ALGEBRE LINEAIRE
TD
20235-2026
Chapitre 6
Correction

941

Exercice 1 *(Mines 2011)*

Soit $B \begin{cases} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ (X,Y) \mapsto \displaystyle\sum_{1 \leq i,j \leq n} \frac{x_i y_j}{i+j} \end{cases}$.
B est-il un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$?

Correction

- B est symétrique :
  $\forall (X,Y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \ B(X,Y) = \displaystyle\sum_{1 \leq i,j \leq n} \frac{x_i y_j}{i+j} = \sum_{1 \leq i,j \leq n} \frac{y_j x_i}{i+j}$ par commutation des réels.
  $\forall (X,Y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \ B(X,Y) = \displaystyle\sum_{1 \leq i,j \leq n} \frac{y_i x_j}{j+i}$ par changement d'indices.
  Donc :
  $\forall (X,Y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \ B(X,Y) = B(Y,X)$
- B est linéaire à droite :
  Soit $X, Y, Z \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} B(X, \lambda Y + \mu Z) &= \sum_{1 \leq i,j \leq n} \frac{x_i(\lambda y_j + \mu z_j)}{i+j} = \lambda \sum_{1 \leq i,j \leq n} \frac{x_i y_j}{i+j} + \mu \sum_{1 \leq i,j \leq n} \frac{x_i z_j}{i+j} \\ &= \lambda B(X,Y) + \mu B(X,Z) \end{aligned}$$

- B est linéaire à gauche :
  découle de la linéarité à droite et de la symétrie.
- Soit $X \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned} B(X,X) &= \sum_{1 \leq i,j \leq n} \frac{x_i x_j}{i+j} = \sum_{1 \leq i,j \leq n} x_i x_j \int_0^1 t^{i+j-1} \, \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^n x_i t^{i-1/2} \times \sum_{j=1}^n x_j t^{j-1/2} \right) \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^n x_i t^{i-1/2} \right)^2 \mathrm{d}t \end{aligned}$$

La fonction $t \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i t^{i-1/2}$ est continue sur $[0;1]$ (l'intégrale n'est pas impropre) donc :
$B(X,X) \geq 0$ et :
$B(X,X) = 0 \iff \forall t \in [0;1] \ \sum_{i=1}^{n} x_i t^{i-1/2} = 0$
Donc si $B(X,X) = 0$, en multipliant par $\sqrt{t}$, on a :
$\forall t \in [0;1] \ \sum_{i=1}^{n} x_i t^i = 0$
On a un polynôme avec une infinité de racines donc c'est le polynôme nul. Tous ses coefficients sont donc nuls ie $X = 0$.

B bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 2

Soient E un ev euclidien et E_1, E_2 2 sev de E.
Montrer que $(E_1 + E_2)^\perp = E_1^\perp \cap E_2^\perp$ et $(E_1 \cap E_2)^\perp = E_1^\perp + E_2^\perp$.

Correction

1. $(E_1 + E_2)^\perp = E_1^\perp \cap E_2^\perp$.
   $E_1 \subset E_1 + E_2$ donc $(E_1 + E_2)^\perp \subset E_1^\perp$.
   $E_2 \subset E_1 + E_2$ donc $(E_1 + E_2)^\perp \subset E_2^\perp$.
   D'où $(E_1 + E_2)^\perp \subset E_1^\perp \cap E_2^\perp$.
   Réciproquement soit $x \in E_1^\perp \cap E_2^\perp$.
   Soit $y \in E_1 + E_2$.
   $\exists (y_1, y_2) \in E_1 \times E_2$ tq $y = y_1 + y_2$
   $(x|y_1 + y_2) = (x|y_1) + (x|y_2) = 0 + 0 = 0$
   Donc $x \in (E_1 + E_2)^\perp$
   D'où : $(E_1 + E_2)^\perp = E_1^\perp \cap E_2^\perp$
   Remarque
   On n'a pas eu besoin de $\dim E < +\infty$.
2. $E_1 \cap E_2 = (E_1^\perp)^\perp \cap (E_2^\perp)^\perp = (E_1^\perp + E_2^\perp)^\perp$
   D'où : $(E_1 \cap E_2)^\perp = (E_1^\perp + E_2^\perp)^{\perp\perp} = E_1^\perp + E_2^\perp$
   En dimension infinie cela peut être faux quoiqu'on ait toujours
   $E_1^\perp + E_2^\perp \subset (E_1 \cap E_2)^\perp$
   En effet $E_1 \cap E_2 \subset E_1 \Rightarrow E_1^\perp \subset (E_1 \cap E_2)^\perp$...

