(y, x)$
(car $d(x, y) = \|y - x\| = \|-(x - y)\| = |-1| \, \|x - y\| = d(y, x)$)

1.2 Exemples

- L'application $\begin{cases} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ (x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n)) \mapsto (x \mid y) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{cases}$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ appelé produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$.

Démonstration

— **Symétrie**

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2 \ \ (y \mid x) = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = (x \mid y)$$

— **Linéarité à droite**

$$\begin{aligned} \forall (x, y, z) \in (\mathbb{R}^n)^3 \ \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \ (x \mid \lambda y + \mu z) &= \sum_{i=1}^{n} x_i (\lambda y_i + \mu z_i) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda x_i y_i + \mu x_i z_i) \\ &= \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \mu \sum_{i=1}^{n} x_i z_i \\ &= \lambda (x \mid y) + \mu (x \mid z) \end{aligned}$$

On en déduit la linéarité à gauche (grâce à la symétrie).

— $\forall x \in \mathbb{R}^n \ (x \mid x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq 0$

et

$$\begin{aligned}(x \mid x) = 0 &\iff \sum_{i=1}^{n} \left(x_i^2 \in \mathbb{R}_+ \right) = 0 \\ &\iff \forall i \in [\![1;n]\!]\ x_i^2 = 0 \\ &\iff \forall i \in [\![1;n]\!]\ x_i = 0 \\ &\iff x = 0\end{aligned}$$

La structure euclidienne sur $\mathbb{R}^n$ qu'on obtient ainsi est appelée structure euclidienne canonique sur $\mathbb{R}^n$.

Ecriture matricielle
Quelque soient $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ dans $\mathbb{R}$ on a :
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}^T . \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = (x_1 \ldots x_n) . \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right) \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$$
En pratique on identifie $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}$ (ie : on identifie la matrice (a) et le réel a) et on identifie $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ (ie : on écrit les éléments de $\mathbb{R}^n$ en colonnes). Le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$ s'écrit alors :

$$\boxed{\forall (X, Y) \in (\mathbb{R}^n)^2\ \ (X \mid Y) = \ X^T Y}$$

L'écriture matricielle est en général plus intéressante que l'écriture développée (ie $(x|y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$).

- **TPE 99**

1. $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.
   Montrer que $\begin{cases} \mathcal{M}^2 \to \mathbb{R} \\ (A, B) \mapsto (A|B) = \operatorname{tr}(A^T.B) \end{cases}$ est un produit scalaire.
2. Soient $A \in \mathcal{M}$ et $f \begin{cases} \mathcal{M} \to \mathcal{M} \\ M \mapsto f(M) = A.M^T.A \end{cases}$.
   Montrer que f est diagonalisable.

Correction

1. On vérifie d'abord que l'application $(. \mid .)$ est bien définie.
   Soit $(A, B) \in \mathcal{M}^2$.
   $A^T \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ donc $A^T B$ est bien définie et appartient à $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. Sa trace est bien définie.
   — **Symétrie**
   $\forall (A, B) \in \mathcal{M}^2\ (A \mid B) = \operatorname{tr}(A^T B) = \operatorname{tr}\left((A^T B)^T \right) = \operatorname{tr}(B^T A) = (B \mid A)$
   — **Linéarité à droite**
   $$\begin{aligned}\forall (A, B_1, B_2) \in \mathcal{M}^3\ \forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\ (A \mid \lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2) &= \operatorname{tr}\left(A^T(\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2) \right) \\ &= \operatorname{tr}(\lambda_1 A^T B_1 + \lambda_2 A^T B_2) \\ &= \lambda_1 \operatorname{tr}(A^T B_1) + \lambda_2 \operatorname{tr}(A^T B_2) \\ &= \lambda_1 (A \mid B_1) + \lambda_2 (A \mid B_2)\end{aligned}$$

— On en déduit la linéarité à gauche (grâce à la symétrie).
— Avant d'aller plus loin, on va développer $(A \mid B)$.

$$\begin{aligned}
\forall (A,B) \in \mathcal{M}^2 \ (A \mid B) &= \operatorname{tr}(A^T B) = \operatorname{tr}\left(\left(\sum_{k=1}^{n} (A^T)_{i,k} b_{k,j}\right)_{\substack{1\le i\le p\\1\le j\le p}}\right) \\
&= \operatorname{tr}\left(\left(\sum_{k=1}^{n} a_{k,i} b_{k,j}\right)_{\substack{1\le i\le p\\1\le j\le p}}\right) = \sum_{i=1}^{p}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{k,i} b_{k,i}\right) \\
&= \sum_{\substack{1\le i\le p\\1\le k\le n}} a_{k,i} b_{k,i}
\end{aligned}$$

En particulier :
$\forall A \in \mathcal{M}\ (A \mid A) = \sum_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}} a_{i,j}^2 \geq 0$
De plus :

$$\begin{aligned}
(A \mid A) = 0 &\iff \forall (i,j) \in [\![1;n]\!] \times [\![1;p]\!] \ a_{i,j}^2 = 0 \\
&\iff \forall (i,j) \in [\![1;n]\!] \times [\![1;p]\!] \ a_{i,j} = 0
\end{aligned}$$

2. f est bien définie :
Soit $M \in \mathcal{M}$.
$A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $M^T \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ donc le produit AM^T est bien défini et appartient à $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$.
$A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ donc le produit $AM^T A$ est bien défini et appartient à $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.
La linéarité de f est triviale.

Pour la symétrie il faut faire attention : on n'a prouvé $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$ que pour des matrices carrées.

$$\begin{aligned}
\forall (M,N) \in \mathcal{M}^2 \ (f(M) \mid N) &= \operatorname{tr}(f(M)^T N) = \operatorname{tr}(A^T M A^T N) \\
&= \operatorname{tr}\Big((A^T M)(A^T N)\Big) \text{ avec } A^T M \text{ et } A^T N \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) \\
&= \operatorname{tr}\Big((A^T N)(A^T M)\Big) = \operatorname{tr}(A^T N A^T M) = \operatorname{tr}(f(N)^T M) = (f(N) \mid M) \\
&= (M \mid f(N)) \text{ par symétrie du produit scalaire}
\end{aligned}$$

f est symétrique donc f est diagonalisable.

- Soient a et b deux réels avec $a < b$ et $E = \mathcal{C}^0([a;b], \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-ev des fonctions continues de $[a;b]$ dans $\mathbb{R}$.
L'application $\begin{cases} E \times E \to \mathbb{R} \\ (f,g) \mapsto (f \mid g) = \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \end{cases}$ est un produit scalaire sur E.

Démonstration
— **Symétrie**
$\forall (f,g) \in E^2 \ (g \mid f) = \int_a^b g(t)f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = (f \mid g)$

— **Linéarité à gauche**

$$\begin{aligned}\forall (f_1,f_2,g)\in E^3\ \forall(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2\ (\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2 \mid g) &= \int_a^b (\lambda_1 f_1(t)+\lambda_2 f_2(t))g(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \int_a^b (\lambda_1 f_1(t)g(t)+\lambda_2 f_2(t)g(t))\ \mathrm{d}t\\ &= \lambda_1\int_a^b f_1(t)g(t)\,\mathrm{d}t+\lambda_2\int_a^b f_2(t)g(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \lambda_1(f_1\mid g)+\lambda_2(f_2\mid g)\end{aligned}$$

On en déduit la linéarité à droite (grâce à la symétrie).

— $\forall f\in E\ (f\mid f)=\displaystyle\int_a^b \Big(f(t)^2\geq 0\Big)\ \mathrm{d}t\geq 0$

— Soit $f\in E$ tq $(f\mid f)=0$.
On a $\displaystyle\int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t=0$ où f^2 est une fonction continue et positive sur $[a;b]$ donc $f^2=0$ ie :
$\forall t\in[a;b]\ f^2(t)=0$
Donc :
$\forall t\in[a;b]\ f(t)=0$ ie $f=0$

Remarque
Si on prend pour E le $\mathbb{R}$-ev des fonctions continues par morceaux de $[a;b]$ dans $\mathbb{R}$ ça ne marche plus.
Soit $f\begin{cases}[a;b]\to\mathbb{R}\\ t\mapsto 0 \text{ si } t\neq a\\ a\mapsto -1\end{cases}$.
$\displaystyle\int_{[a;b]} f^2=0$ mais f n'est pas nulle.

- Soient E un espace préhilbertien réel et F un sev de E.
La restriction du produit scalaire de E à $F\times F$ ie $\begin{cases}F\times F\to\mathbb{R}\\ (x,y)\mapsto(x\mid y)\end{cases}$ est un produit scalaire sur F qui fait de F un espace préhilbertien réel.

2 Identités remarquables

Soit E un espace préhilbertien réel.

$$\forall(x,y)\in E^2\ \ \|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2+2(x\mid y) \tag{1}$$
$$\forall(x,y)\in E^2\ \ \|x-y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2-2(x\mid y) \tag{2}$$
$$\forall(x,y)\in E^2\ \ \|x\|^2-\|y\|^2=(x-y\mid x+y) \tag{3}$$

Démonstration

$$\begin{aligned}\forall(x,y)\in E^2\ \ \|x+y\|^2 &= (x+y\mid x+y)\\ &= (x\mid x+y)+(y\mid x+y) \text{ avec la linéarité à gauche}\\ &= (x\mid x)+(x\mid y)+(y\mid x)+(y\mid y) \text{ avec la linéarité à droite}\\ &= \|x\|^2+2(x\mid y)+\|y\|^2 \text{ avec la symétrie}\end{aligned}$$

En remplaçant y par $-y$, on obtient :
$\forall (x,y) \in E^2\ \ \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2(x \mid y)$ Enfin :

$$\begin{aligned} \forall (x,y) \in E^2\ (x+y \mid x-y) &= (x \mid x-y) + (y \mid x-y) \text{ avec la linéarité à gauche} \\ &= (x \mid x) - (x \mid y) + (y \mid x) - (y \mid y) \text{ avec la linéarité à droite} \\ &= \|x\|^2 - \|y\|^2 \ \text{ avec la symétrie} \end{aligned}$$

Remarques

- On peut aussi mentionner l'identité du parallélogramme :
  $\forall (x,y) \in E^2\ \ \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$
  (Il suffit d'additionner les deux premières égalités ci-dessus)
  Cette relation signifie que dans un parallélogramme la somme des carrés des diagonales est égale à la somme des carrés des côtés d'où le nom d'identité du parallélogramme.
- Connaissant la norme, on peut reconstituer les produit scalaire : c'est la polarisation :

$$\begin{aligned} \forall (x,y) \in E^2\ (x \mid y) &= \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) \end{aligned}$$

3 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Théorème

Soit E un espace préhilbertien réel.
$\forall (x,y) \in E^2\ \ |(x \mid y)| \leq \|x\|\,\|y\|$
De plus :
$|(x \mid y)| = \|x\|\,\|y\| \iff x$ et y sont colinéaires

Cas particuliers

- On prend $E = \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ $(a<b)$ muni du produit scalaire défini par :
  $(f \mid g) = \displaystyle\int_{[a,b]} f\,g$. On obtient :
  Proposition
  Soient a et b deux réels avec $a<b$.
  Pour toutes fonctions f et $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continues on a :
  $\left|\displaystyle\int_{[a,b]} f\,g\right| \leq \left(\displaystyle\int_{[a,b]} f^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\displaystyle\int_{[a,b]} g^2\right)^{\frac{1}{2}}$
  avec égalité si et seulement si $g = \lambda f$ ou $f = \lambda g$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Démonstration du théorème

Soit $(x,y) \in E^2$.
Si $y=0$, l'inégalité est triviale :
$(x \mid y) = (x \mid 0) = 0$ car $z \mapsto (x \mid z)$ est une application linéaire
$\|x\|\,\|y\| = \|x\|\,\|0\| = 0$
On suppose donc $y \neq 0$, de sorte que $\|y\|^2 > 0$.
$\forall \lambda \in \mathbb{R}\ (x+\lambda y \mid x+\lambda y) = \|x+\lambda y\|^2 \geq 0$
Donc :
$\forall \lambda \in \mathbb{R}\ \ \|y\|^2\lambda^2 + 2(x \mid y)\lambda + \|x\|^2 \geq 0$
On a un trinôme du second degré à coefficients réels et de signe constant : son discriminant est négatif.

$4(x \mid y)^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2 \leq 0$
On en déduit facilement : $|(x \mid y)| \leq \|x\|\,\|y\|$

Supposons $|(x \mid y)| = \|x\|\,\|y\|$.
Si $y = 0$ alors x et y sont colinéaires.
Si $y \neq 0$ alors le discriminant du trinôme du second degré $\|y\|^2\lambda^2 + 2(x \mid y)\lambda + \|x\|^2$ est nul donc il possède une racine (double) λ_0.
$\|x + \lambda_0 y\|^2 = \|y\|^2\lambda_0^2 + 2(x \mid y)\lambda_0 + \|x\|^2$ donc $x = -\lambda_0 y$ et x et y sont colinéaires.

Réciproquement on suppose x et y colinéaires.
Si $y = 0$ alors comme vu ci-dessus : $\|x\|\,\|y\| = (x \mid y) = 0$.
Si $y \neq 0$ alors $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tq $x = \lambda y$.
$|(x \mid y)| = |(\lambda y \mid y)| = \left|\lambda\|y\|^2\right| = |\lambda|\,\|y\|^2$
$\|x\|\,\|y\| = \|\lambda y\|\,\|y\| = |\lambda|\,\|y\|\,\|y\| = |\lambda|\,\|y\|^2$
Dans les deux cas, il y a bien égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

4 Inégalité triangulaire

Théorème
Soit E un espace préhilbertien réel.
$\forall (x,y) \in E^2 \;\; \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$
De plus :
$\|x+y\| = \|x\| + \|y\| \iff x$ et y sont $\mathbb{R}_+$-colinéaires (ie géométriquement : les vecteurs x et y sont colinéaires et de même sens)

Remarques

- L'inégalité précédente signifie que dans un triangle la longueur d'un côté est inférieure à la somme des longueurs des deux autres côtés, d'où le nom d'inégalité triangulaire.
- Récapitulons les propriétés de la norme euclidienne.

$$\begin{aligned}
&\forall x \in E \;\; \|x\| \geq 0 \text{ et } \|x\| = 0 \iff x = 0\\
&\forall x \in E \; \forall \lambda \in \mathbb{R} \;\; \|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|\\
&\forall (x,y) \in E^2 \;\; \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|
\end{aligned}$$

  En d'autres termes, la norme euclidienne est une norme (au sens du cours d'analyse).
- Récapitulons les propriétés de la distance euclidienne.
  $\forall (x,y) \in E^2 \; d(x,y) \geq 0$ et $d(x,y) = 0 \iff x = y$
  (en géométrie : $\forall (A,B) \in E^2 \; AB \geq 0$ et $AB = 0 \iff A = B$)
  $\forall (x,y) \in E^2 \; d(x,y) = d(y,x)$
  (en géométrie : $\forall (A,B) \in E^2 \; AB = BA$)
  $\forall (x,y,z) \in E^3 \; d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$
  (car $d(x,y) = \|y - x\| = \|y - z + z - x\|$)
  (en géométrie : $\forall (A,B,C) \in E^2 \; AB \leq AC + CB$)

Démonstration du théorème

$$\begin{aligned}\forall (x,y)\in E^2\ \ \|x+y\|^2 &= \|x\|^2+2(x\mid y)+\|y\|^2\\ &\leq \|x\|^2+2\,|(x\mid y)|+\|y\|^2\\ &\leq \|x\|^2+2\,\|x\|\,\|y\|+\|y\|^2 \text{ par Cauchy-Schwarz}\\ &\leq (\|x\|+\|y\|)^2\end{aligned}$$

On en déduit :
$\forall (x,y)\in E^2\ \ \|x+y\|\leq \|x\|+\|y\|$

Supposons $\|x+y\|=\|x\|+\|y\|$.
On élève au carré : $\|x\|^2+2(x\mid y)+\|y\|^2=\|x\|^2+2\,\|x\|\,\|y\|+\|y\|^2$.
On en déduit : $(x\mid y)=\|x\|\,\|y\|$.
En prenant la valeur absolue, on a : $|(x\mid y)|=\|x\|\,\|y\|$: il y a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
Si $y=0$ alors $y=0\,x$ avec $0\in\mathbb{R}_+$.
Si $y\neq 0$ alors, d'après le cas d'égalité de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tq $x=\lambda y$.
$(x\mid y)=\|x\|\,\|y\|$ donne alors : $\lambda\,\|y\|^2=|\lambda|\,\|y\|^2$.
$y\neq 0$ donc $\lambda=|\lambda|\in\mathbb{R}_+$.

