ALGEBRE LINEAIRE
TD
2025-2025
Chapitre 6

941

Exercice 1 *(Mines 2011)*

Soit $B \begin{cases} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ (X,Y) \mapsto \displaystyle\sum_{1 \leq i,j \leq n} \frac{x_i y_j}{i+j} \end{cases}$.
B est-il un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$?

Exercice 2

Soient E un ev euclidien et E_1, E_2 2 sev de E.
Montrer que $(E_1 + E_2)^\perp = E_1^\perp \cap E_2^\perp$ et $(E_1 \cap E_2)^\perp = E_1^\perp + E_2^\perp$.

Exercice 3 *(Centrale 2015, maths 1)*

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 2$ et a et b deux vecteurs unitaires orthogonaux de E.
Pour x dans E, on pose $u(x) = (a|x)b - (b|x)a$.

1. Montrer que u est un endomorphisme de E.
2. Trouver le noyau de u et son image.
3. u est-il diagonalisable ?

Exercice 4 *(CCP 2019)*

Soit E un espace préhilbertien réel.
Soit $(x_1, \ldots, x_p)$ une famille de vecteurs unitaires telle que :
$\forall (i,j) \in [\![1;p]\!]^2 \ i \neq j \Longrightarrow \|x_i + x_j\| = \sqrt{3}$

1. Calculer $(x_i|x_j)$.
2. Montrer que la famille $(x_1, \ldots, x_p)$ est libre.

Exercice 5

Soient E un ev euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une BON de E.
Soit $H = \{x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E \text{ tq } x_1 + \cdots + x_n = 0\}$.
Donner une BON de H.

Exercice 6 *(Mines 2022)*

On se place dans $\mathbb{R}^4$ muni de sa structure euclidienne canonique.
Soit $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \text{ tq } x - y + z - t = 0\}$.

1. Déterminer la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur F.
2. ?

Exercice 7 *(X 2019)*

Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ de rang p.

1. Montrer :
   $\forall y \in \mathbb{R}^n\ \exists! x_0 \in \mathbb{R}^p \text{ tq } \|Mx_0 - y\| = \min\limits_{x \in \mathbb{R}^p} (\|Mx - y\|)$
   où $\|.\|$ désigne la norme euclidienne canonique de $\mathbb{R}^n$.
2. Montrer que $M^T M$ est inversible.
   En déduire une relation entre $\mathrm{Im}\,(M)$ et $\mathrm{Ker}\,(M^T)$.

Exercice 8 *(X 2015)*

Soit $P \in \mathcal{M}_9(\mathbb{R})$ telle que :
$\forall (X, Y) \in \mathbb{R}^9 \times \mathbb{R}^9\ X^T P Y = -Y^T P X$
Montrer que $P \notin GL_9(\mathbb{R})$.

Exercice 9 *(X 2021)*

Soient E un espace euclidien de dimension n et $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille de vecteurs de E telle que :
$\forall x \in E\ \ \|x\|^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (e_i|x)^2$
Montrer que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une BON de E.

Exercice 10 *(Mines 2022)*

Soit E un espace euclidien et f une forme linéaire sur E.

1. Montrer :
   $\exists! a \in E \text{ tq } \forall x \in E\ f(x) = (a|x)$
2. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   Montrer :
   $\exists! A \in \mathbb{R}_n[X] \text{ tq } \forall P \in \mathbb{R}_n[X]\ \displaystyle\int_0^1 A(t)P(t)\,\mathrm{d}t = P(0)$
3. Montrer que le degré de A vaut n et que $A(0) > 0$.

Exercice 11 *(Mines 2022)*

Soit E un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E.
Soit $(f_1, \ldots, f_n)$ une famille de vecteurs de E telle que :
$\forall k \in [\![1; n]\!]\ \ \|e_k - f_k\| < \dfrac{1}{\sqrt{n}}$
Montrer que $(f_1, \ldots, f_n)$ est une base de E.
Que se passe-t-il si il y a égalité ?