Exercice 3 *(Centrale 2015, maths 1)*

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 2$ et a et b deux vecteurs unitaires orthogonaux de E.
Pour x dans E, on pose $u(x) = (a|x)b - (b|x)a$.

1. Montrer que u est un endomorphisme de E.
2. Trouver le noyau de u et son image.
3. u est-il diagonalisable ?

Correction

1. Ne présente pas de difficulté.

2. (a,b) étant une famille ON de E, (a,b) est libre. Donc :
$u(x) = 0 \Longleftrightarrow (a|x) = (b|x) = 0$
$\ker(u) = \mathrm{Vect}(a,b)^{\perp}$ est de dimension $n-2$.
On en déduit que l'image de u est de dimension 2. Mais elle est incluse dans $\mathrm{Vect}(a,b)$ donc $\mathrm{Im}\,(u) = \mathrm{Vect}(a,b)$.

3. On peut regarder si u est symétrique.
Un calcul simple donne :
$$\begin{aligned}\forall (x,y)\in E^2\ (u(x)|y) &= (a|x)(b|y)-(b|x)(a|y)\\ (x|u(y)) &= (b|x)(a|y)-(a|x)(b|y)\end{aligned}$$
u n'est pas symétrique (mais antisymétrique).
On déduit du calcul précédent :
$\forall x \in E\ (u(x)|x) = 0$ (la première ligne du calcul suffit)
Soit λ une valeur propre de u et x un vecteur propre associé.
$0 = (u(x)|x) = (\lambda x|x) = \lambda \|x\|^2$
On en déduit $\lambda = 0$, si λ est valeur propre.
$\ker(u) = Vect(a,b)^{\perp}$ est de dimension $n-2$ donc :
Si $n=2$, u n'a pas de valeur propre.
Si $n>2$, u a une et une seule valeur propre : 0.
Dans les deux cas, u n'est pas diagonalisable.

On peut également compléter (a,b) en une BON $\mathcal{B}$ de E. La matrice de u dans $\mathcal{B}$ est :
$\begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 4 *(CCP 2019)*

Soit E un espace préhilbertien réel.
Soit $(x_1,\dots,x_p)$ une famille de vecteurs unitaires telle que :
$\forall (i,j)\in [\![1;p]\!]^2\ i\neq j \Longrightarrow \|x_i+x_j\| = \sqrt{3}$

1. Calculer $(x_i|x_j)$.
2. Montrer que la famille $(x_1,\dots,x_p)$ est libre.

Correction

1. Si $i=j$, $(x_i|x_j) = 1$.
Si $i\neq j$:
$3 = \|x_i+x_j\|^2 = \|x_i\|^2 + \|x_j\|^2 + 2(x_i|x_j) = 2 + 2(x_i|x_j)$ et $(x_i|x_j) = \dfrac{1}{2}$
2. Soit $(a_1,\dots,a_p)\in\mathbb{R}^p$ tq $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} a_i x_i = 0$.
On fait le produit scalaire avec x_i :
$\forall i\in [\![1;p]\!]\ \displaystyle\sum_{j=1}^{p} a_j (x_i|x_j) = 0$
Ce qui donne avec les valeurs des produits scalaires de l'énoncé :

$\forall i \in [\![1;p]\!]\ a_i + \sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \frac{1}{2} a_j = 0$
Ce qui peut aussi s'écrire :
$\forall i \in [\![1;p]\!]\ a_i + \sum\limits_{j=1}^{n} a_j = 0$
On ajoute toutes les lignes :
$(n+1)\sum\limits_{j=1}^{n} a_j = 0$
On en déduit $\sum\limits_{j=1}^{n} a_j$ puis :
$\forall i \in [\![1;p]\!]\ a_i = 0$
La famille $(x_1, \ldots, x_p)$ est donc libre.

Exercice 5

Soient E un ev euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une BON de E.
Soit $H = \{x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i \in E \text{ tq } x_1 + \cdots + x_n = 0\}$.
Donner une BON de H.

Correction

On prend $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, V_{n-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ -(n-1) \end{pmatrix}$.

On norme alors ces vecteurs :
$\|V_k\|^2 = k + k^2 = k(k+1)$
$\epsilon_k = \dfrac{V_k}{\sqrt{k(k+1)}}$

Exercice 6 *(Mines 2022)*

On se place dans $\mathbb{R}^4$ muni de sa structure euclidienne canonique.
Soit $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \text{ tq } x - y + z - t = 0\}$.