Réciproquement, on suppose x et y $\mathbb{R}_+$-colinéaires.
Si $y=0$, $\|x+y\|=\|x\|=\|x\|+\|y\|$.
Si $y\neq 0$, il existe $\lambda\in\mathbb{R}_+$ tq $x=\lambda y$.
$\|x+y\|=\|(1+\lambda)y\|=|1+\lambda|\,\|y\|=(1+\lambda)\,\|y\|$
$\|x\|+\|y\|=\|\lambda y\|+\|y\|=|\lambda|\,\|y\|+\|y\|=(\lambda+1)\,\|y\|$.

5 Orthogonalité

5.1 Vecteurs orthogonaux

5.1.1 Définition

Soient E un espace préhilbertien réel et x et y deux éléments de E.
$(x\mid y)=(y\mid x)$ donc : $(x\mid y)=0\iff (y\mid x)=0$
On dit que x et y sont orthogonaux et on note $x\perp y$ si et seulement si $(x\mid y)=0$.

5.1.2 Théorème de Pythagore

Soient E un espace préhilbertien réel et x et y deux éléments de E.
$x\perp y\iff \|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2$

En effet $\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2+2(x\mid y)$.
Géométriquement ceci signifie qu'un triangle ABC est rectangle en A si et seulement si $AB^2+AC^2=BC^2$.

5.2 Sous-espaces vectoriels orthogonaux

5.2.1 Définition

Soient E un espace préhilbertien réel et E_1 et E_2 deux sev de E.
On dit que E_1 et E_2 sont orthogonaux et on note $E_1 \perp E_2$ si et seulement si :
$\forall (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2 \; x_1 \perp x_2$ (ie : tout élément de E_1 est orthogonal à tout élément de E_2)
On a aussi :
$E_1 \perp E_2 \iff \forall (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2 \; (x_1 \mid x_2) = 0$

5.2.2 Somme directe orthogonale

Soit E un espace préhilbertien réel.
Soient E_1 et E_2 deux sev orthogonaux de E.
Soit $x \in E_1 \cap E_2$.
$x \in E_1$ et $x \in E_2$ donc $x \perp x$ ie $(x \mid x) = 0$.
D'où $x = 0$.
Donc $E_1 \cap E_2 = \{0\}$ et la somme $E_1 + E_2$ est directe.

Plus généralement on a :
Proposition
Soit E un espace préhilbertien réel.
Soit I un ensemble fini et $(E_i)_{i \in I}$ une famille de sev de E deux à deux orthogonaux
(ie : $\forall (i,j) \in I^2 \; i \neq j \Rightarrow E_i \perp E_j$).
Alors la somme $\sum\limits_{i \in I} E_i$ est directe.
On note $\sum\limits_{i \in I} E_i = \bigoplus\limits_{i \in I} E_i = \underset{i \in I}{\textcircled{\scriptsize$\perp$}} E_i$ (somme directe orthogonale des E_i).
Démonstration
Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs telle que :
$\forall i \in I \; x_i \in E_i$
$\sum\limits_{i \in I} x_i = 0$

$$\begin{aligned}
\forall i \in I \; \left(x_i \mid \sum_{j \in I} x_j\right) &= (x_i \mid 0) = 0 \\
&= \sum_{j \in I} (x_i \mid x_j) = \|x_i\|^2 + \sum_{\substack{j \in I \\ j \neq i}} (x_i \mid x_j) \\
&= \|x_i\|^2 \text{ car } E_i \perp E_j \text{ si } j \neq i
\end{aligned}$$

Donc tous les x_i sont nuls.
La somme $\sum\limits_{i \in I} E_i$ est bien directe.

5.3 Orthogonal d'un sev

5.3.1 Orthogonal d'un vecteur

Soient E un espace préhilbertien réel et $x \in E$.
On appelle orthogonal de x et on note $x^{\perp}$ l'ensemble des vecteurs orthogonaux à x ie :

$x^\perp = \{y \in E \text{ tq } x \perp y\} = \{y \in E \text{ tq } (x \mid y) = 0\}$.
Si $x = 0$ on a $x^\perp = 0^\perp = E$.
Si $x \neq 0$ soit $\varphi \begin{cases} E \to \mathbb{R} \\ y \mapsto (x \mid y) \end{cases}$.
φ est une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$ et $x^\perp = \operatorname{Ker} \varphi$.
$x^\perp$ est donc un sous-espace vectoriel de E.
φ est non nulle ($\varphi(x) = \|x\|^2 > 0$) donc l'image de φ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$ non réduit à $\{0\}$. C'est donc $\mathbb{R}$ ie φ est surjective.
Si E est de dimension finie n alors $x^\perp$ est de dimension $n-1$ (par application de la formule du rang).

Que E soit de dimension finie ou infinie, que x soit nul ou pas, on a :
$E = \mathbb{R}x \bigoplus x^\perp$.
En effet :
soit $y \in \mathbb{R}x$ et $z \in x^\perp$.
$\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tq $y = \lambda x$
$(y \mid z) = \lambda (x \mid z) = \lambda\, 0 = 0$
Donc $\mathbb{R}x \perp x^\perp$.
Si $x = 0$ alors $\mathbb{R}x \bigoplus x^\perp = \{0\} \bigoplus E = E$.
On suppose $x \neq 0$.
Soit $y \in E$.
On pose $z = y - \dfrac{(y \mid x)}{\|x\|^2} x$.
$(z \mid x) = (y \mid x) - \dfrac{(y \mid x)}{\|x\|^2}(x \mid x) = (y \mid x) - (y \mid x) = 0$ donc $z \perp x$.
Donc $y = \dfrac{(y \mid x)}{\|x\|^2} x + z \in \mathbb{R}x \bigoplus x^\perp$.

5.3.2 Orthogonal d'un sev

Soient E un espace préhilbertien réel et F un sev de E.
On appelle orthogonal de F et on note $F^\perp$ l'ensemble des vecteurs de E orthogonaux à tous les vecteurs de F.
On a donc : $F^\perp = \{y \in E \text{ tq } \forall x \in F\ x \perp y\} = \{y \in E \text{ tq } \forall x \in F\ (x \mid y) = 0\} = \bigcap\limits_{x \in F} x^\perp$.
On en déduit que $F^\perp$ est un sev de E.
Comme on a clairement $F \perp F^\perp$ on a $F \cap F^\perp = \{0\}$ et $F + F^\perp = F \oplus F^\perp = F \bigoplus F^\perp$.

Soit G un sev de E.
On a :
$F \perp G \iff G \subset F^\perp$
$F^\perp$ est le plus grand (au sens de l'inclusion) sev de E orthogonal à F.

Exemple
$E^\perp = \{0\}$

5.4 Supplémentaires orthogonaux

5.4.1 Définition

Soit E un espace préhilbertien réel.
Deux sev F et G de E sont dits supplémentaires orthogonaux si et seulement si on a $E = F \overset{\perp}{\oplus} G$

On va montrer qu'on a alors $G = F^{\perp}$ (et $F = G^{\perp}$).
$E = F \overset{\perp}{\oplus} G$ donc $G \perp F$ et $G \subset F^{\perp}$
Soit $x \in F^{\perp}$.
$E = F \overset{\perp}{\oplus} G$ donc :
$\exists (x_F, x_G) \in F \times G$ tq $x = x_F + x_G$.
$x_F = x - x_G$ avec $x \in F^{\perp}$ et $x_G \in G \subset F^{\perp}$ donc $x_F \in F^{\perp}$.
Comme x_F appartient aussi à F, $x_F = 0$ et $x = x_G \in G$.
D'où $F^{\perp} \subset G$.

On en déduit $(F^{\perp})^{\perp}$ noté $F^{\perp\perp} = F$

5.4.2 Supplémentaire orthogonal d'un sev

Soient E un espace préhilbertien réel et F un sev de E.
On dit que F admet un supplémentaire orthogonal si et seulement si il existe G sev de E tel que $F \overset{\perp}{\oplus} G = E$.
D'après ce qui précède si F possède un supplémentaire orthogonal il est unique car c'est $F^{\perp}$. On dit alors que $F^{\perp}$ est *le* supplémentaire orthogonal de F. F est alors le supplémentaire orthogonal de $F^{\perp}$ et on a $F = F^{\perp\perp}$. Mais en général un sev de E n'a pas de supplémentaire orthogonal ie en général $F \overset{\perp}{\oplus} F^{\perp} \subsetneq E$.

Exemple (Mines 2004) :
On définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ par :

$$(P \mid Q) = \int_0^1 P(t)\, Q(t)\, \mathrm{d}t$$

Soit $F = X\,\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes qui admettent zéro comme racine. Que dire de $F^{\perp}$?

Soit $P \in F^{\perp}$.
Le polynôme XP appartient à F donc $(XP \mid P) = \displaystyle\int_0^1 tP(t)^2\, \mathrm{d}t = 0$.
Mais la fonction $t \mapsto tP(t)^2$ est continue et positive donc :
$\forall t \in [0;1]\ tP(t)^2 = 0$
P a donc une infinité de racines et $P = 0$.
On a donc $F^{\perp} = \{0\}$ et $F \overset{\perp}{\oplus} F^{\perp} = F \subsetneq \mathbb{R}[X]$.

5.4.3 Projecteurs orthogonaux

Définition
Soit E un espace préhilbertien réel.
On appelle projecteur orthogonal de E tout projecteur $p \in \mathcal{L}(E)$ tel que :
$E = \operatorname{Ker} p \overset{\perp}{\oplus} \operatorname{Im} p$.

Comme on sait que pour un projecteur on a $E = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Im} p$ on peut écrire :
Soit $p \in \mathcal{L}(E)$.
p est un projecteur orthogonal $\iff \begin{cases} p^2 = p \\ \operatorname{Ker} p \perp \operatorname{Im} p \end{cases}$
Soit F un sev de E.
Si F possède un supplémentaire orthogonal, on peut définir la projection sur F parallèlement à $F^\perp$. C'est une projection orthogonale qu'on appellera simplement projection orthogonale sur F.

5.4.4 Cas d'un sev de dimension finie

Soient E un espace préhilbertien réel et F un sev de E de dimension finie.
$F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp = E$

Démonstration
Soit $x \in E$.
Soit $f \begin{cases} F \to \mathbb{R} \\ y \mapsto \|x-y\|^2 = \|y-x\|^2 \end{cases}$.
f est continue et :
$\forall y \in F \ \ \|y\| \leq \|y-x\| + \|x\|$
Donc :
$\forall y \in F \ f(y) \geq \|y\| - \|x\|$
D'où $f(y) \xrightarrow[\|y\| \to +\infty]{} +\infty$
Il existe $R \in \mathbb{R}_+$ tel que :
$\forall y \in F \ \ \|y\| \geq R \Longrightarrow f(y) \geq f(0)$.
La fonction f est continue sur $K = \{y \in F \text{ tq } \|y\| \leq R\}$ qui est une partie fermée, bornée et non vide de F.
Comme F est de dimension finie, il existe $y_0 \in K$ tel que :
$\forall y \in K \ f(y) \geq f(y_0)$
En particulier $f(0) \geq f(y_0)$ car $0 \in K$
On considère alors y un élément de F.
Si $y \in K$ alors $f(y) \geq f(y_0)$.
Si $y \notin K$ alors $\|y\| > R$ et $f(y) \geq f(0) \geq f(y_0)$.
On a donc :
$\forall y \in F \ f(y) \geq f(y_0)$
On verra plus tard que cela entraîne la nullité du gradient de f en y_0 et comment calculer ce gradient.
Pour l'instant, en l'absence de calcul différentiel, on peut procéder ainsi :
Soit $y \in F$.
$\forall t \in \mathbb{R} \ f(y_0 + ty)^2 \geq f(y_0)^2$
Donc :
$\forall t \in \mathbb{R} \ \ \|y_0 - x + ty\|^2 \geq \|y_0 - x\|^2$
Donc :
$\forall t \in \mathbb{R} \ \ \|y_0 - x\|^2 + 2t(y_0 - x \mid y) + t^2 \|y\|^2 \geq \|y_0 - x\|^2$
Donc :
$\forall t \in \mathbb{R} \ 2t(y_0 - x \mid y) + t^2 \|y\|^2 \geq 0$

Si y est nul alors $(y_0 - x \mid y) = 0$
Si y est non nul, on a un trinôme du second degré de signe constant donc :
$\Delta = 4(y_0 - x \mid y)^2 \leq 0$
On en déduit $(y_0 - x \mid y) = 0$.
Donc $y_0 - x \in F^\perp$ et $x = y_0 + x - y_0 \in F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp$.

$F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp = E$ donc on peut définir la projection orthogonale sur F, qu'on note p.
Avec les notations de la démonstration $p(x) = y_0$ et on a :
$\forall x \in E\ \forall y \in F\ \ \|x - y\| \geq \|x - p(x)\|$
On a même :
$\forall x \in E\ \forall y \in F \setminus \{p(x)\}\ \ \|x - y\| > \|x - p(x)\|$
En effet, si on reprend la démonstration, on voit que si $y_1 \in F$ vérifie :
$\forall y \in F\ \ \|x - y\| \geq \|x - y_1\|$
alors $x - y_1 \perp F$ donc $x = y_1 + x - y_1$ avec $y_1 \in F$ et $x - y_1 \in F^\perp$ ce qui entraîne $y_1 = y_0 = p(x)$.
On retrouve également avec Pythagore, la formule vue en Sup :
$\forall x \in E\ \ \|x\|^2 = \|p(x)\|^2 + \|x - p(x)\|^2 = \|p(x)\|^2 + d(x, F)^2$

Dimensions
Soit E un espace euclidien.
Soit F un sev de E.
On a :
$\dim E = \dim F + \dim F^\perp$ et $F = F^{\perp\perp}$.