1 Endomorphismes d'un espace euclidien

1.1 Isométries vectorielles et matrices orthogonales

Exercice 12 *(Mines 2017)*

Soient E un espace euclidien et a et b deux vecteurs non nuls.
Soit Ω l'ensemble des automorphismes orthogonaux s de E tels que $s(a) = b$.

1. Donner une CNS pour que Ω soit non vide.
2. ?

Exercice 13 *(CCP 2019)*

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
On note $S = a + b + c$ et $\sigma = ab + bc + ca$.

1. Montrer :
   $A \in O_3(\mathbb{R}) \iff S = \pm 1$ et $\sigma = 0$
2. Préciser une condition pour que $A \in SO_3(\mathbb{R})$.

Exercice 14 *(D'après Centrale 2017 maths 2)*

On dit que deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifient la propriété (N) si, et seulement si, $\|Ax\| = \|Bx\|$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ (où $\|.\|$ est la norme euclidienne canonique).

1. Montrer :
   A et B vérifient $(N) \iff \forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2$ $(A_i|A_j) = (B_i|B_j)$ où A_k est la $k^{\text{ième}}$ colonne de A.
2. On suppose $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Montrer :
   A et B vérifient $(N) \iff \exists C \in O(n)$ tq $A = CB$
3. Soient $u = (u_1, \ldots, u_p)$ et $v = (v_1, \ldots, v_p)$ deux familles libres de $\mathbb{R}^n$ telles que $G_u = G_v$ où G_u est la matrice $((u_i|u_j))_{1 \leq i,j \leq p}$.
   On note $U = Vect(u_1, \ldots, u_p)$ et $V = Vect(v_1, \ldots, v_p)$.
   (a) Montrer :
       $\exists! f \in \mathcal{L}(U,V)$ tq $\forall i \in [\![1;p]\!]$ $f(u_i) = v_i$
   (b) Montrer que f est une isométrie vectorielle.
   (c) Montrer qu'il existe une isométrie vectorielle g de $\mathbb{R}^n$ telle que $g_{|U} = f$.
4. Montrer dans le cas général :
   A et B vérifient $(N) \iff \exists C \in O(n)$ tq $A = CB$

Exercice 15 *(Centrale 2015, rapport du jury)*

Soit f un automorphisme orthogonal d'un espace euclidien E.
On pose $g = f - id_E$.

1. Montrer que $\operatorname{Im}(g) = \operatorname{Ker}(g)^{\perp}$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $p_n = \dfrac{1}{n}\left(id_E + f + f^2 + \cdots + f^{n-1}\right)$.
   Montrer que pour tout $x \in E$, la suite $(p_n(x))$ converge vers $p(x)$ le projeté orthogonal sur $\mathrm{Ker}\,(g)$.

Exercice 16 *(X 2022)*

A quelle condition sur n existe-t-il $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + I_n = 0$?

Exercice 17 *(Mines 2023)*

Soit $M \in O(n)$.
Montrer que $\left|\displaystyle\sum_{1\le i,j\le n} m_{i,j}\right| \le n \le \displaystyle\sum_{1\le i,j\le n} |m_{i,j}| \le n\sqrt{n}$.

2 Endomorphismes et matrices symétriques

Exercice 18 *(CCP 2018,2019)*

Soit E un espace préhilbertien réel.
Soient f et g deux applications de E dans E telles que :
$\forall (x,y) \in E^2 \ (f(x)|y) = (x|g(y))$

1. Montrer que f et g sont linéaires.
2. Que dire de l'image de g et du noyau de f ?

Exercice 19 *(Mines 2017)*

La matrice $A = \begin{pmatrix} 1-i & -4 & 5 & -7 \\ -4 & 2-i & 14 & 37 \\ 5 & 14 & 3-i & -21 \\ -7 & 37 & -21 & 4-i \end{pmatrix}$ est-elle inversible ?

Exercice 20 *(Centrale 2019)*

Soit E un espace euclidien de dimension n.
Soient a et b deux vecteurs linéairement indépendants de E.
Soit $f \begin{cases} E \to E \\ x \mapsto (a|x)b + (b|x)a \end{cases}$.