1. Déterminer la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur F.
2. ?

Correction

1. De nombreuses méthodes sont possibles :
   - F est l'orthogonal du vecteur $v = (1, -1, 1, -1)$.
     p est donc défini par :
     $\forall x \in \mathbb{R}^n\ p(x) = x - \left(\frac{v}{\|v\|}|x\right)\frac{v}{\|v\|} = x - \frac{(v|x)}{\|v\|^2}v$
     On en déduit pour chaque vecteur e_i de la base canonique :

$p(e_i) = e_i - \dfrac{(-1)^{i-1}}{4} v = e_i + \dfrac{(-1)^i}{4} v$
La matrice de p dans la base canonique est donc :
$$P = I_4 + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

- **Deuxième méthode**
  Soit $x = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$.
  $p(x)$ est caractérisé par $p(x) \in F$ et $p(x) - x \perp F$.
  On en déduit :
  $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tq $p(x) = x + \lambda(1, -1, 1, -1)$.
  Donc $p(x) = (x + \lambda, y - \lambda, z + \lambda, t - \lambda)$.
  $p(x) \in F$ donc :
  $x + \lambda - (y - \lambda) + (z + \lambda) - (t - \lambda) = 0$
  On en déduit $\lambda = \dfrac{-1}{4}(x - y + z - t)$ et :
  $$p(x) = \left(\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}y - \frac{1}{4}z + \frac{1}{4}t, \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}y + \frac{1}{4}z - \frac{1}{4}t, -\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y + \frac{3}{4}z + \frac{1}{4}t, \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}y + \frac{1}{4}z + \frac{3}{4}t\right)$$
  On en déduit la matrice cherchée : $\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

2.

Exercice 7 *(X 2019)*

Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ de rang p.

1. Montrer :
   $\forall y \in \mathbb{R}^n \; \exists! x_0 \in \mathbb{R}^p$ tq $\|Mx_0 - y\| = \min\limits_{x \in \mathbb{R}^p} (\|Mx - y\|)$
   où $\|.\|$ désigne la norme euclidienne canonique de $\mathbb{R}^n$.
2. Montrer que $M^T M$ est inversible.
   En déduire une relation entre $\mathrm{Im}\,(M)$ et $\mathrm{Ker}\,(M^T)$.

Correction

1. Soit q la projection orthogonale sur $\mathrm{Im}\,(M)$ (endomorphisme de $\mathbb{R}^n$).
   Soit $y \in \mathbb{R}^n$.
   Soit $z_0 = q(y)$.
   $\forall z \in \mathrm{Im}\,(M)$ $\|z - y\| \geq \|z_0 - y\|$ avec égalité si, et seulement si, $z = z_0$.
   M représente dans les bases canoniques une application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$.
   Si on suppose que M est de rang p alors cette application est injective et :
   $\exists! x_0 \in \mathbb{R}^p$ tel que $Mx_0 = z_0$.
   Soit $x \in \mathbb{R}^p$.
   $Mx \in \mathrm{Im}\,(M)$ donc :
   $\|Mx - y\| \geq \|z_0 - y\| = \|Mx_0 - y\|$
   De plus si $\|Mx - y\| = \|Mx_0 - y\| = \|z_0 - y\|$ alors $Mx = z_0$.
   Donc $Mx = Mx_0$ puis $x = x_0$.
2. $M^T M$ est une matrice symétrique réelle à p lignes et p colonnes.
   Soit $x \in \mathrm{Ker}\,(M^T M)$ ($x \in \mathbb{R}^p$).

$\|Mx\|^2 = (Mx)^T Mx = x^T M^T Mx = 0$ donc $Mx = 0$ puis $x = 0$.
On en déduit que $M^T M$ est inversible.
C'est la méthode habituelle, peut-être y a-t-il moyen d'utiliser ce qui précède.

$\mathrm{Im}\,(M)$ et $\mathrm{Ker}\,(M^T)$ sont des sev de $\mathbb{R}^n$.
Soit $y \in \mathrm{Im}\,(M)$: $\exists x \in \mathbb{R}^p$ tq $y = Mx$.
Soit $z \in \mathrm{Ker}\,(M^T)$.
$(y|z) = (Mx)^T z = x^T M^T z = 0$
On en déduit que $\mathrm{Im}\,(M) \perp \mathrm{Ker}\,(M^T)$.
Mais :
$\dim(\mathrm{Ker}\,(M^T)) = n - \mathrm{rg}(M^T) = n - \mathrm{rg}(M) = n - \dim(\mathrm{Im}\,(M))$ donc $\mathrm{Ker}\,(M^T)$ et $\mathrm{Im}\,(M)$ sont deux supplémentaires orthogonaux de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 8 *(X 2015)*

Soit $P \in \mathcal{M}_9(\mathbb{R})$ telle que :
$\forall (X, Y) \in \mathbb{R}^9 \times \mathbb{R}^9 \; X^T PY = -Y^T PX$
Montrer que $P \notin GL_9(\mathbb{R})$.