En effet F est de dimension finie comme sev d'un ev de dimension finie donc :
$E = F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp = F \oplus F^\perp$.
D'où $\dim E = \dim F + \dim F^\perp$.

En particulier, si F est un hyperplan de E, $F^\perp$ est une droite.
On appelle vecteur normal à F tout vecteur non nul de cette droite.
Il n'y a pas unicité d'un vecteur normal à F, même en le prenant unitaire, mais les vecteurs normaux à F sont tous colinéaires.

Exemples

- Déterminer $\inf\limits_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \displaystyle\int_0^1 (x^2 - ax - b)^2 \, \mathrm{d}x$.

  Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$.
  On définit un produit scalaire sur E en posant :
  $\forall (P, Q) \in E^2\ (P \mid Q) = \displaystyle\int_0^1 P(x)Q(x) \, \mathrm{d}x$
  (vérifications faciles)
  On a alors : $\displaystyle\int_0^1 (x^2 - ax + b)^2 \, \mathrm{d}x = \left\| X^2 - (aX + b) \right\|^2$.
  $F = \mathrm{Vect}(1, X)$ étant un sous-espace de dimension finie de E, $\inf\limits_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \displaystyle\int_0^1 (x^2 - ax - b)^2 \, \mathrm{d}x$ est en fait un minimum atteint une fois et une seule lorsque $aX + b$ est le projeté orthogonal de X^2 sur F.
  Ce projeté orthogonal est caractérisé par $\begin{cases} aX + b \in F \\ X^2 - (aX + b) \perp F \end{cases}$.

On doit donc résoudre le système $\begin{cases}(X^2-(aX+b)\mid 1)=0\\(X^2-(aX+b)\mid X)=0\end{cases}$.

$$\begin{cases}a(X\mid 1)+b(1\mid 1)=(X^2\mid 1)\\a(X\mid X)+b(1\mid X)=(X^2\mid X)\end{cases} \iff \begin{cases}\frac{1}{2}a+b=\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}a+\frac{1}{2}b=\frac{1}{4}\end{cases}$$
$$\iff \begin{cases}\frac{1}{2}a+b=\frac{1}{3}\\-\frac{1}{6}b=\frac{1}{36}\end{cases} \quad L_2\leftarrow L_2-\frac{2}{3}L_1$$
$$\iff \begin{cases}a=1\\b=-\frac{1}{6}\end{cases}$$

La borne inférieure cherchée est alors :

$$\begin{aligned}d &= \left\|X^2-(aX+b)\right\|^2=\left\|X^2\right\|^2-\|aX+b\|^2 \text{ par Pythagore}\\&= \frac{1}{5}-a^2\|X\|^2-2ab(1\mid X)-b^2\|1\|^2\\&= \frac{1}{5}-\frac{1}{3}+\frac{1}{6}-\frac{1}{36}\\&= \frac{1}{180}\end{aligned}$$

- $E=\mathcal{C}^0([0;1],\mathbb{R})$ est muni du produit scalaire défini par $(f\mid g)=\displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$.
  Soit $F=\left\{f\in E \text{ tq } \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t=0\right\}$.
  Déterminer $F^\perp$.

  Soit $f_0\begin{cases}[0;1]\to\mathbb{R}\\t\mapsto 1\end{cases}$.
  $F=f_0^\perp=(\mathbb{R}f_0)^\perp$ avec $\mathbb{R}f_0$ sev de dimension finie de E.
  Donc $F^\perp=(\mathbb{R}f_0)^{\perp\perp}=\mathbb{R}f_0$.

6 Bases orthonormées

6.1 Familles orthogonales

6.1.1 Définitions

Soient E un espace préhilbertien réel et $(e_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de E.
On dit que la famille $(e_i)_{i\in I}$ est orthogonale si et seulement si :
$\forall(i,j)\in I^2\ i\neq j\Rightarrow e_i\perp e_j$
On dit que la famille $(e_i)_{i\in I}$ est orthonormale si et seulement si :
$\begin{cases}\text{elle est orthogonale}\\\forall i\in I\ \ \|e_i\|=1\end{cases}$

6.1.2 Propriétés

Soit E un espace préhilbertien réel.

- **Relation de Pythagore**
  Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille orthogonale de E.
  On a :
  $\|e_1 + \cdots + e_n\|^2 = \|e_1\|^2 + \cdots + \|e_n\|^2$
  (Si $n \geq 3$ la réciproque est fausse)

  Plus généralement si I est un ensemble fini non vide et $(e_i)_{i\in I}$ une famille orthogonale on a :
  $\left\|\sum_{i\in I} e_i\right\|^2 = \sum_{i\in I} \|e_i\|^2$
  Démonstration
  Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille orthogonale de E.

$$\begin{aligned}
\|e_1 + \cdots + e_n\|^2 &= \left(\sum_{i=1}^{n} e_i \mid \sum_{i=1}^{n} e_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(e_i \mid e_j) = \sum_{i=1}^{n}(e_i \mid e_i) + 2\sum_{1\leq i<j\leq n}(e_i \mid e_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \|e_i\|^2
\end{aligned}$$

  Si $n \geq 3$, $\displaystyle\sum_{1\leq i<j\leq n}(e_i|e_j)$ contient $\dfrac{n(n-1)}{2} \geq 3$ termes. Elle peut donc être nulle sans que chaque terme soit nul.
- Toute famille orthogonale formée de vecteurs non nuls est libre.
  On en déduit que toute famille orthonormale est libre.

  Démonstration
  Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille orthogonale de vecteurs non nuls de E.
  Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tq $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0$.
  $\left(e_i \mid \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j\right) = (e_i \mid 0) = 0$
  Mais $\left(e_i \mid \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j\right) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \lambda_j (e_i \mid e_j) = \lambda_i \|e_i\|^2$ avec $\|e_i\|^2 \neq 0$ donc $\lambda_i = 0$.
  La famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est bien libre.

6.2 Bases orthonormales

6.2.1 Définition

Soit E un espace euclidien.
On appelle base orthonormale (ou orthonormée) de E toute base de E qui est en même temps

une famille orthonormale.

Exemple
On considère $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique et $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ $(e_i = (0, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$ le 1 étant en $i^{\text{ième}}$ position).
Soit $(i, j) \in [\![1; n]\!]^2$ tels que $i \neq j$.
$(e_i \mid e_j) = 0.0 + \cdots + 1.0(i) + 0.0 + \cdots + 0.1(j) + 0.0 + \cdots + 0.0 = 0$
$\forall i \in [\![1; n]\!]$ $(e_i \mid e_i) = 0.0 + \cdots + 0.0 + 1.1(i) + 0.0 + \cdots + 0.0 = 1$
La famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est orthonormée.
La base canonique de $\mathbb{R}^n$ est donc une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ (muni de sa structure euclidienne canonique).

Remarque
Soient E un ev euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille de n éléments de E.
On a :
$(e_1, \ldots, e_n)$ BON de $E \iff$ les e_i sont unitaires et 2 à 2 orthogonaux.
(En effet une famille ON est libre et toute famille libre de n vecteurs de E est une base de E)

6.3 Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille libre de E espace préhilbertien réel.
D'après les paragraphes précédents, on peut définir pour tout $k \in [\![1; n]\!]$, la projection orthogonale sur $\text{Vect}(e_1, \ldots, e_k)$. On la note p_k.
La famille $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)$ définie par :

$$\begin{cases} \epsilon_1 = e_1 \\ \forall k \in \{2; \ldots; n\} \ \epsilon_k = e_k - p_{k-1}(e_k) \end{cases}$$

est une famille orthogonale de vecteurs non nuls vérifiant en outre :
$\forall k \in [\![1; n]\!]$ $\text{Vect}(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_k) = \text{Vect}(e_1, \ldots, e_k)$
On l'appelle orthogonalisée de Gram-Schmidt de $(e_1, \ldots, e_n)$.
La famille $\left(\dfrac{\epsilon_1}{\|\epsilon_1\|}, \ldots, \dfrac{\epsilon_n}{\|\epsilon_n\|}\right) = (\epsilon'_1, \ldots, \epsilon'_n)$ est une famille orthonormée vérifiant en outre :
$\forall k \in [\![1; n]\!]$ $\text{Vect}(\epsilon'_1, \ldots, \epsilon'_k) = \text{Vect}(e_1, \ldots, e_k)$
On l'appelle orthonormalisée de Gram-Schmidt de $(e_1, \ldots, e_n)$.

6.4 Cas d'un espace de dimension finie

6.4.1 Existence de BON

Proposition
Soit E un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.
Alors E possède au moins une BON.

En effet si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E (donc une famille libre) son orthonormalisée $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)$ est une BON de E.

6.4.2 Théorème de la BON incomplète

Soient E un espace euclidien de dimension $n \geq 2$ et $p \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leq p \leq n - 1$.
Soit $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_p)$ une famille orthonormale de E.

Alors il existe $\epsilon_{p+1}, \ldots, \epsilon_n$ $n-p$ éléments de E tels que $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)$ soit une BON de E.

En effet, il existe $e_{p+1}, \ldots, e_n$ dans E tels que $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_p, e_{p+1}, \ldots, e_n)$ soit une base de E (donc une famille libre). Il ne reste plus alors qu'à orthonormaliser cette famille (ce qui laisse inchangés $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_p$).

6.4.3 Proposition

Soit E un ev euclidien de dimension ≥ 2.
Soit F un sev de E de dimension p avec $1 \leq p \leq n-1$.
Soient $(e_1, \ldots, e_p)$ une BON de F et $(e_{p+1}, \ldots, e_n)$ une BON de $F^\perp$.
Alors $(e_1, \ldots, e_n)$ est une BON de E.

Démonstration
On a clairement : $\forall i \in [\![1; n]\!]$ $\|e_i\| = 1$
Soient i et $j \in [\![1; n]\!]$ distincts.
Si i et $j \in \{1; \ldots; p\}$, $(e_i \mid e_j) = 0$ car $(e_1, \ldots, e_p)$ est une base orthonormée de F.
Si i et $j \in \{p+1; \ldots; n\}$, $(e_i \mid e_j) = 0$ car $(e_{p+1}, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée de $F^\perp$.
Si un des deux appartient à $\{1; \ldots; p\}$ et l'autre à $\{p+1; \ldots; n\}$, $(e_i \mid e_j) = 0$ car $F \perp F^\perp$.
$(e_1, \ldots, e_n)$ est une famille orthonormée de n vecteurs de E de dimension n donc c'est une base orthonormée de E.

Plus généralement on a :
Proposition
Soient E un ev euclidien et $E_1, \ldots, E_n$ n sev de E tels que $E = \overset{n}{\underset{i=1}{\textcircled{\perp}}} E_i$.
Pour tout $i \in [\![1; n]\!]$ on pose $d_i = \dim E_i$ qu'on suppose ≥ 1.
Soit $(e_1, \ldots, e_{d_1})$ une BON de E_1.
Soit $(e_{d_1+1}, \ldots, e_{d_1+d_2})$ une BON de E_2.
$\vdots$
Soit $(e_{d_1+\cdots+d_{n-1}+1}, \ldots, e_{d_1+\cdots+d_n=\dim E})$ une BON de E_n.
Alors $(e_1, \ldots, e_{\dim E})$ est une BON de E.

6.4.4 Expression du produit scalaire dans une BON d'un espace euclidien

Soient E un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une BON de E.
Soient $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E$ et X la matrice colonne de ses coordonnées dans $\mathcal{B}$.
Soient $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i \in E$ et Y la matrice colonne de ses coordonnées dans $\mathcal{B}$.
On a :

$$\boxed{(x \mid y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = {}^tXY}$$

On en déduit :

$$\boxed{\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{{}^tXX}}$$

$$\boxed{d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - x_i)^2}}$$

On a de plus :
$(e_i \mid x) = \sum_{j=1}^{n} x_j (e_i \mid e_j) = x_i \|e_i\|^2 = x_i$
On peut donc écrire :

$$\forall x \in E\ x = \sum_{i=1}^{n}(e_i \mid x)e_i$$

Si f est un endomorphisme de E alors :
$\forall j \in [\![1;n]\!]\ f(e_j) = \sum_{i=1}^{n}(e_i \mid f(e_j))e_i$
Donc la matrice de f dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$ est la matrice $((e_i \mid f(e_j)))_{1\leq i,j\leq n}$.
En particulier, la trace de f est $\sum_{i=1}^{n}(e_i \mid f(e_i))$.

Exemple
Centrale maths 2 2018
On considère l'application $\begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ (M,N) \mapsto \operatorname{tr}(M^T N) \end{cases}$.

1. Montrer que c'est un produit scalaire.
   Que dire de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?
2. Soient E un espace euclidien et f un endomorphisme de E.
   Exprimer $\operatorname{tr}(f)$ avec une base orthonormée de E.
3. On se place dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.
   Soit φ_A définie par $\varphi_A(M) = AM + MA$.
   (a) Ecrire un programme donnant $\operatorname{tr}(\varphi_A)$.
   (On écrira au préalable une fonction définissant le produit scalaire de la première question).

```
import numpy as np
import numpy.linalg as alg

def ps(M,N):
    MT=np.transpose(M)
    MTN=np.dot(MT,N)
    return np.trace(MTN)

def tr(A):
    n=len(A)
    s=0
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            E=np.zeros((n,n))
            E[i,j]=1
            phiAE=np.dot(A,E)+np.dot(E,A)
            s+=ps(E,phiAE)
```

```
        return s
```

(b) Calculer $\operatorname{tr}(\varphi_A)$ pour $A = A_1, A_2$ et A_3.

A_1 ressemblait à $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Il fallait faire une conjecture.

La suite portait sur des projecteurs.