1. Montrer que f est un endomorphisme symétrique de E.
2. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.

Exercice 21 *(CCP 2019)*

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Quel est le rang de A ?
A est-elle diagonalisable ?
Quelles sont les valeurs propres de A ?

Exercice 22 *(Centrale 2016)*

On note $S = \{X \in \mathbb{R}^n \text{ tq } \|X\| = 1\}$ où $\|.\|$ est la norme euclidienne canonique de $\mathbb{R}^n$.
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Montrer que $\{(MX|X),\ X \in S\}$ est un segment de $\mathbb{R}$.
On pourra commencer par supposer que M est symétrique.

Exercice 23 *(Mines 2011, 2019)*

Déterminer les $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A\,A^T\,A = I_n$.

Exercice 24 *(Mines 2021)*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 + A^2 + A = 0$.

1. On suppose en plus A symétrique.
   Montrer que A est nulle.
2. Montrer que $\operatorname{tr}(A) \in \mathbb{Z}$.
3. Donner un encadrement de $\operatorname{tr}(A)$.

Exercice 25 *(Mines 2011,2019)*

Soit E un espace euclidien.
Si w est un endomorphisme symétrique de E, on note $\alpha(w)$ sa plus petite valeur propre et $\beta(w)$ sa plus grande valeur propre.

1. Si w est un endomorphisme symétrique de E et x un vecteur de E, encadrer $(w(x) \mid x)$ à l'aide de $\alpha(w)$ et de $\beta(w)$.
2. Soient u et v deux endomorphismes symétriques de E.
   Montrer $\beta(u + v) \geq \alpha(u) + \beta(v)$.

Exercice 26 *(Centrale 2019)*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique dont toutes les valeurs propres sont strictement positives.
Etant donné un vecteur x de $\mathbb{R}^n$, on pose $f_A(x) = X^T A X$ où X est le vecteur colonne canoniquement associé à x.

1. Montrer que la fonction $L(f_A) : p \mapsto \max\limits_{x \in \mathbb{R}^n} \left((p|x) - f_A(x)\right)$ est bien définie.
2. Montrer que la fonction $L(f_A)$ est de la forme f_B pour une matrice B à préciser.

Exercice 27 *(Mines 2021)*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Montrer que AA^T et $A^T A$ sont semblables.

2.1 Endomorphismes et matrices symétriques positifs

Exercice 28 *(X 2019, 2021)*

Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$ telle que : $\forall X \in \mathbb{R}^n \ X^T AX \geq 0$.
Montrer que $\max\limits_{1\leq i,j\leq n} (|a_{i,j}|) = \max\limits_{1\leq i\leq n} (a_{i,i})$.

Exercice 29 *(Centrale 2021)*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle.
Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle telle que $Sp(B) \subset \mathbb{R}_+^*$.

1. Soit $\Delta \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonale réelle dont tous les coefficients diagonaux sont strictement positifs.
   Soit $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible.
   Montrer que $P^T \Delta P$ est symétrique.
   Montrer que les valeurs propres de $P^T \Delta P$ sont toutes réelles strictement positives.
2. Montrer qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale telles que $B = PP^T$ et $A = PDP^T$.
3. Deux autres questions.
   La question suivante est une application classique de la question précédente :
   Montrer :
   $\forall (A, B) \in S_n^+(\mathbb{R})^2 \ \det(A + B) \geq \det(A) + \det(B)$

Exercice 30 *(Centrale 2022)*

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de sa norme euclidienne usuelle : $\|M\| = \sqrt{\operatorname{tr}(M^T M)}$.
On considère $M \in GL_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer qu'il existe $(S, \Omega) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \times O_n(\mathbb{R})$ tel que $M = \Omega S$
2. Calculer $d(M, O_n(\mathbb{R})) = \inf\limits_{V\in O_n(\mathbb{R})} \|M - V\|$.
   Indication : montrer que pour tout $V \in O_n(\mathbb{R})$, $\|MV\| = \|VM\| = \|M\|$