Correction
Vue sa taille P a au moins une valeur propre réelle λ.
Soit X un vecteur propre (réel) associé.
On prend $Y = X$ et on a :
$X^T PX = -X^T PX$ donc $X^T PX = 0$.
Mais $X^T PX = X^T(\lambda X) = \lambda \|X\|^2$.
D'où $\lambda = 0$.
0 est valeur propre de P donc P n'est pas inversible.

Exercice 9 *(X 2021)*

Soient E un espace euclidien de dimension n et $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille de vecteurs de E telle que :
$\forall x \in E \;\; \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (e_i|x)^2$
Montrer que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une BON de E.

Correction
Soit $x \in \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n)^\perp$.
$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (e_i \mid x)^2 = \sum_{i=1}^{n} 0^2 = 0$
Donc $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n)^\perp = \{0\}$.
Comme E est de dimension finie, $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n) = \left(\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n)^\perp\right)^\perp = \{0\}^\perp = E$.
En d'autres termes, la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est génératrice.
Au vu de son cardinal, c'est une base de E.
Il reste à montrer que c'est une famille orthonormée.
Soit $i \in [\![1; n]\!]$.
On prend $x = e_i$:
$\|e_i\|^2 = \|e_i\|^4 + \sum_{j \neq i} (e_i|e_j)^2 \geq \|e_i\|^4$

Or $e_i \neq 0$ car e_i fait partie d'une base donc $\|e_i\|^2 \leq 1$.
$\text{Vect}\left((e_j)_{j\neq i}\right)$ est de dimension $n-1$ donc son orthogonal est de dimension 1 et il existe un vecteur x non nul orthogonal à tous les e_j pour j différent de i.
On a : $\|x\|^2 = (e_i|x)^2 \leq \|e_i\|^2 \|x\|^2$ par Cauchy-Schwarz
x est non nul donc $\|e_i\| \geq 1$.
On a donc $\|e_i\| = 1$.
$\|e_i\|^2 = \|e_i\|^4 + \sum_{j\neq i}(e_i|e_j)^2$ donne alors :
$\sum_{j\neq i}(e_i|e_j)^2 = 0$
donc $(e_i|e_j)$ est nul pour $j \neq i$.

Exercice 10 *(Mines 2022)*

Soit E un espace euclidien et f une forme linéaire sur E.

1. Montrer :
   $\exists! a \in E$ tq $\forall x \in E\ f(x) = (a|x)$
2. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   Montrer :
   $\exists! A \in \mathbb{R}_n[X]$ tq $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]\ \displaystyle\int_0^1 A(t)P(t)\,\mathrm{d}t = P(0)$
3. Montrer que le degré de A vaut n et que $A(0) > 0$.

Correction

1. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une BON de E.
   Soit $a = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k e_k$ un vecteur quelconque de E.
   f est linéaire donc :
   $$\begin{aligned}(\forall x \in E\ f(x) = (a|x)) &\iff (\forall i \in [\![1;n]\!]\ f(e_i) = (a|e_i) = a_i)\\ &\iff a = \sum_{k=1}^{n} f(e_k)e_k\end{aligned}$$
2. Il suffit d'appliquer ce qui précède avec $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $f : P \mapsto P(0)$, le produit scalaire étant défini par : $(P|Q) = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$
3. Supposons A de degré inférieur ou égal à $n-1$.
   $P = XA \in \mathbb{R}_n[X]$ donc :
   $\displaystyle\int_0^1 tA(t)^2\,\mathrm{d}t = 0$
   Mais la fonction $t \mapsto tA(t)^2$ est continue et positive donc :
   $\forall t \in [0;1]\ tA(t)^2 = 0$
   Le polynôme A a donc une infinité de racines. C'est le polynôme nul : c'est absurde, on aurait :
   $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]\ P(0) = 0$
   On a donc montré que A est de degré n.

   $A(0) = \displaystyle\int_0^1 A(t)^2\,\mathrm{d}t = \|A\|^2 > 0$ car A est non nul.

Exercice 11 *(Mines 2022)*

Soit E un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E.
Soit $(f_1, \dots, f_n)$ une famille de vecteurs de E telle que :
$\forall k \in [\![1;n]\!] \ \|e_k - f_k\| < \dfrac{1}{\sqrt{n}}$
Montrer que $(f_1, \dots, f_n)$ est une base de E.
Que se passe-t-il si il y a égalité ?