Correction

1. Produit scalaire : traité plus haut.
   La base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthonormée.
2. $\operatorname{tr}(f) = \sum_{i=1}^{n} (e_i|f(ei))$
3. (a)
```
import numpy as np
import numpy.linalg as alg

def ps(M,N):
    MT=np.transpose(M)
    MTN=np.dot(MT,N)
    return np.trace(MTN)

def tr(A):
    n=len(A)
    s=0
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            E=np.zeros((n,n))
            E[i,j]=1
            phiAE=np.dot(A,E)+np.dot(E,A)
            s+=ps(E,phiAE)
    return s
```
   (b)
```
A=np.array([[1,1,-1,0],[1,1,-1,0],[1,1,-1,0],[-1,-1,1,0]])
print(tr(A),np.trace(A))
```

(c)

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}(\varphi_A) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(E_{i,j}|\varphi_A(E_{i,j}))\\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\operatorname{tr}\left(E_{j,i}(AE_{i,j}+E_{i,j}A)\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\operatorname{tr}(E_{j,i}AE_{i,j})+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\operatorname{tr}(E_{j,i}E_{i,j}A)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\operatorname{tr}(AE_{i,j}E_{j,i}))+\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\operatorname{tr}(E_{j,j}A)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\operatorname{tr}(AE_{i,i})+n\sum_{j=1}^{n}\operatorname{tr}(E_{j,j}A)\\
&= n\sum_{i=1}^{n}\operatorname{tr}(AE_{i,i})+n\sum_{j=1}^{n}\operatorname{tr}(E_{j,j}A)\\
&= 2n\sum_{i=1}^{n}a_{i,i}\\
&= 2n\operatorname{tr}(A)
\end{aligned}$$

6.4.5 Retour sur les projections orthogonales

Soit E un espace préhilbertien réel.
Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit p la projection orthogonale sur F.
Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une BON de F.
$\forall x \in E\ p(x) = \sum_{i=1}^{n}(e_i \mid x)e_i$

En effet :

$$\begin{aligned}
\forall x \in E\ \forall i \in [\![1;n]\!]\ \left(e_i \mid x-\sum_{j=1}^{n}(e_j \mid x)e_j\right) &= (e_i \mid x)-\sum_{j=1}^{n}(e_j \mid x)(e_i \mid e_j)\\
&= (e_i \mid x)-(e_i \mid x)\left\|e_i\right\|^2 \text{ car les autres termes sont nuls}\\
&= 0
\end{aligned}$$

Donc $x-\sum_{j=1}^{n}(e_j \mid x)e_j \perp F$ car il est orthogonal aux vecteurs d'une base de F.
Donc $x = \left(\sum_{j=1}^{n}(e_j \mid x)e_j \in F\right)+\left(x-\sum_{j=1}^{n}(e_j \mid x)e_j \in F^{\perp}\right)$.

7 Isométries vectorielles

7.1 Définition

Un endomorphisme d'un espace euclidien E est une isométrie vectorielle s'il conserve la norme.

C'est la définition du programme, on peut l'expliciter ainsi :

Soient E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E.
u isométrie vectorielle $\iff \forall x \in E \; \|u(x)\| = \|x\|$

La présence d'une racine carrée peut compliquer les vérifications. Il est souvent plus commode d'utiliser le carré de la norme. On a de manière immédiate :
Soient E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E.
u isométrie vectorielle $\iff \forall x \in E \; \|u(x)\|^2 = \|x\|^2$

7.2 Exemple : les symétries orthogonales

7.2.1 Définition

Soit E un ev euclidien.
Soit s une symétrie de E. (Rappel : s est la symétrie par rapport à $F = \operatorname{Ker}(s - Id_E)$ parallèlement à $G = \operatorname{Ker}(s + Id_E)$ avec $E = F \oplus G$)
On dit que s est une symétrie orthogonale si et seulement si :
$E = \operatorname{Ker}(s - Id_E) \bigoplus^{\perp} \operatorname{Ker}(s + Id_E) = F \bigoplus^{\perp} G$
On dit alors que s est la symétrie orthogonale par rapport à $F = \operatorname{Ker}(s - Id_E)$.

7.2.2 Caractérisation des symétries orthogonales parmi les symétries

Soient E un ev euclidien et s une symétrie de E.
s est une symétrie orthogonale $\iff$ s est une isométrie vectorielle.
Démonstration

- $\implies$
  Soit $x \in E$.
  $\exists!(x_F, x_G) \in F \times G$ tq $x = x_F + x_G$.
  $s(x) = x_F - x_G$

$$\begin{aligned} \|s(x)\|^2 &= \|x_F - x_G\|^2 \\ &= \|x_F\|^2 + \|x_G\|^2 \text{ Pythagore } F \perp G \text{ donc } x_F \perp -x_G \\ &= \|x_F + x_G\|^2 \text{ même principe} \\ &= \|x\|^2 \end{aligned}$$

  s conserve la norme et $s \in \mathcal{L}(E)$ donc s est une isométrie vectorielle.

- $\impliedby$
  Il s'agit uniquement de prouver $F \perp G$: on sait déjà que $E = F \oplus G$
  Soient $x_F \in F$ et $x_G \in G$.
  $\|s(x_F + x_G)\|^2 = \|x_F + x_G\|^2$
  Donc $\|s(x_F) + s(x_G)\|^2 = \|x_F + x_G\|^2$

Donc $\|x_F - x_G\|^2 = \|x_F + x_G\|^2$
Donc $\|x_F\|^2 + \|x_G\|^2 - 2(x_F|x_G) = \|x_F\|^2 + \|x_G\|^2 + 2(x_F|x_G)$
Donc $(x_F|x_G) = 0$.

7.2.3 Cas particulier : les réflexions

Soient E un ev euclidien de dimension $n \geq 2$ et H un hyperplan de E.
On appelle réflexion d'hyperplan H la symétrie orthogonale par rapport à H.

Expression vectorielle
Soit s la réflexion par rapport à H.
Soient a un vecteur unitaire normal à H.
On cherche une expression de $s(x)$ où $x \in E$.
Soit $x \in E$.
On a $x + s(x) \in H = a^\perp$ et $x - s(x) \in \mathbb{R}a$.
D'où :
$\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tq $x - s(x) = \lambda a$
$s(x) = x - \lambda a$
$x + s(x) = 2x - \lambda a$
Mais $x + s(x) \in a^\perp$ donc $(2x - \lambda a|a) = 0$
$2(x|a) - \lambda \|a\|^2 = 0$
Donc $\lambda = 2\dfrac{(a|x)}{\|a\|^2}$ et :
$s(x) = x - 2\dfrac{(a|x)}{\|a\|^2}a$: expression générale dans le cas où on suppose simplement $a \neq 0$
$s(x) = x - 2(a|x)a$ ici car on suppose $\|a\| = 1$.

7.3 Automorphismes orthogonaux

Soient E un ev euclidien et u une isométrie vectorielle.
Soit $x \in \operatorname{Ker} u$.
$\|x\|^2 = \|u(x)\|^2 = \|0\|^2 = 0$ donc $x = 0$.
$\operatorname{Ker} u = \{0\}$ donc u est injective.
Mais E est de dimension finie donc u est bijective et u est un automorphisme de E (ie $u \in GL(E)$).

Les isométries vectorielles de E sont des automorphismes de E. Bien entendu, la réciproque est fausse (cf $u = \lambda id$ avec $\lambda \neq -1, 0, 1$).

Les isométries vectorielles sont aussi appelées **automorphismes orthogonaux**.
Je cite le programme :

> On mentionne la terminologie "automorphisme orthogonal" tout en lui préférant celle d"'isométrie vectorielle".

7.4 Caractérisation des isométries vectorielles par la conservation du produit scalaire

Soient E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$.
u isométrie vectorielle $\iff \forall (x, y) \in E^2\ (u(x)|u(y)) = (x|y)$

En d'autres termes les isométries vectorielles de E sont les endomorphismes de E qui conservent le produit scalaire.

Démonstration

- $\Longrightarrow$
  Soit $(x, y) \in E^2$.
  $\|u(x+y)\|^2 = \|x+y\|^2$ car u est une isométrie vectorielle.
  $\|u(x)+u(y)\|^2 = \|x+y\|^2$
  $\|u(x)\|^2 + \|u(y)\|^2 + 2(u(x)|u(y)) = \|x\|^2 + \|u(y)\|^2 + 2(x|y)$
  On simplifie et il reste $(u(x)|u(y)) = (x|y)$
- $\Longleftarrow$: trivial
  $\forall x \in E\ \ \|u(x)\|^2 = (u(x)|u(x)) = (x|x) = \|x\|^2$
  Donc u est une isométrie vectorielle.

7.5 Remarques

- Si u est une isométrie vectorielle de E alors u conserve les distances :

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in E^2\ d(u(x), u(y)) &= \|u(y) - u(x)\| = \|u(y - x)\| \\ &= \|y - x\| = d(x, y) \end{aligned}$$

  Réciproquement si u conserve les distances et si $u(0) = 0$ alors u est un automorphisme orthogonal.

  Centrale 2003
  Soient E un ev euclidien et $u : E \to E$ telle que $u(0) = 0$ et
  $\forall (x, y) \in E^2\ \ \|u(x) - u(y)\| = \|x - y\|$.

  1. (a) Montrer : $\forall x \in E\ \ \|u(x)\| = \|x\|$
     (b) Montrer : $\forall (x, y) \in E^2\ \ < u(x)|u(y) >=< x|y >$
     (c) Montrer : $\forall x \in E\ u(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} < x|e_i > u(e_i)$ où $(e_1, \ldots, e_n)$ est une BON de E.
     (d) Montrer que u est un automorphisme orthogonal.
  2. Soit $u : E \to E$ telle que $\forall (x, y) \in E^2\ \ \|u(x) - u(y)\| = \|x - y\|$.
     Montrer que u est une isométrie affine [1].

  Correction

  1. (a) $\forall x \in E\ \ \|u(x)\| = \|u(x) - 0\| = \|u(x) - u(0)\| = \|x - 0\| = \|x\|$
     u conserve la norme.
     (b) $\forall (x, y) \in E^2\ \ \|u(x) - u(y)\|^2 = \|u(x)\|^2 + \|u(y)\|^2 - 2(u(x)|u(y))$
     $\forall (x, y) \in E^2\ \ \|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2(x|y)$
     On égalise et il reste :
     $\forall (x, y) \in E^2\ (u(x)|u(y)) = (x|y)$
     u conserve le produit scalaire.

1. cette notion n'est plus au programme

(c)

$$\begin{aligned}\forall (i,j) \in [\![1;n]\!] \ (u(e_i)|u(e_j)) &= (e_i|e_j) \text{ d'après la question précédente} \\ &= \delta_{i,j}\end{aligned}$$

$(u(e_1),\ldots,u(e_n))$ est une famille ON de E.
Vu le nombre de vecteurs, c'est une BON de E.
Donc :
$\forall x \in E \ u(x) = \sum_{i=1}^{n}(u(x)|u(e_i))u(e_i) = \sum_{i=1}^{n}(x|e_i)u(e_i)$

(d) Sous cette forme, la linéarité de u est à peu près claire.
u est donc un endomorphisme de E qui conserve le produit scalaire.
u est un automorphisme orthogonal.

2. Soit $v = t_{-u(0)} \begin{cases} E \to E \\ x \mapsto x - u(0) \end{cases}$

Soit $w = v \circ u \begin{cases} E \to E \\ x \mapsto u(x) - u(0) \end{cases}$

$w(0) = 0$

$$\begin{aligned}\forall (x,y) \in E^2 \ \|w(x) - w(y)\| &= \|u(x) - u(0) - (u(y) - u(0))\| = \|u(x) - u(y)\| \\ &= \|x - y\|\end{aligned}$$

D'après ce qui précède, w est un automorphisme orthogonal de E.
Donc $u = v^{-1} \circ w = t_{u(0)} \circ w$ est une isométrie affine (comme composée de deux applications affines).
Par contre, u n'est pas forcément un automorphisme orthogonal (u n'est pas forcément linéaire), c'est le cas en particulier des translations (de vecteur non nul).

- Soient E un ev euclidien et u une application de E dans E qui conserve le produit scalaire.
Alors u est linéaire.
(Cf 1.(c) et (d) de l'exercice précédent)
On peut dire que les automorphismes orthogonaux de E sont les applications de E dans E qui conservent le produit scalaire.
- Si $u : E \to E$ conserve uniquement la norme u n'est pas forcément un automorphisme orthogonal.
Par exemple soient $a \in E \setminus \{0\}$ et $u \begin{cases} E \to E \\ x \mapsto x \text{ si } x \neq a \\ a \mapsto -a \end{cases}$.
- **Conservation de l'orthogonalité**
Mines 2018
Soit E un espace euclidien et s un endomorphisme de E.
Montrer l'équivalence entre les assertions :
(i) il existe un réel λ tel que pour tout $(x,y) \in E^2$, $\langle s(x), s(y)\rangle = \lambda \langle x, y\rangle$
(ii) pour tout $(x,y) \in E^2$, $\langle x, y\rangle = 0 \Longrightarrow \langle s(x), s(y)\rangle = 0$
Correction
— $(i) \Longrightarrow (ii)$
Trivial.

— $(ii) \Longrightarrow (i)$
Soit x et y deux vecteurs non nuls de E.
$y = \dfrac{\langle x, y\rangle}{\|x\|^2}x + z$ avec z orthogonal à x (penser au cours sur les projections orthogonales).
$s(y) = \dfrac{\langle x, y\rangle}{\|x\|^2}s(x) + s(z)$
D'après (ii), z est orthogonal à x donc $s(z)$ est orthogonal à $s(x)$.
Donc $\langle s(x), s(y)\rangle = \dfrac{\|s(x)\|^2}{\|x\|^2}\langle x, y\rangle$
On peut inverser le rôle de x et de y donc : $\langle s(x), s(y)\rangle = \dfrac{\|s(y)\|^2}{\|y\|^2}\langle x, y\rangle$
On a donc : $\dfrac{\|s(x)\|^2}{\|x\|^2}\langle x, y\rangle = \dfrac{\|s(y)\|^2}{\|y\|^2}\langle x, y\rangle$.
Si x et y ne sont pas orthogonaux alors $\dfrac{\|s(x)\|^2}{\|x\|^2} = \dfrac{\|s(y)\|^2}{\|y\|^2}$.
Supposons x et y orthogonaux.
$\langle x, x+y\rangle = \|x\|^2 > 0$ et $\langle y, x+y\rangle = \|y\|^2 > 0$ donc :
$\dfrac{\|s(x)\|^2}{\|x\|^2} = \dfrac{\|s(x+y)\|^2}{\|x+y\|^2} = \dfrac{\|s(y)\|^2}{\|y\|^2}$
Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :
$\forall x \in E \setminus \{0\}\ \dfrac{\|s(x)\|^2}{\|x\|^2} = \lambda$
On a alors, pour tous x et $y \in E \setminus \{0\}$, $\langle s(x), s(y)\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$
C'est trivial si x ou $y = 0$.

Autre méthode
Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une BON de E.
Si $i \neq j$, $(e_i|e_j) = 0$ donc $(s(e_i)|s(e_j)) = 0$.

$$\begin{aligned}
\forall (x,y) \in E^2\ (s(x)|s(y)) &= \left(s\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right)|s\left(\sum_{i=1}^n y_i e_i\right)\right) \\
&= \left(\sum_{i=1}^n x_i s(e_i)|\sum_{i=1}^n y_i s(e_i)\right) \\
&= \sum_{i=1}^n x_i y_i \|s(e_i)\|^2 \text{ vue la remarque initiale}
\end{aligned}$$

Mais pour $i \neq j$:

$$\begin{aligned}
\|s(e_i)\|^2 - \|s(e_j)\|^2 &= (s(e_i) - s(e_j)|s(e_i) + s(e_j)) \\
&= (s(e_i - e_j)|s(e_i + e_j)) \\
&= 0 \text{ car } e_i + e_j \perp e_i - e_j
\end{aligned}$$

D'où le résultat avec $\lambda = \|s(e_i)\|^2$.

Remarque
$\lambda \geq 0$: c'est évident avec la deuxième méthode et avec la première, on prend $x = y$

et on a $\|s(x)\|^2 = \lambda \|x^2\|$.
Si $\lambda = 0$ alors $s = 0$.
Si $\lambda > 0$: $\dfrac{s}{\sqrt{\lambda}} \in O(E)$.

7.6 Caractérisation des isométries vectorielles par l'image des BON

7.6.1 Proposition

Soient E un ev euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.
Il y a équivalence entre :

i u est une isométrie vectorielle de E

ii $\exists (e_1, \ldots, e_n)$ BON de E tq $(u(e_1), \ldots, u(e_n))$ soit une BON de E

iii pour toute BON $(e_1, \ldots, e_n)$ de E, $(u(e_1), \ldots, u(e_n))$ est une BON de E

Démonstration

i$\Longrightarrow$ iii Cf la question 1.c. de l'exercice de Centrale du paragraphe 5.1.6.

iii$\Longrightarrow$ ii trivial

ii$\Longrightarrow$ i Soit $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E$.

$u(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i u(e_i)$ et $(u(e_1), \ldots, u(e_n))$ est une BON de E donc :

$\|u(x)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \|x\|$

u est un endomorphisme de E qui conserve la norme donc u est une isométrie vectorielle de E.

7.6.2 Corollaire

Soit E un ev euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.
Soient $(e_1, \ldots, e_n)$ et $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)$ 2 BON de E.
Il existe une et une seule isométrie vectorielle u de E telle que :
$\forall i \in [\![1; n]\!]\ u(e_i) = \epsilon_i$

En effet $(e_1, \ldots, e_n)$ étant une base de E on sait qu'il existe un et un seul endomorphisme u de E tel que :
$\forall i \in [\![1; n]\!]\ u(e_i) = \epsilon_i$
et d'après ce qui précède u est alors une isométrie vectorielle.

7.7 Groupe orthogonal

Soit E un ev euclidien.
On appelle groupe orthgonal de E et on note $\mathrm{O}(E)$ l'ensemble des automorphismes orthogonaux de E.
Les propriétés essentielles du groupe orthogonal sont :

- $\mathrm{O}(E) \subset GL(E)$
- $\mathrm{O}(E) \neq \emptyset$ car $Id_E \in \mathrm{O}(E)$

- **Stabilité par $\circ$:**
  Soit $(u,v) \in \mathrm{O}(E)^2$.

$$\begin{array}{rcl}\forall (x,y) \in E^2 \ (u \circ v(x) | u \circ v(y)) & = & (u(v(x))|u(v(y))) \\ & = & (v(x)|v(y)) \text{ car } u \in \mathrm{O}(E) \\ & = & (x|y) \text{ car } v \in \mathrm{O}(E)\end{array}$$

  Donc $u \circ v \in \mathrm{O}(E)$ et $\mathrm{O}(E)$ est stable par $\circ$.
- **Stabilité par passage à l'inverse**
  Soit $u \in \mathrm{O}(E)$.

$$\begin{array}{rcl}\forall (x,y) \in E^2 \ (u^{-1}(x)|u^{-1}(y)) & = & \Big(u(u^{-1}(x))|u(u^{-1}(y))\Big) \text{ car } u \in \mathrm{O}(E) \\ & = & (x|y)\end{array}$$

  Donc $u^{-1} \in \mathrm{O}(E)$ et $\mathrm{O}(E)$ est stable par passage à l'inverse.

7.8 Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable

Soient E un ev euclidien et u une isométrie vectorielle.
Soit F un sev de E stable par u.
Alors $F^\perp$ est stable par u.

Démonstration
Soit $x \in F^\perp$.

$$\begin{array}{rcl}\forall y \in F \ (u(x)|u(y)) & = & (x|y) \text{ car } u \text{ est une isométrie vectorielle} \\ & = & 0 \text{ car } x \in F^\perp \text{ et } y \in F\end{array}$$

Donc $u(x) \perp u(F)$.
Mais F est stable par u donc $u(F) \subset F$.
De plus u est un automorphisme donc $\dim(u(F)) = \dim(F)$.
D'où $u(F) = F$.
Donc $u(x) \perp F$ ie $u(x) \in F^\perp$.
$F^\perp$ est bien stable par u.

8 Matrices orthogonales

8.1 Définition

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite orthogonale si, et seulement si, $A^T A = I_n$.

8.2 Interprétation en termes de colonnes

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Le coefficient à l'intersection de la i-ème ligne et de la j-ème colonne de $M^T M$ est :
$\sum\limits_{k=1}^{n} m_{k,i} m_{k,j}$
ie le produit scalaire de la i-ème et de la j-ème colonne de M.

Par conséquent, si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:
A est orthogonale $\iff$ ses colonnes forment une famille orthonormée de $\mathbb{R}^n$
et comme le nombre de colonnes de A est égal à la dimension de $\mathbb{R}^n$:
A est orthogonale $\iff$ ses colonnes forment une BON de $\mathbb{R}^n$

8.3 Matrices orthogonales : interprétation en termes de lignes

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Il y a équivalence entre :

(i) A est orthogonale

(ii) $AA^T = I_n$

(iii) Les lignes de A forment une famille orthonormée de $\mathbb{R}^n$

(iv) Les lignes de A forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$

Démonstration

$(i) \Longrightarrow (ii)$ On suppose A orthogonale.
Par définition $A^TA = I_n$ donc A est inversible et $A^{-1} = A^T$.
Donc $AA^T = AA^{-1} = I_n$.

$(ii) \Longrightarrow (iii)$ Le produit scalaire de la i-ème et de la j-ème ligne de A est :
$\sum_{k=1} a_{i,k}a_{j,k} = \sum_{k=1} a_{i,k}(A^T)_{k,j} = (AA^T)_{i,j} = \delta_{i,j}$
Donc les lignes de A forment une famille orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

$(iii) \Longrightarrow (iv)$ Le nombre de lignes de A est égal à la dimension de $\mathbb{R}^n$ donc si les lignes de A forment une famille orthonormée de $\mathbb{R}^n$ alors elles forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

$(iv) \Longrightarrow (i)$ $(AA^T)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}a_{j,k} = (L_i(A) \mid L_j(A)) = \delta_{i,j}$
Donc $AA^T = I_n$.
Donc A est inversible et $A^T = A^{-1}$.
On en déduit $A^TA = A^{-1}A = I_n$ et A est une matrice orthgonale.

Remarque
En général, une matrice ne commute pas avec sa transposée.

8.4 Caractérisation comme matrice de changement de base orthonormée

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
A est une matrice orthogonale $\iff$ il existe deux BON $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^n$ telles que A soit la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{C}$.

Démonstration
On suppose que A est orthogonale.
Les colonnes de A forment une BON de $\mathbb{R}^n$.
A est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^n$, qui est orthonormée, vers la base formée par les colonnes de A, qui est elle aussi orthonormée.
Réciproquement, on suppose qu'il existe $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{C} = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$ deux BON de $\mathbb{R}^n$ telles que A soit la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{C}$:

$\forall j \in [\![1;n]\!]\ \epsilon_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i$

$$\begin{aligned}(A^T A)_{i,j} &= \sum_{k=1}^{n} a_{k,i} a_{k,j} \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n} a_{k,i} e_k \mid \sum_{k=1}^{n} a_{k,j} e_k\right) \text{ expression du produit scalaire en BON} \\ &= (\epsilon_i \mid \epsilon_j) = \delta_{i,j}\end{aligned}$$

Donc $A^T A = I_n$ et A est une matrice orthogonale.

8.5 Changement de base orthonormale

Soit E un ev euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.
Soient $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux bases orthonormales de E.
Soit $P_{1,2}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$.
D'après ce qui précède, $P_{1,2}$ est une matrice orthogonale.
Soit $x \in E$.
Soit X_1 la matrice colonne de ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}_1$.
Soit X_2 la matrice colonne de ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}_2$.
On a :
$X_1 = P_{1,2} X_2$ et $X_2 = P_{2,1} X_1 = P_{1,2}^{-1} X_1$ d'où $X_2 = P_{1,2}^T X_1$.
Soient $v \in \mathcal{L}(E)$ et $A_i = \text{Mat}_{\mathcal{B}_i} v$ $(i = 1, 2)$.
On a :
$A_2 = P_{2,1} A_1 P_{1,2} = P_{1,2}^{-1} A_1 P_{1,2}$
D'où $A_2 = P_{1,2}^T A_1 P_{1,2}$ et de même $A_1 = P_{1,2} A_2 P_{1,2}^T$.
Par rapport à un changement de base ordinaire on économise l'inversion de la matrice de passage $P_{1,2}$.

8.6 Caractérisation des automorphismes orthogonaux à l'aide de leurs matrices dans les BON

Soient E un ev euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.

$$\begin{aligned} u \in \mathrm{O}(E) &\iff \text{il existe } \mathcal{B} \text{ BON de } E \text{ tq } \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} u \text{ est une matrice orthogonale} \\ &\iff \text{pour toute BON } \mathcal{B} \text{ de } E\ \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} u \text{ est une matrice orthogonale}\end{aligned}$$

Démonstration

- $(1) \Longrightarrow (3)$
  On suppose que $u \in O(E)$.
  Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une BON de E.
  Soit $M = Mat_{\mathcal{B}}(u)$.
  $\forall j \in [\![1;n]\!]\ u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} m_{i,j} e_i$

$$\begin{aligned}\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2\ \left(M^T M\right)_{i,j} &= \sum_{k=1}^{n} \left(M^T\right)_{i,k} M_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} m_{k,i} m_{k,j} \\ &= (u(e_i) | u(e_j)) \text{ expression du produit scalaire en BON} \\ &= (e_i | e_j) = \delta_{i,j}\end{aligned}$$

Donc $M^T M = I_n$ et $M \in O(n)$.
- (3) $\Longrightarrow$ (2) : trivial
- (2) $\Longrightarrow$ (1)
  Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une BON de E telle que $M = Mat_{\mathcal{B}}(u) \in O(n)$.

$$\begin{aligned} \forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2 \ (u(e_i)|u(e_j)) &= \left(M^T M\right)_{i,j} \text{ cf le calcul précédent} \\ &= \delta_{i,j} \text{ car } M^T M = I_n \end{aligned}$$

  $(u(e_1), \ldots, u(e_n))$ est une famille ON de n vecteurs en dimension n donc $(u(e_1), \ldots, u(e_n))$ est une BON de E.
  D'après ?, $u \in O(E)$.

Remarque
La base canonique étant une base orthonormée, on a pour A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:
A est orthogonale $\Longleftrightarrow$ l'endomorphisme canoniquement associé à A est un automorphisme orthogonal

8.7 Groupe orthogonal

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On appelle groupe orthgonal d'ordre n et on note $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ ou $O(n)$ l'ensemble des matrices orthogonales à n lignes et n colonnes.
Les propriétés essentielles du groupe orthogonal sont :
- $\mathrm{O}(n) \subset GL_n(\mathbb{R})$
- $\mathrm{O}(n) \neq \emptyset$ car $I_n \in \mathrm{O}(n)$
- **Stabilité par produit matriciel** :
  Soit $(A, B) \in \mathrm{O}(n)^2$.

$$\begin{aligned} (AB)^T (AB) &= (B^T A^T)(AB) = B^T (A^T A) B \\ &= B^T I_n B = B^T B \text{ car } A \in \mathrm{O}(n) \\ &= I_n \text{ car } B \in \mathrm{O}(n) \end{aligned}$$

  Donc $AB \in \mathrm{O}(n)$ et $\mathrm{O}(n)$ est stable par produit matriciel.
- **Stabilité par passage à l'inverse**
  Soit $A \in \mathrm{O}(n)$.
  On a déjà vu que l'inverse de A est A^T.

$$\begin{aligned} \left(A^{-1}\right)^T A^{-1} &= \left(A^T\right)^T A^T = AA^T \\ &= I_n \end{aligned}$$

  Donc $A^{-1} \in \mathrm{O}(n)$ et $\mathrm{O}(n)$ est stable par passage à l'inverse.

8.8 Déterminant d'une matrice orthogonale

$\forall M \in \mathrm{O}(n) \ |\det M| = 1$

En effet on a $M^T M = I_n$ d'où en prenant le déterminant $(\det M)^2 = 1$.

Remarque

Il existe des matrices orthogonales de déterminant égal à 1 (I_n par exemple) et des matrices orthogonales de déterminant égal à -1 ($\mathrm{Diag}(1,\dots,1,-1)$ par exemple).

Exemple : déterminant d'une symétrie orthogonale
Soit E un espace euclidien de dimension n.
Soit F un sev de E et s la symétrie orthogonale par rapport à F.
Si $F = E$ alors $s = id_E$ et $\det s = 1$.
Si $F = \{0\}$ alors $s = -id_E$ et $\det s = (-1)^{\dim E}$.
On suppose donc $p = \dim F \in [\![1; n-1]\!]$.
$E = F \bigoplus F^T$.
Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une BON de F et $(e_{p+1}, \dots, e_n)$ une BON de $F^\perp$.
$\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une BON de E.
$Mat_{\mathcal{B}}(s) = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_{n-p} \end{pmatrix}$ donc :

$$\begin{aligned} \det s &= \begin{vmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_{n-p} \end{vmatrix} = \det(I_p) \times \det(-I_{n-p}) = (-1)^{n-p} \\ &= (-1)^{\dim E - \dim F} \end{aligned}$$

Remarque
Soient $n \geq 2$ et $M = \mathrm{Diag}(2, 1/2, 1, \dots, 1) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
$\det M = 1$ mais M n'est pas une matrice orthogonale.

8.9 Groupe spécial orthogonal

On note $\mathrm{SO}(n)$ ou $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales à n lignes et n colonnes de déterminant égal à 1.
Les propriétés essentielles du groupe spécial orthogonal sont :

- $\mathrm{SO}(n) \subset \mathrm{O}(n)$
- $\mathrm{SO}(n) \neq \emptyset$
- $\mathrm{SO}(n)$ est stable par le produit matriciel :
  Soit $(M, N) \in \mathrm{SO}(n)^2$
  $\det(MN) = \det(M)\det(N) = 1 \times 1 = 1$ donc $MN \in \mathrm{SO}(n)$
- $\mathrm{SO}(n)$ est stable par passage à l'inverse :
  Soit $M \in \mathrm{SO}(n)$.
  $\det(M^{-1}) = \dfrac{1}{\det(M)} = \dfrac{1}{1} = 1$ donc $M^{-1} \in \mathrm{SO}(n)$.

8.10 Déterminant d'un automorphisme orthogonal

Ce paragraphe n'est pas mentionné dans le programme.
Soit E un ev euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.
$\forall u \in \mathrm{O}(E) \ \ |\det u| = 1$

Démonstration
Soit $\mathcal{B}$ une BON de E et $M = Mat_{\mathcal{B}} u$.
D'après ?, $M \in \mathrm{O}(n)$.
D'après ?, $|\det M| = 1$
Mais $\det u = \det M$ donc $|\det u| = 1$

Remarque
Soient E un ev euclidien de dimension $n \geq 2$, $\mathcal{B}$ une BON de E et $u \in \mathcal{L}(E)$ tq $Mat_{\mathcal{B}}(u) = diag(2, 1/2, 1, \dots, 1)$.
$\det u = 1$ mais u n'est pas une isométrie vectorielle de E.