Correction

- **Première méthode**
  Au vu du nombre de vecteurs, il suffit de montrer que la famille $(f_1, \dots, f_n)$ est libre.
  Pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, soit $\delta_k = f_k - e_k$.
  $\forall k \in [\![1;n]\!] \ \|\delta_k\| < \dfrac{1}{\sqrt{n}}$
  Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tq $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k = 0$
  On a donc : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k (e_k + \delta_k) = 0$
  et : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k = -\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \delta_k$
  On en déduit :

$$\begin{aligned}
\sqrt{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2} &= \left\|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k\right\| \text{ car } (e_1, \dots, e_n) \text{ base orthonormée de } E \\
&= \left\|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \delta_k\right\| \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k| \, \|\delta_k\| \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k| \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k| \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} 1^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^2} \text{ par Cauchy-Schwarz} \\
&\leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2}
\end{aligned}$$

  Donc toutes les inégalités écrites sont en fait des égalités. En particulier :
  $\forall k \in [\![1;n]\!] \ |\lambda_k| \, \|\delta_k\| = |\lambda_k| \dfrac{1}{\sqrt{n}}$
  Si on suppose :
  $\forall k \in [\![1;n]\!] \ \|e_k - f_k\| < \dfrac{1}{\sqrt{n}}$
  on a donc :
  $\forall k \in [\![1;n]\!] \ |\lambda_k| = 0$ donc $\lambda_k = 0$

et la famille $(f_1, \ldots, f_n)$ est libre.

Le résultat subsiste si on suppose :
$\forall k \in [\![1;n]\!] \ \|e_k - f_k\| \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}}$
et :
$\exists k_0 \in [\![1;n]\!]$ tq $\|e_{k_0} - f_{k_0}\| < \dfrac{1}{\sqrt{n}}$
En effet, toutes les inégalités étant en fait des égalités, il y a égalité dans Cauchy-Schwarz de sorte que :
$\forall k \in [\![1;n]\!] \ |\lambda_k| = |\lambda_1|$
et on a toujours :
$\forall k \in [\![1;n]\!] \ |\lambda_k| \, \|\delta_k\| = |\lambda_k| \, \dfrac{1}{\sqrt{n}}$
ce qui donne pour $k = k_0$:
$|\lambda_1| \, \|\delta_{k_0}\| = |\lambda_1| \, \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ avec $\|\delta_{k_0}\| < \dfrac{1}{\sqrt{n}}$
On en déduit $|\lambda_1| = 0$ donc $\lambda_1 = 0$ et on conclut facilement.

Reste le cas où :
$\forall k \in [\![1;n]\!] \ \|e_k - f_k\| = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$
Le cas d'égalité de l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne :
$\forall k \in [\![1;n]\!] \ |\lambda_k| = |\lambda_1|$
Le cas d'égalité dans l'inégalité du milieu ne donne plus rien.
Le cas d'égalité de l'inégalité triangulaire permet d'affirmer que les vecteurs $\lambda_k \delta_k$ sont colinéaires et de même sens.
Les δ_k ayant la même norme et les λ_k la même valeur absolue, les vecteurs $\lambda_k \delta_k$ sont égaux, égaux à $-\dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$.

On est ainsi amené à essayer les vecteurs $f_k = e_k - \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{l=1}^{n} e_l$.

$\forall k \in [\![1;n]\!] \ \|f_k - e_k\| = \dfrac{1}{n} \sqrt{\displaystyle\sum_{l=1}^{n} 1^2} = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f_k = 0$.

- **Deuxième méthode**
  Soit x un vecteur orthogonal à tous les f_k.
  $\forall k \in \mathbb{N} \ |(e_k \mid x)| = |(e_k - f_k | x)| \leq \|e_k - f_k\| \, \|x\|$
  Mais $x = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (e_k \mid x) e_k$ et :
  $\|x\|^2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (e_k \mid x)^2 \leq \|x\|^2 \sum_{k=1}^{n} \|e_k - f_k\|^2$
  Donc :
  $\left(1 - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \|e_k - f_k\|^2\right) \|x\|^2 \leq 0$

avec $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \|e_k - f_k\|^2 < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} = 1$
Donc $\|x\|^2 \leq 0$ et $x = 0$.
On a donc montré : $(\mathrm{Vect}(f_1, \ldots, f_n))^\perp = \{0\}$.
On en déduit, E étant de dimension finie, $\mathrm{Vect}(f_1, \ldots, f_n) = E$ ie $(f_1, \ldots, f_n)$ est une famille génératrice de E. Vu le nombre de vecteurs et la dimension de E, $(f_1, \ldots, f_n)$ est une base de E.

On suppose désormais :
$\forall k \in [\![1; n]\!]\ \|e_k - f_k\| \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}}$
$\exists k_0 \in [\![1; n]\!]$ tq $\|e_{k_0} - f_{k_0}\| = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$
$\exists k_1 \in [\![1; n]\!]$ tq $\|e_{k_1} - f_{k_1}\| < \dfrac{1}{\sqrt{n}}$
Soit x un vecteur orthogonal à tous les f_k.
$\forall k \in \mathbb{N}\ |(e_k \mid x)| = |(e_k - f_k|x)| \leq \|e_k - f_k\|\, \|x\|$
Mais $x = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (e_k \mid x) e_k$ et :
$\|x\|^2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (e_k \mid x)^2 \leq \|x\|^2 \sum_{k=1}^{n} \|e_k - f_k\|^2$
Donc :
$\left(1 - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \|e_k - f_k\|^2\right) \|x\|^2 \leq 0$
avec $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \|e_k - f_k\|^2 < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} = 1$: on somme n inégalités dont une au moins est stricte
Donc $\|x\|^2 \leq 0$ et $x = 0$.
On a donc montré : $(\mathrm{Vect}(f_1, \ldots, f_n))^\perp = \{0\}$.
On en déduit, E étant de dimension finie, $\mathrm{Vect}(f_1, \ldots, f_n) = E$ ie $(f_1, \ldots, f_n)$ est une famille génératrice de E. Vu le nombre de vecteurs et la dimension de E, $(f_1, \ldots, f_n)$ est une base de E.

Enfin, on traite le cas :
$\forall k \in [\![1; n]\!]\ \|e_k - f_k\| = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$
On suppose qu'il existe un vecteur x non nul et orthogonal à tous les f_k.
Quitte à diviser x par sa norme, on peut supposer x unitaire.
$\forall k \in [\![1; n]\!]\ |(e_k \mid x)| = |(e_k - f_k|x)| \leq \|e_k - f_k\|\, \|x\|$
Mais $x = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (e_k \mid x) e_k$ et :
$\|x\|^2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (e_k \mid x)^2 \leq \|x\|^2 \sum_{k=1}^{n} \|e_k - f_k\|^2 = \|x\|^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} = \|x\|^2$
On a donc :
$\forall k \in [\![1; n]\!]\ (e_k \mid x)^2 = (e_k - f_k \mid x)^2 = \|x\|^2\, \|e_k - f_k\|^2$
D'après le cas d'égalité de l'inégalité de Cauchy-Schwarz :
$\forall k \in \mathbb{N}\ \exists \lambda_k \in \mathbb{R}$ tq $e_k - f_k = \lambda_k x$

En prenant la norme, on obtient $\lambda_k = \pm\dfrac{1}{\sqrt{n}}$.
On pose $\epsilon_k = \lambda_k\sqrt{n} \in \{-1;1\}$.
$x = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(e_k \mid x)e_k = \sum_{k=1}^{n}(e_k - f_k \mid x)e_k = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\epsilon_k e_k$
$\forall k \in [\![1;n]\!]\ f_k = e_k - \lambda_k x = e_k - \dfrac{\epsilon_k}{\sqrt{n}}x$

Réciproquement, on suppose qu'il existe $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) \in \{-1;1\}^n$ tel que :
$\forall k \in [\![1;n]\!]\ f_k = e_k - \dfrac{\epsilon_k}{\sqrt{n}}x$ où $x = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\epsilon_k e_k$

$$\begin{aligned}
\forall k \in [\![1;n]\!]\ (f_k \mid x) &= \left(e_k - \frac{\epsilon_k}{\sqrt{n}}x \mid x\right) = (e_k \mid x) - \frac{\epsilon_k}{\sqrt{n}}\|x\|^2 \\
&= \frac{\epsilon_k}{\sqrt{n}} - \frac{\epsilon_k}{\sqrt{n}} \times \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} 1 \\
&= 0
\end{aligned}$$

On en déduit que $\mathrm{Vect}(f_1, \dots, f_n) \subset x^{\perp}$. La famille $(f_1, \dots, f_n)$ n'est pas génératrice, ce n'est donc pas une base de E.

1 Endomorphismes d'un espace euclidien

1.1 Isométries vectorielles et matrices orthogonales

Exercice 12 *(Mines 2017)*

Soient E un espace euclidien et a et b deux vecteurs non nuls.
Soit Ω l'ensemble des automorphismes orthogonaux s de E tels que $s(a) = b$.

1. Donner une CNS pour que Ω soit non vide.
2. ?

Correction

1. Si Ω est non vide, on a facilement $\|a\| = \|b\|$.
   Réciproquement, on suppose $\|a\| = \|b\|$.
   Si $a = b$ c'est trivial.
   On suppose $a \neq b$.
   Soit s la réflexion d'hyperplan $(a-b)^{\perp}$.
   $\|a\| = \|b\|$ entraîne $a - b \perp a + b$.
   $a = \dfrac{a+b}{2} + \dfrac{a-b}{2}$ et $s(a) = \dfrac{a+b}{2} - \dfrac{a-b}{2} = b$
2. ?