8.11 Orientation d'un espace euclidien

8.11.1 Remarque préliminaire

Soit E un espace euclidien de dimension n.
Si $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ sont deux bases orthonormées de E, $\det_{\mathcal{B}_2}(\mathcal{B}_1)$ qui est égal au déterminant de la matrice de passage de $\mathcal{B}_2$ à $\mathcal{B}_1$ vaut 1 ou -1.

8.11.2 Orientation d'un espace euclidien

Soit E un espace euclidien de dimension n.
Concrètement, orienter l'espace E c'est choisir une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E. On appelle alors bases orthonormées directes les bases orthonormées $\mathcal{C}$ de E telles que $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) = 1$ et bases orthonormées indirectes de E les bases $\mathcal{C}$ de E telles que $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) = -1$.
En pratique, une fois orienté E, on se restreint à ne travailler qu'avec des bases orthonormées directes.

9 Isométries vectorielles d'un plan euclidien

9.1 Détermination des matrices orthogonales à deux lignes et deux colonnes

Les matrices de O(2) sont :

i les matrices de la forme $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$, $\theta \in \mathbb{R}$ (ou $[0; 2\pi[$ ou $]-\pi; \pi]$).
($\theta = 0$ donne I_2, $\theta = \pi$ donne $-I_2$)

ii les matrices de la forme $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$, $\theta \in \mathbb{R}$ (ou $[0; 2\pi[$ ou $]-\pi; \pi]$).

Les matrices de SO(2) sont les matrices de la forme $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$, $\theta \in \mathbb{R}$ (ou $[0; 2\pi[$ ou $]-\pi; \pi]$).

Démonstration
Soit $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in O(2)$.
Les colonnes de M sont unitaires donc : $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1$.
Donc :
$\exists(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2$ (ou $[0; 2\pi[^2$ ou $[-\pi; \pi[^2$ avec en plus unicité) tq $\begin{cases} a = \cos(\theta_1) & c = \cos(\theta_2) \\ b = \sin(\theta_1) & d = \sin(\theta_2) \end{cases}$
Mais les colonnes de M sont orthogonales donc $ac + bd = 0$.
Donc : $\cos(\theta_1)\cos(\theta_2) + \sin(\theta_1)\sin(\theta_2) = 0$
Donc : $\cos(\theta_1 - \theta_2) = 0$
Donc : $\theta_1 - \theta_2 = \frac{\pi}{2} - 2k\pi$ ou $\theta_1 - \theta_2 = -\frac{\pi}{2} - 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

- **Premier cas :** $\theta_2 = \theta_1 + \dfrac{\pi}{2}(2\pi)$
  $M = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1) & -\sin(\theta_1) \\ \sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) \end{pmatrix}$
- **Deuxième cas :** $\theta_2 = \theta_1 - \dfrac{\pi}{2}(2\pi)$
  $M = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1) & \sin(\theta_1) \\ \sin(\theta_1) & -\cos(\theta_1) \end{pmatrix}$

Réciproquement :

$$\begin{aligned} \forall\theta \in \mathbb{R} \quad & \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) & -\cos(\theta)\sin(\theta) + \sin(\theta)\cos(\theta) \\ -\sin(\theta)\cos(\theta) + \cos(\theta)\sin(\theta) & \sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) \end{pmatrix} \\ &= I_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall\theta \in \mathbb{R} \quad & \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) & \cos(\theta)\sin(\theta) - \sin(\theta)\cos(\theta) \\ \sin(\theta)\cos(\theta) - \cos(\theta)\sin(\theta) & \sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) \end{pmatrix} \\ &= I_2 \end{aligned}$$

Déjà :

$$O(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \theta \in \mathbb{R} \right\} \bigcup \left\{ \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}, \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

Pour déterminer $SO(2)$, on calcule le déterminant de ces matrices :

$\forall\theta \in \mathbb{R} \quad \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{vmatrix} = \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$

$\forall\theta \in \mathbb{R} \quad \begin{vmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{vmatrix} = -\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) = -1$

Donc :

$$SO(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

9.2 Commutativité de SO(2)

Le produit matriciel est commutatif dans SO(2) :
$\forall (A, B) \in \mathrm{SO}(2)^2 \ AB = BA$

Plus précisément, si on note $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ on a :
$\forall (\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \ R_\theta R_\varphi = R_{\theta+\varphi}$

Démonstration

$$\begin{aligned}\forall(\theta,\varphi)\in\mathbb{R}^2\ R_\theta R_\varphi &= \begin{pmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos(\phi) & -\sin(\phi)\\ \sin(\phi) & \cos(phi)\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\cos(\theta)\cos(\phi)-\sin(\theta)\sin(\phi) & -\cos(\theta)\sin(\phi)-\sin(\theta)\cos(\phi)\\ \sin(\theta)\cos(\phi)+\cos(\theta)\sin(\phi) & \sin(\theta)\sin(\phi)+\cos(\theta)\cos(\phi)\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\cos(\theta+\phi) & -\sin(\theta+\phi)\\ \sin(\theta+\phi) & \cos(\theta+\phi)\end{pmatrix}\\ &= R_{\theta+\phi}\end{aligned}$$

On en déduit alors par récurrence :
$\forall\theta\in\mathbb{R}\ \forall n\in\mathbb{N}\ \begin{pmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix}\cos(n\theta) & -\sin(n\theta)\\ \sin(n\theta) & \cos(n\theta)\end{pmatrix}$
De plus R_θ étant une matrice orthogonale, son inverse est égale à sa transposée.
Mais $R_\theta^T = R_{-\theta}$ donc $R_\theta^{-1} = R_{-\theta}$
On en déduit alors pour $n\in\mathbb{N}$:
$R_\theta^{-n} = (R_\theta^{-1})^n = (R_{-\theta})^n = R_{-n\theta}$ et finalement :

$\forall\theta\in\mathbb{R}\ \forall n\in\mathbb{Z}\ \begin{pmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix}\cos(n\theta) & -\sin(n\theta)\\ \sin(n\theta) & \cos(n\theta)\end{pmatrix}$
Soit alors $A = \begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}$ avec $(a,b)\in\mathbb{R}^2$.
On suppose $(a,b)\neq(0,0)$ (sinon A est la matrice nulle dont il n'y a pas grand chose à dire).
On a rencontré dans le cours sur les suites récurrentes le calcul des puissances de cette matrice.
$\exists\theta\in\mathbb{R}$ tq $\begin{cases}a = r\cos(\theta)\\ b = r\sin(\theta)\end{cases}$ avec $r=\sqrt{a^2+b^2}>0$
$A = rR_\theta$ donc :
$\forall n\in\mathbb{Z}\ A^n = r^n R_{n\theta}$

9.3 Rotation vectorielle d'un plan euclidien orienté

9.3.1 Définition

Soit E un plan euclidien orienté.
On appelle rotation vectorielle de E toute isométrie vectorielle de E dont le déterminant est égal à 1.

9.3.2 Angle d'une rotation vectorielle

Soit E un plan vectoriel orienté.
Soit ρ une rotation vectorielle de E.
Il existe un réel θ tel que la matrice de ρ dans toute base orthonormée directe de E est $R_\theta = \begin{pmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}$.
θ s'appelle l'angle de la rotation vectorielle ρ.
Il est unique à 2π près.

Démonstration
Soit $\mathcal{B}$ une BOND de E.
Soit M la matrice de ρ dans la base $\mathcal{B}$.
$\mathcal{B}$ étant orthonormée, M est une matrice orthogonale.
ρ étant de déterminant 1, M l'est aussi et $M \in SO(2)$.
Donc, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $M = R_\theta$.
Soit alors $\mathcal{C}$ une autre BOND de E.
Soit P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{C}$.
$\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont orthonormées donc P est une matrice orthogonale.
$\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont directes donc $\det(P) = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) = 1$ et P appartient aussi à $SO(2)$.
Donc il existe $\phi \in \mathbb{R}$ tel que $P = R_\phi$.
Soit N la matrice de ρ dans $\mathcal{C}$.
$N = P^{-1}MP = P^{-1}PM$ car le produit matriciel est commutatif dans $SO(2)$.
D'où $N = P$.

9.3.3 Mesure d'un angle orienté de vecteurs unitaires d'un plan euclidien orienté

Soit E un plan euclidien orienté.
Soit u et v deux vecteurs unitaires de E.
Il existe une et une seule rotation vectorielle de E qui envoie u sur v.
On appelle mesure de l'angle orienté (u, v) l'angle de cette rotation.

Démonstration

- **Unicité**
  Supposons qu'il existe deux rotations vectorielles ρ_1 et ρ_2 telles que $\rho_1(u) = \rho_2(u) = v$.
  $\rho = \rho_2^{-1} \circ \rho_1$ est une rotation vectorielle ($SO(2)$ est stable par produit matriciel et passage à l'inverse).
  De plus $\rho(u) = u$ donc 1 est valeur propre de ρ.
  Mais le polynôme caractéristique de la matrice $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ est $X^2 - 2\cos(\theta)X + 1 = \left(X - \mathrm{e}^{i\theta}\right)\left(X - \mathrm{e}^{-i\theta}\right)$ donc $1 = \mathrm{e}^{i\theta}$ ou $1 = \mathrm{e}^{-i\theta}$.
  De toute façon, $\theta = 0$ et $\rho = id_E$.
  Donc $\rho_1 = \rho_2$ et il y a unicité.
- **Existence**
  Soit $\mathcal{B}$ une BOND de E.
  Soit w un vecteur unitaire orthogonal à u.
  $\det_{\mathcal{B}}((u, -w)) = -\det_{\mathcal{B}}((u, w))$ donc, quitte à changer w en $-w$, on peut supposer que (u, w) est directe.
  Soit (x, y) les coordonnées de v dans la base (u, w).
  $\|v\| = 1$ donc $x^2 + y^2 = 1$ et il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} x = \cos(\theta) \\ y = \sin(\theta) \end{cases}$.
  Soit ρ la rotation vectorielle dont la matrice dans la base (u, w) est R_θ.
  $\rho(u) = v$

9.3.4 Mesure d'un angle orienté de vecteurs non nuls d'un plan euclidien orienté

Soit E un plan euclidien orienté.
Soit u et v deux vecteurs non nuls de E.

On appelle mesure de l'angle orienté (u, v), la mesure de l'angle orienté $\left(\frac{u}{\|u\|}, \frac{v}{\|v\|}\right)$.

9.4 Classification des isométries vectorielles d'un plan euclidien

Soient E un plan vectoriel euclidien et u une isométrie vectorielle.
$\det(u) = \pm 1$

- **Premier cas :** $\det(u) = 1$
  u est une rotation.
  Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E.
  Il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ soit $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.
  Soit $\mathcal{C}$ une autre base orthonormée de E.
  Si $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) = 1$ alors la matrice de u dans la base $\mathcal{C}$ est R_θ.
  Si $\det_B(\mathcal{C}) = -1$ alors il existe $\phi \in \mathbb{R}$ tel que la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{C}$ soit $S_\phi = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}$
  D'où $Mat_{\mathcal{C}}(u) = S_\phi^T R_\theta S_\phi = S_\phi R_\theta S_\phi = R_{-\theta}$.
  En effet :

$$\begin{aligned}
\forall(\theta,\phi) \in \mathbb{R}^2 \ R_\theta S_\phi &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ \sin(\phi) & -\cos(\phi) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(\theta)\cos(\phi) - \sin(\theta)\sin(\phi) & \cos(\theta)\sin(\phi) + \sin(\theta)\cos(\phi) \\ \sin(\theta)\cos(\phi) + \cos(\theta)\sin(\phi) & \sin(\theta)\sin(\phi) - \cos(\theta)\cos(\phi) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(\theta+\phi) & \sin(\theta+\phi) \\ \sin(\theta+\phi) & -\cos(\theta+\phi) \end{pmatrix} \\
&= S_{\theta+\phi}
\end{aligned}$$

$$\forall(\theta,\phi) \in \mathbb{R}^2 \ S_\phi R_\theta S_\phi = S_\phi S_{\theta+\phi} = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ \sin(\phi) & -\cos(\phi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta+\phi) & \sin(\theta+\phi) \\ \sin(\theta+\phi) & -\cos(\theta+\phi) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} \cos(\phi)\cos(\theta+\phi) - \sin(\phi)\sin(\theta+\phi) & \cos(\phi)\sin(\theta+\phi) - \sin(\phi)\cos(\theta+\phi) \\ \sin(\phi)\cos(\theta+\phi) - \cos(\phi)\sin(\theta+\phi) & \cos(\phi)\cos(\theta+\phi) - \sin(\phi)\sin(\theta+\phi) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(\phi-(\theta+\phi)) & \sin(\theta+\phi-\phi) \\ \sin(\phi-(\theta+\phi)) & \cos(\phi-(\theta+\phi)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} \\
&= R_{-\theta}
\end{aligned}$$

  L'angle de la rotation u n'est défini qu'une fois le plan euclidien orienté. Il est changé en son opposé lorsqu'on change l'orientation.
- **Deuxième cas :** $\det(u) = -1$
  Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E.
  Il existe $\phi \in \mathbb{R}$ tel que la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ soit $S_\phi = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ \sin(\phi) & -\cos(\phi) \end{pmatrix}$.
  $S_\phi^2 = I_2$ (cf le calcul ci-dessus avec $\theta = 0$)
  Donc $u^2 = id_E$ et u est une symétrie orthogonale.
  $0 = \mathrm{tr}(u) = \dim(E_1(u)) - (2 - \dim(E_1(u))) = 2\dim(E_1(u)) - 2$ donc $\dim(E_1(u)) = 1$
  u est une symétrie orthogonale par rapport à une droite, donc une réflexion en dimension 2.

10 Réduction des endomorphismes autoadjoints et des matrices symétriques réelles

10.1 Définition des endomorphismes autoadjoints

Soit E un ev euclidien.
On appelle endomorphisme autoadjoint de E tout endomorphisme u de E vérifiant :

$$\boxed{\forall (x,y) \in E^2 \ (u(x)|y) = (x|u(y))}$$

Je cite le programme :

On mentionne la terminologie "endomorphisme symétrique", tout en lui préférant celle d'"endomorphisme autoadjoint"

10.2 Exemples d'endomorphismes autoadjoints

- **Homothéties**
  Toute homothétie d'un ev euclidien est autoadjointe.
  En effet si $\lambda \in \mathbb{R}$ on a :
  $\forall (x,y) \in E^2 \ (\lambda x|y) = (x|\lambda y)$

- **Projections orthogonales**
  Soient E un ev euclidien et $p \in \mathcal{L}(E)$.
  p est un projecteur orthogonal de $E \iff \begin{cases} p^2 = p \\ p \text{ est autoadjoint} \end{cases}$
  En d'autres termes les projecteurs orthogonaux de E sont les projecteurs autoadjoints.
  Ce résultat figure explicitement au programme.
  Notons au passage que, contrairement à ce que leur nom pourrait laisser croire, **les projecteurs orthogonaux ne sont pas des automorphismes orthogonaux**.