Exercice 13 *(CCP 2019)*

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
On note $S = a + b + c$ et $\sigma = ab + bc + ca$.

1. Montrer :
   $A \in O_3(\mathbb{R}) \iff S = \pm 1$ et $\sigma = 0$
2. Préciser une condition pour que $A \in SO_3(\mathbb{R})$.

Correction

1. Une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est orthogonale si et seulement si ses trois colonnes sont unitaires et deux à deux orthogonaux.
   Les trois colonnes de A ont la même norme : $a^2 + b^2 + c^2$.
   Le produit scalaire de deux colonnes (distinctes) vaut toujours $ab + bc + ac$
   On en déduit :
$$\begin{aligned} A \in O(3) &\iff \begin{cases} a^2+b^2+c^2 = 1 \\ ab+ac+bc = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} (a+b+c)^2 - 2(ab+ac+bc) = 1 \\ ab+ac+bc = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} S^2 = 1 \\ \sigma = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} S = \pm 1 \\ \sigma = 0 \end{cases} \end{aligned}$$
2. Les matrices de $SO(3)$ sont caractérisées parmi les matrices de $O(3)$ par : $\det(A) = 1$.
$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+c & b & c \\ a+b+c & c & a \\ a+b+c & a & b \end{vmatrix} \; L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3 \\ &= (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & c & a \\ 1 & a & b \end{vmatrix} \\ &= (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & c-b & a-c \\ 0 & a-b & b-c \end{vmatrix} \; L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \; L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ &= (a+b+c) \begin{vmatrix} c-b & a-c \\ a-b & b-c \end{vmatrix} \\ &= -(a+b+c)\left((a-b)(a-c) + (b-c)^2\right) \\ &= -(a+b+c)(a^2 + bc - ab - ac + b^2 - 2bc + c^2) \\ &= -(a+b+c)\left((a^2+b^2+c^2 - (ab+ac+bc)\right) \end{aligned}$$
   Si A est une matrice orthogonale alors son déterminant vaut $-(a+b+c)(1-0) = -(a+b+c)$ donc si A appartient à $SO(3)$ alors $S = -1$ et $\sigma = 0$.
   Réciproquement, si $S = -1$ et $\sigma = 0$, A est une matrice orthogonale d'après la première question.
   Son déterminant vaut alors $-S = 1$ et $A \in SO(3)$.
   Finalement :
   $A \in SO(3) \iff \begin{cases} S = -1 \\ \sigma = 0 \end{cases}$

Exercice 14 *(D'après Centrale 2017 maths 2)*

On dit que deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifient la propriété (N) si, et seulement si, $\|Ax\| = \|Bx\|$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ (où $\|.\|$ est la norme euclidienne canonique).

1. Montrer :
   A et B vérifient $(N) \iff \forall(i,j) \in [\![1;n]\!]^2\ (A_i|A_j) = (B_i|B_j)$ où A_k est la $k^{\text{ième}}$ colonne de A.
2. On suppose $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Montrer :
   A et B vérifient $(N) \iff \exists C \in O(n)$ tq $A = CB$
3. Soient $u = (u_1, \dots, u_p)$ et $v = (v_1, \dots, v_p)$ deux familles libres de $\mathbb{R}^n$ telles que $G_u = G_v$ où G_u est la matrice $((u_i|u_j))_{1\leq i,j\leq p}$.
   On note $U = Vect(u_1, \dots, u_p)$ et $V = Vect(v_1, \dots, v_p)$.
   (a) Montrer :
   $\exists! f \in \mathcal{L}(U, V)$ tq $\forall i \in [\![1;p]\!]\ f(u_i) = v_i$
   (b) Montrer que f est une isométrie vectorielle.
   (c) Montrer qu'il existe une isométrie vectorielle g de $\mathbb{R}^n$ telle que $g_{|U} = f$.
4. Montrer dans le cas général :
   A et B vérifient $(N) \iff \exists C \in O(n)$ tq $A = CB$

Correction

On note $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
$\forall i \in [\![1;n]\!]\ A_i = Ae_i$ et $B_i = Be_i$.