  Démonstration
  — $\Longrightarrow$
  Soit p un projecteur orthogonal de E.
  p est un projecteur donc $p^2 = p$.
  p est un projecteur orthogonal donc $E = \mathrm{Ker}\,(p) \bigoplus^{\perp} \mathrm{Im}\,(p)$.
  Soit $(x,y) \in E^2$.
  $\exists! (x_I, x_K) \in \mathrm{Im}\,(p) \times \mathrm{Ker}\,(p)$ tq $x = x_I + x_K$
  $\exists! (y_I, y_K) \in \mathrm{Im}\,(p) \times \mathrm{Ker}\,(p)$ tq $y = y_I + y_K$
  $(p(x)|y) = (x_I|y_I + y_K) = (x_I|y_I) + (x_I|y_K)$
  $x_I \in \mathrm{Im}\,(p)$ et $y_K \in \mathrm{Ker}\,(p) = (\mathrm{Im}\,(p))^{\perp}$ donc $(x_I|y_K) = 0$ et $(p(x)|y) = (x_I|y_I)$
  $(x|p(y)) = (x_I + x_K|y_I) = (x_K|y_I) + (x_I|y_I)$
  $y_I \in \mathrm{Im}\,(p)$ et $x_K \in \mathrm{Ker}\,(p) = (\mathrm{Im}\,(p))^{\perp}$ donc $(x_K|y_I) = 0$ et $(x|p(y)) = (x_I|y_I)$
  p est bien autoadjoint.
  — $\Longleftarrow$
  $p^2 = p$ donc p est un projecteur.
  Soient $x_K \in \mathrm{Ker}\,(p)$ et $x_I \in \mathrm{Im}\,(p)$.
  $x_I \in \mathrm{Im}\,(p)$ donc :

$\exists x \in E$ tq $x_I = p(x)$
$(x_K|x_I) = (x_K|p(x)) = (p(x_K)|x)$ car p est autoadjoint.
Mais $p(x_K) = 0$ donc $(x_K|x_I) = 0$.
Donc $\mathrm{Ker}\,(p) \perp \mathrm{Im}\,(p)$.
Donc p est un projecteur orthogonal de E.

Remarque
Soit u un endomorphisme autoadjoint de E.
Le même raisonnement que ci-dessus montre que $\mathrm{Ker}\,(u) \perp \mathrm{Im}\,(u)$.
On a alors :
$\dim(\mathrm{Ker}\,(u) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im}\,(u)) = \dim(\mathrm{Ker}\,(u)) + \dim(\mathrm{Im}\,(u)) = \dim E$ par la formule du rang.
Donc $E = \mathrm{Ker}\,(u) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im}\,(u)$.
Ce résultat ne figure pas au programme.

- **Symétries orthogonales**
Soient E un ev euclidien et $s \in \mathcal{L}(E)$.
s est une symétrie orthogonale de $E \iff \begin{cases} s^2 = Id_E \\ s \text{ est autoadjointe} \end{cases}$
En d'autres termes les symétries orthogonales de E sont les symétries autoadjointes.

Démonstration
— $\Longrightarrow$
Soit s une symétrie orthogonale de E.
s est une symétrie donc $s^2 = id_E$.

$$\begin{array}{rcll} \forall (x,y) \in E^2\ (s(x)|y) & = & (s(s(x))|s(y)) & s \text{ est une symétrie orthogonale donc } s \in O(E) \\ & = & (x|s(y)) & \end{array}$$

s est bien autoadjointe.
— $\Longleftarrow$
$s^2 = id_E$ donc s est une symétrie.
Soit $x \in \mathrm{Ker}\,(s - id_E)$ et $y \in \mathrm{Ker}\,(s + id_E)$.

$$\begin{array}{rcl} (x|y) & = & (s(x)|y) = (x|s(y)) \text{ car } s \text{ est autoadjointe} \\ & = & (x|-y) = -(x|y) \end{array}$$

Donc $(x|y) = 0$.
Donc $\mathrm{Ker}\,(s - id_E) \perp \mathrm{Ker}\,(s + id_E)$.
s est bien une symétrie orthogonale.

10.3 Caractérisation des endomorphismes autoadjoints à l'aide de leurs matrices dans les BON

Soient E un ev euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.
Il y a équivalence entre :

i u est autoadjoint

ii il existe $\mathcal{B}$ BON de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est symétrique

iii pour toute BON $\mathcal{B}$ de E, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est symétrique

Si on fixe une BON de E, on prouve alors que l'ensemble des endomorphismes autoadjoints de E est un sev de $\mathcal{L}(E)$ isomorphe au sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices symétriques donc de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$.
Cet espace est noté $\mathcal{S}(E)$ dans le programme.

Démonstration

- $(i) \Longrightarrow (iii)$
  Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une BON de E et $M = Mat_{\mathcal{B}}(u)$.
  $$\begin{array}{rcl} \forall (i,j) \in [\![1;n]\!] \; m_{i,j} & = & (e_i|u(e_j)) \\ & = & (u(e_i)|e_j) \text{ car } u \text{ est autoadjoint} \\ & = & (e_j|u(e_i)) \text{ symétrie du produit scalaire} \\ & = & m_{j,i} \end{array}$$
  Donc $M \in S_n(\mathbb{R})$.
- $(iii) \Longrightarrow (ii)$
  Trivial
- $(ii) \Longrightarrow (i)$
  Soit $M = Mat_{\mathcal{B}}(u)$.
  Soit $x \in E$ et X la matrice colonne de ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$.
  Soit $y \in E$ et Y la matrice colonne de ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$.
  MX est alors la matrice colonne des coordonnées de $u(x)$ dans la base $\mathcal{B}$.
  MY est alors la matrice colonne des coordonnées de $u(y)$ dans la base $\mathcal{B}$.
  L'expression du produit scalaire en BON donne alors :
  $(u(x)|y) = (MX)^T Y = X^T M^T Y = X^T M Y = X^T (MY) = (x|u(y))$
  u est bien autoadjoint.

10.4 Théorème spectral : le cas des endomorphismes autoadjoints

Soient E un ev euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et u un endomorphisme autoadjoint de E.
Alors E est somme directe orthogonale des sous-espaces propres de u.
En particulier u est diagonalisable dans une BON ie il existe une BON de E formée de vecteurs propres de u.

Remarques

- Réciproquement si $u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable dans une BON alors u est autoadjoint (une matrice diagonale est symétrique).

- La démonstration du théorème spectral n'est pas exigible.

- **Question de cours Centrale 99**
  On admet qu'un endomorphisme symétrique réel possède au moins une valeur propre. Démontrer qu'il est diagonalisable en BON.

  Correction
  Soit E un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et u un endomorphisme autoadjoint de E.
  On a $\mathrm{Sp}(u) \neq \emptyset$.

Mq $\overset{\perp}{\bigoplus}_{\lambda\in\mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u) = E$.

On commence par montrer que $\sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u) = \bigoplus_{\lambda\in\mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u)$ est de plus, une somme directe orthogonale ie les sous-espaces propres de u sont deux à deux orthogonaux.

Soient λ_1 et $\lambda_2 \in \mathrm{Sp}(u)$ avec $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Soient $x_1 \in E_{\lambda_1}(u)$ et $x_2 \in E_{\lambda_2}(u)$.

$$\begin{aligned}(u(x_1)|x_2) &= (\lambda_1 x_1|x_2) = \lambda_1(x_1|x_2)\\ &= (x_1|u(x_2)) = (x_1|\lambda_2 x_2) = \lambda_2(x_1|x_2)\end{aligned}$$

Donc $(\lambda_1-\lambda_2)(x_1|x_2)=0$ avec $\lambda_1-\lambda_2 \neq 0$ donc $(x_1|x_2)=0$.

On note ensuite $F = \overset{\perp}{\bigoplus}_{\lambda\in\mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u)$.

On suppose $F^\perp \neq \{0\}$.

F est stable par u comme somme de sev stables par u.

Soit $x \in F^\perp$.

$\forall y \in F$ $(u(x)|y) = (x|u(y))$ avec $u(y) \in F$ car F est stable par u.

Comme $x \in F^\perp$, $(u(x)|y) = 0$.

Donc $u(x) \in F^\perp$ et $F^\perp$ est stable par u.

Soit $v \begin{cases} F^\perp \to F^\perp \\ x \mapsto u(x) \end{cases}$.

$\forall (x,y) \in \left(F^\perp\right)^2$ $(v(x)|y) = (u(x)|y) = (x|u(y)) = (x|v(y))$

v est autoadjoint.

Mais $F^\perp \neq \{0\}$ donc v a au moins une valeur propre μ et un vecteur propre associé x_μ.

On a $x_\mu \neq 0$ et :

$u(x_\mu) = v(x_\mu) = \mu x_\mu$

Donc $\mu \in \mathrm{Sp}(u)$ et $x_\mu \in E_\mu(u) \subset F$.

Donc $x_\mu \neq 0$ et $x_\mu \in F \cap F^\perp$.

C'est absurde donc $F^\perp = \{0\}$ et $F = \left(F^\perp\right)^\perp = (\{0\})^\perp = E$ ie : $\overset{\perp}{\bigoplus}_{\lambda\in\mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u) = E$

En prenant une BON de chaque sous-espace propre de u et en les réunissant, on obtient une BON de E formée de vecteurs propres de u.

10.5 Théorème spectral : le cas des matrices symétriques réelles

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique.
Alors il existe P matrice orthogonale et D diagonale réelle telle que :
$A = PDP^T = PDP^{-1}$

Démonstration

On se place dans $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique.
A étant symétrique, u_A l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A, est autoadjoint.
Donc il existe $\mathcal{B}$ base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de u_A.
Soit P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ à $\mathcal{B}$.
La formule de changement de BON donne :
$A = P \times (Mat_{\mathcal{B}} u_A$ qui est diagonale$) \times P^T$.

Remarques

- La réciproque est vraie.
  Si $A = PDP^T$ avec $P \in O(n)$ et D diagonale réelle on a :
  $A^T = (PDP^T)^T = (P^T)^T D^T P^T = PDP^T = A$

- **CCP 2019**
  Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$ telle que $A^5 + A^4 + A^3 + A^2 + A = 0$.
  Montrer que $A = 0$.

  Correction
  A est diagonalisable car symétrique réelle.
  Les valeurs propres de A sont réelles et racines de $X + X^2 + X^3 + X^4 + X^5 = \dfrac{X(X^5-1)}{X-1}$
  donc $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$.
  A est donc semblable à la diagonale nulle et $A = 0$.
- **Question posée pendant un exercice de Centrale :**
  Est-ce que toute matrice symétrique est diagonalisable ?

  Correction
  On va voir à l'aide d'un contrexemple qu'une matrice symétrique complexe n'est pas forcément diagonalisable.
  On cherche $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ non diagonalisable.
  On cherche (a, b, c) pour $\mathrm{tr}\,(A) = a + c = 0$ et $\det A = ac - b^2 = 0$ avec $A \neq 0$ (cf cours sur la réduction des endomorphismes).
  $\begin{cases} a + c = 0 \\ ac - b^2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} c = -a \\ b^2 = -a^2 \end{cases} \iff \begin{cases} c = -a \\ b = \pm ia \end{cases}$
  Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$.
  $A \in S_2(\mathbb{C})$ et $\chi_A = X^2 - \mathrm{tr}\,(A)X + \det(A) = X^2$
  $Sp(A) = \{0\}$ et $A \neq 0$ donc A n'est pas diagonalisable.
  En taille n soit $B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
  $\chi_B = \begin{vmatrix} XI_2 - A & 0 \\ 0 & XI_{n-2} \end{vmatrix} = \chi_A\, X^{n-2} = X^n$
  $Sp(B) = \{0\}$ et $B \neq 0$ donc B n'est pas diagonalisable.

- **Mines 2019**

  1. Montrer que $\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable.
  2. Trouver toutes les matrices symétriques de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ qui ne sont pas diagonalisables.

  Correction

  1. $\chi_M = X^2 - \mathrm{tr}\,(M)X + \det(M) = X^2$
     0 est valeur propre double et $\dim(E_0(M)) < 2$ (car $M \neq 0$) donc M n'est pas

diagonalisable.

2. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_2(\mathbb{C})$.
χ_A a deux racines simples ou une racine double.
Si χ_A a deux racines simples alors A est diagonalisable.
Si χ_A a une racine double λ alors A est diagonalisable si, et seulement si, $A = \lambda I_2$.
Il s'agit donc d'écrire que A a une valeur propre double sans être diagonale.
$\chi_A = X^2 - (a+c)X + ac - b^2$
$\Delta = (a+c)^2 - 4ac + 4b^2 = (a-c)^2 + 4b^2 = (a-c+2ib)(a-c-2ib)$
La CNS cherchée est $\Delta = 0$ et $b \neq 0$.

11 Endomorphismes autoadjoints positifs

11.1 Définition des endomorphismes autoadjoints positifs

Soit E un espace euclidien.
Soit u un endomorphisme autoadjoint de E.
On dit que u est positif si, et seulement si, pour tout $x \in E$, $(u(x)|x) \geq 0$
On note $\mathcal{S}^+(E)$ l'ensemble des automorphismes autoadjoints positifs de E.

11.1.1 Caractérisation spectrale des endomorphismes autoadjoints positifs

Soit E un espace euclidien.
Soit u un endomorphisme autoadjoint de E.
$u \in \mathcal{S}^+(E) \iff \mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+$

Démonstration

$\Longrightarrow$ Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$
$\exists x \in E \setminus \{0\}$ tq $u(x) = \lambda x$
$(u(x)|x) = (\lambda x|x) = \lambda \left\|x\right\|^2$ donc :
$\lambda = \dfrac{(u(x)|x) \geq 0}{\left\|x\right\|^2 > 0} \geq 0$
Donc $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+$.

$\Longleftarrow$ D'après le théorème spectral, il existe $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E formée de vecteurs propres de u.
Pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, soit λ_i la valeur propre de u associée au vecteur propre e_i. Par hypothèse, c'est un réel positif.
Soit x un vecteur de E.

$\exists (x_1, \ldots, x_n)$ tq $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$

$$\begin{array}{rcl} (u(x)|x) & = & \left(u\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) \mid \sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) \\ & = & \left(\sum_{i=1}^{n} x_i u(e_i) \mid \sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) \\ & = & \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \lambda_i e_i \mid \sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) \\ & = & \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 \text{ expression du produit scalaire en BON} \\ & \geq & 0 \text{ comme somme de nombres positifs} \end{array}$$

11.2 Définition des endomorphismes autoadjoints définis positifs

Soit E un espace euclidien.
Soit u un endomorphisme autoadjoint de E.
On dit que u est défini positif si, et seulement si, pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, $(u(x)|x) > 0$
On note $\mathcal{S}^{++}(E)$ l'ensemble des automorphismes autoadjoints positifs de E.

11.2.1 Caractérisation spectrale des endomorphismes autoadjoints définis positifs

Soit E un espace euclidien.
Soit u un endomorphisme autoadjoint de E.
$u \in \mathcal{S}^{++}(E) \Longleftrightarrow \mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+^*$

Démonstration

$\Longrightarrow$ Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$
$\exists x \in E \setminus \{0\}$ tq $u(x) = \lambda x$
$(u(x)|x) = (\lambda x|x) = \lambda \|x\|^2$ donc :
$\lambda = \dfrac{(u(x)|x) > 0}{\|x\|^2 > 0} > 0$
Donc $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+^*$.

$\Longleftarrow$ D'après le théorème spectral, il existe $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E formée de vecteurs propres de u.
Pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, soit λ_i la valeur propre de u associée au vecteur propre e_i. Par hypothèse, c'est un réel strictement positif.
Soit x un vecteur non nul de E.
$\exists (x_1, \ldots, x_n)$ tq $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$

x est non nul donc il existe $i_0 \in [\![1;n]\!]$ tel que $x_{i_0} \neq 0$

$$\begin{aligned}
(u(x)|x) &= \left(u\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) \mid \sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i u(e_i) \mid \sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \lambda_i e_i \mid \sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 \text{ expression du produit scalaire en BON} \\
&= \left(\lambda_{i_0} x_{i_0}^2 > 0\right) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{n} \left(\lambda_i x_i^2 \geq 0\right) \\
&> 0
\end{aligned}$$

12 Matrices symétriques positives

12.1 Définition des matrices symétriques positives

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ (ie A symétrique réelle).
On dit que A est positive si, et seulement si, pour tout colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^T A X \geq 0$
On note $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles positives à n lignes et n colonnes.

12.2 Caractérisation spectrale des matrices symétriques positives

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$
$A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \Longleftrightarrow \mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}^+$

Démonstration

- $\Longrightarrow$ Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ ($A \in S_n(\mathbb{R})$ donc $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}$)
  $\exists X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tq $AX = \lambda X$
  $X^T A X = X^T(\lambda X) = \lambda X^T X = \lambda \|X\|^2$
  Donc $\lambda = \dfrac{X^T A X \geq 0}{\|X\|^2 > 0} \geq 0$.
- $\Longleftarrow$
  A est symétrique réelle donc :
  $\exists P \in O(n)$ tq $A = PDP^T$ avec $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ et : $\forall i \in [\![1;n]\!]$ $\lambda_i \geq 0$
  Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned}
X^T A X &= X^T(PDP^T)X = (X^T P)D(P^T X) \\
&= (P^T X)^T D(P^T X)
\end{aligned}$$

On pose $Y = P^T X = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned} X^T AX &= Y^T DY = \begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 y_1 \\ \vdots \\ \lambda_n y_n \end{pmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i \geq 0) y_i^2 \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

12.3 Définition des matrices symétriques définies positives

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ (ie A symétrique réelle).
On dit que A est défiinie positive si, et seulement si, pour tout colonne non nulle $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, $X^T AX > 0$
On note $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles définies positives à n lignes et n colonnes.

12.4 Caractérisation spectrale des matrices symétriques définies positives

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$
$A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \Longleftrightarrow \mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*$

Démonstration

- $\Longrightarrow$ Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ ($A \in S_n(\mathbb{R})$ donc $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}$)
  $\exists X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tq $AX = \lambda X$
  $X^T AX = X^T(\lambda X) = \lambda X^T X = \lambda \|X\|^2$
  Donc $\lambda = \dfrac{X^T AX > 0}{\|X\|^2 > 0} > 0$.
- $\Longleftarrow$
  A est symétrique réelle donc :
  $\exists P \in O(n)$ tq $A = PDP^T$ avec $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et : $\forall i \in [\![1; n]\!]\ \lambda_i > 0$
  Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

$$\begin{aligned} X^T AX &= X^T(PDP^T)X = (X^T P)D(P^T X) \\ &= (P^T X)^T D(P^T X) \end{aligned}$$

On pose $Y = P^T X = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$.

X est non nul et P est inversible donc Y est non nul et il existe $i_0 \in [\![1;n]\!]$ tel que $y_{i_0} > 0$.

$$\begin{aligned}
X^T AX &= Y^T DY = \begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 y_1 \\ \vdots \\ \lambda_n y_n \end{pmatrix} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 \\
&= \left(\lambda_{i_0} y_{i_0}^2 > 0\right) + \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq i_0}}^{n} \left(\lambda_i y_i^2 \geq 0\right) \\
&> 0
\end{aligned}$$

13 Plus grande et plus petite valeur propre d'une matrice symétrique réelle

Ce qui suit constitue le principe de très nombreux exercices mais n'est pas explicitement au programme.

13.1 La situation générale

Soit A une matrice symétrique réelle de valeurs propres $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$.
Soit $Q \begin{cases} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ X \mapsto X^T AX \end{cases}$.
Montrer :

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \inf \{Q(X) \text{ où } \|X\| = 1\} \\
\lambda_n &= \sup \{Q(X) \text{ où } \|X\| = 1\}
\end{aligned}$$

Démonstration
On se place dans $\mathbb{R}^n$ euclidien canonique.
A symétrique $\Longrightarrow u_A$ autoadjoint.
Donc il existe $\mathcal{B} = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$ BON de $\mathbb{R}^n$ tq $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_A) = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.
Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ tq $\|X\| = 1$.
$Q(X) = X^T AX = \displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j} x_i x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} x_i^2 + 2 \sum_{1\leq i<j\leq n} a_{i,j} x_i x_j$
On ne voit pas comment encadrer $Q(X)$ avec cette formule.
$\exists!(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ tq $X = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i \epsilon_i$

$\|X\| = 1$ et $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)$ est une BON de $\mathbb{R}^n$ donc $\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = 1$

$$\begin{aligned}
X^T A X &= X^T(AX) = X^T u_A(X) = (X|u_A(X)) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\epsilon_i | u_A\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\epsilon_i\right)\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\epsilon_i | \sum_{i=1}^{n} y_i u_A(\epsilon_i)\right) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\epsilon_i | \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i\epsilon_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 \text{ car } (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) \text{ est une BON de } \mathbb{R}^n \\
&\geq \sum_{i=1}^{n} \lambda_1 y_i^2 = \lambda_1 \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \lambda_1
\end{aligned}$$

De plus :
$Q_A(\epsilon_1) = (\epsilon_1|u_A(\epsilon_1)) = (\epsilon_1|\lambda_1\epsilon_1) = \lambda_1 \|\epsilon_1\|^2 = \lambda_1$
Donc :
$\lambda_1 = \min\{Q(X) \text{ où } \|X\| = 1\} = \inf\{Q(X) \text{ où } \|X\| = 1\}$
En fait, on peut être plus précis :

$$\begin{aligned}
Q(X) = \lambda_1 &\iff \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 = \lambda_1 = \lambda_1 \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_1 y_i^2 \\
&\iff \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \lambda_1 \geq 0)(y_i^2 \geq 0) = 0 \\
&\iff \forall i \in [\![1; n]\!] \ (\lambda_i - \lambda_1) y_i^2 = 0 \\
&\iff \forall i \in [\![1; n]\!] \text{ tq } \lambda_i \neq \lambda_1 \ y_i = 0 \\
&\iff X \text{ est combinaison linéaire des } \epsilon_i \text{ tq } \lambda_i = \lambda_1 \\
&\iff X \in E_{\lambda_1}(A) \\
&\iff X \text{ est vecteur propre de } A \text{ pour la valeur propre } \lambda_1 \\
&\qquad (\|X\| = 1 \text{ donc } X \neq 0)
\end{aligned}$$

On va traiter le cas de λ_n en utilisant une autre rédaction, purement matricielle cette fois.
A est symétrique réelle donc :
$\exists P \in O(n)$ tq $A = PDP^T$ avec $D = \text{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.
Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned}
X^T A X &= X^T(PDP^T)X = (X^T P) D (P^T X) \\
&= (P^T X)^T D (P^T X)
\end{aligned}$$

On pose $Y = P^T X = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned} X^T A X &= Y^T D Y = \begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 y_1 \\ \vdots \\ \lambda_n y_n \end{pmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_n y_i^2 = \lambda_n \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \end{aligned}$$

Supposons $\|X\| = 1$ ie $X^T X = 1$.
$Y^T Y = (P^T X)^T P^T X = X^T P P^T X = X^T I_n X = 1$
donc $\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = 1$
Donc :
$\forall X \in \mathbb{R}^n$ tq $\|X\| = 1$ $X^T A X \leq \lambda_n$.

Soit $X = P \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ la dernière colonne de P.

$Y = P^T X = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$X^T A X = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 = \lambda_n \ 1^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i 0^2 = \lambda_n$ et $\|X\| = 1$ car $P \in O(n)$.
Donc $\lambda_n = \max \{Q(X) \text{ où } \|X\| = 1\} = \sup \{Q(X) \text{ où } \|X\| = 1\}$.
Examinons en détail le cas d'égalité.

Soit X unitaire.

$$\begin{aligned}
X^TAX = \lambda_n &\iff \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2 = \lambda_n = \lambda_n \sum_{i=1}^n y_i^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_n y_i^2 \\
&\iff \sum_{i=1}^n (\lambda_i - \lambda_n \leq 0)(y_i^2 \geq 0) = 0 \\
&\iff \forall i \in [\![1;n]\!]\ (\lambda_i - \lambda_n) y_i^2 = 0 \\
&\iff \forall i \in [\![1;n]\!] \text{ tq } \lambda_i \neq \lambda_n\ y_i = 0 \\
&\iff Y = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ y_{n-\alpha+1} \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \text{ avec } \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_{n-\alpha} < \lambda_{n-\alpha+1} = \cdots = \lambda_n \\
&\iff X = PY \text{ est combinaison linéaire des } \alpha \text{ dernières colonnes de } P
\end{aligned}$$

Or les α dernières colonnes de P forment une base de $E_{\lambda_n}(A)$ donc :

$$\begin{aligned}
X^TAX = \lambda_n &\iff X \in E_{\lambda_n}(A) \\
&\iff X \text{ est vecteur propre de } A \text{ pour la valeur propre } \lambda_n \\
&\quad\ (\|X\| = 1 \text{ donc } X \neq 0)
\end{aligned}$$

Considérons alors $X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
$\dfrac{X}{\|X\|}$ est un vecteur unitaire donc :
$\lambda_1 \leq \left(\dfrac{X}{\|X\|}\right)^T A \left(\dfrac{X}{\|X\|}\right) \leq \lambda_n$
D'où :
$\lambda_1 \leq \dfrac{1}{\|X\|^2} X^TAX \leq \lambda_n$
puis :
$\lambda_1 \|X\|^2 \leq X^TAX \leq \lambda_n \|X\|^2$
Ces inégalités sont triviales pour $X = 0$ donc :

$$\forall X \in \mathbb{R}^n\ \lambda_1 \|X\|^2 \leq X^TAX \leq \lambda_n \|X\|^2$$

Ces inégalités étant les meilleures possibles.

13.1.1 Quelques exemples d'applications

- **X 2015**
  Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$.
  Soient $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$ les valeurs propres de A.
  Soit V un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^n$.
  Montrer : $\lambda_n \leq (AV|V) \leq \lambda_1$

  Il n'y a rien de plus qu'avant, il s'agit simplement de signaler le caractère très classique de cette question.

- **Mines 2016, 2017**
  Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $S = \dfrac{1}{2}\left(A + A^T\right)$.
  Soit α la plus petite valeur propre de S.
  Soit β la plus grande valeur propre de S.
  1. Soit λ une valeur propre réelle de A.
     Montrer que $\alpha \leq \lambda \leq \beta$.
  2. ?
  3. ?

  les questions manquantes portaient sûrement sur la partie réelle des valeurs propres complexes de A.
  Correction
  1.
  $$\begin{aligned}\forall X \in \mathbb{R}^n \ X^TSX &= \frac{1}{2}X^T(A+A^T)X = \frac{1}{2}(X^TAX + X^TA^TX) \\ &= \frac{1}{2}\left(X^TAX + \left(X^TA^TX\right)^T\right) \text{ car } X^TA^TX \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}) \\ &= \frac{1}{2}\left(X^TAX + X^TAX\right) = X^TAX\end{aligned}$$
     Soit alors λ une valeur propre réelle de A.
     Soit $Y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ.
     $X = \dfrac{Y}{\|Y\|}$ est un vecteur unitaire propre pour la valeur propre λ.
     $X^TAX = X^T(\lambda X) = \lambda X^TX = \lambda \|X\|^2 = \lambda$.
     Mais d'après l'étude ci-dessus, $\alpha \leq X^TSX \leq \beta$ donc $\alpha \leq \lambda \leq \beta$.

  Passons aux valeurs propres complexes de A.
  Nous allons d'abord examiner l'exercice suivant :
  X 2016
  Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
  Soit $\lambda = \gamma + i\delta$ une valeur propre complexe de A ($(\gamma, \delta) \in \mathbb{R}^2$).
  Montrer qu'il existe deux vecteurs v et $w \in \mathbb{R}^n$ non tous les deux nuls tels que :
  $(Av|v) + (Aw|w) = \gamma(\|v\|^2 + \|w\|^2)$.

  Correction
  Soit $u \in \mathbb{C}^n$ un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ.
  Soit v sa partie réelle et w sa partie imaginaire.
  u est non nul donc v et w ne sont pas tous les deux nuls.
  $Av + iAw = A(v + iw) = Au = \lambda u = (\gamma + i\delta)(v + iw) = \gamma v - \delta w + i(\gamma w + \delta v)$
  On en déduit : $Av = \gamma v - \delta w$ et $Aw = \gamma w + \delta v$.
  D'où :
  $$\begin{aligned}(Av|v) + (Aw|w) &= (\gamma v - \delta w|v) + (\gamma w + \delta v|w) \\ &= \gamma\|v\|^2 - \delta(w|v) + \gamma\|w\|^2 + \delta(v|w) \\ &= \gamma(\|v\|^2 + \|w\|^2)\end{aligned}$$

  Application
  $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \Longrightarrow \mathrm{Sp}(A) \subset i\,\mathbb{R}$

En effet, dans ce cas :
$(Av|v) = (Av)^T v = v^T A^T v = -v^T Av = -(v|Av) = -(Av|v)$ donc $(Av|v) = 0$.
De même $(Aw|w) = 0$ et $\gamma(\|v\|^2 + \|w\|^2) = 0$ avec v ou w non nul.
On en déduit $\gamma = 0$ ie λ imaginaire pur.

Revenons à l'exercice des Mines.
Comme vu plus haut :
$\alpha \|v\|^2 \leq v^T Sv \leq \beta \|v\|^2$ et $\alpha \|w\|^2 \leq w^T Sw \leq \beta \|w\|^2$
Donc $\alpha(\|v\|^2 + \|w\|^2) \leq \gamma(\|v\|^2 + \|w\|^2) \leq \beta(\|v\|^2 + \|w\|^2)$
Comme v et w ne sont pas tous les deux nuls, $\|v\|^2 + \|w\|^2 > 0$ et :
$\alpha \leq \Re e(\lambda) \leq \beta$