1. • $\Longrightarrow$

$$\begin{aligned}
\forall(i,j) \in [\![1;n]\!]^2\ \|A(e_i + e_j)\|^2 &= \|B(e_i + e_j)\|^2 \\
\|Ae_i + Ae_j\|^2 &= \|Be_i + Be_j\|^2 \\
\|Ae_i\|^2 + \|Ae_j\|^2 + 2(Ae_i|Ae_j) &= \|Be_i\|^2 + \|Be_j\|^2 + 2(Be_i|Be_j)
\end{aligned}$$

   D'où le résultat après simplification : $\|Ae_i\|^2 = \|Be_i\|^2$

   • $\Longleftarrow$
   Soit $x \in \mathbb{R}^n$.
   $\exists(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tq $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$

$$\begin{aligned}
\|Ax\|^2 &= \left\|\sum_{i=1}^{n} x_i A e_i\right\|^2 = \left\|\sum_{i=1}^{n} x_i A_i\right\|^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j (A_i|A_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j (B_i|B_j) \\
&= \|Bx\|^2
\end{aligned}$$

2. • $\Longrightarrow$
   $\forall x \in \operatorname{Ker}(B)\ \|Ax\| = \|Bx\| = \|0\| = 0$
   $\forall x \in \operatorname{Ker}(B)\ Ax = 0$

Mais A est inversible donc $x = 0$.
B est donc inversible.
On pose $C = AB^{-1}$.

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}^n \ \ \|Cx\| &= \left\|AB^{-1}x\right\| = \left\|BB^{-1}x\right\| \\ &= \|x\|\end{aligned}$$

C est bien une matrice orthogonale.

- $\Longleftarrow$
  $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2 \ (A_i|A_j) = (CB_i|CB_j) = (B_i|B_j)$ car C est une matrice orthogonale.
  A et B vérifient la propriété (N) d'après 1).

3. (a) u est une famille libre donc c'est une base de $U = Vect(u)$.
Une application linéaire étant parfaitement définie par la donnée des images des vecteurs d'une base de l'espace de départ :
$\exists! f \in \mathcal{L}(U,V)$ tq $\forall i \in [\![1;p]\!] \ f(u_i) = v_i$

(b)

$$\begin{aligned}\forall x \in U \ \ \|f(x)\|^2 &= \left\|\sum_{i=1}^{p} x_i f(u_i)\right\|^2 = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} x_i x_j (f(u_i)|f(u_j)) \\ &= \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} x_i x_j (v_i|v_j) \text{ car } f(u_i) = v_i \\ &= \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} x_i x_j (u_i|u_j) = \left\|\sum_{i=1}^{p} x_i u_i\right\|^2 \\ &= \|x\|^2\end{aligned}$$

f est bien une isométrie vectorielle.

(c) Soit $(u_{p+1}, \dots, u_n)$ une BON de $U^\perp$.
Soit $(v_{p+1}, \dots, v_n)$ une BON de $V^\perp$.
$\exists! g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ tq $\forall i \in [\![1;n]\!] \ g(u_i) = v_i$
Soit $x = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i \in \mathbb{R}^n$.
$g(x) = \left(\sum_{i=1}^{p} x_i v_i \in V\right) + \left(\sum_{i=p+1}^{n} x_i v_i \in V^\perp\right)$.
Par Pythagore :

$$\begin{aligned}\|g(x)\|^2 &= \left\|\sum_{i=1}^{p} x_i v_i\right\|^2 + \left\|\sum_{i=p+1}^{n} x_i v_i\right\|^2 \\ &= \left\|f\left(\sum_{i=1}^{p} x_i u_i\right)\right\|^2 + \sum_{i=p+1}^{n} x_i^2 \text{ car } (v_{p+1}, \dots, v_n) \text{ est } ON \\ &= \left\|\sum_{i=1}^{p} x_i u_i\right\|^2 + \left\|\sum_{i=p+1}^{n} x_i u_i\right\|^2 \text{ car } (u_{p+1}, \dots, u_n) \text{ est } ON \\ &= \left\|\sum_{i=1}^{n} x_i u_i\right\|^2 = \|x\|^2 \text{ par Pythagore}\end{aligned}$$

g est bien un automorphisme orthogonal de $\mathbb{R}^n$ dont la restriction à U est f.

4. Si $A = CB$ avec $C \in O(n)$ alors A et B vérifient (N) comme en 5).
On suppose désormais que A et B vérifient (N) sans être inversibles (si l'une ne l'est pas, l'autre non plus).
D'après (N), $\mathrm{Ker}\,(A) = \mathrm{Ker}\,(B)$ et $rg(A) = rg(B)$.
Soit $(u_1, \dots, u_p)$ p colonnes de B formant une base de $\mathrm{Im}\,(B)$.
Soient $(v_1, \dots, v_p)$ les colonnes de A de mêmes indices.
D'après 1), $G_u = G_v$.
D'après 6), il existe g automorphisme orthogonal de $\mathbb{R}^n$ tel que :
$\forall i \in [\![1;p]\!]\ g(u_i) = v_i$.
Soit $x \in \mathbb{R}^n$.
$\exists (y_1, \dots, y_p) \in \mathbb{R}^p$ tq $Bx = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} y_i u_i$.
Soit C la matrice canonique de g : $C \in O(n)$.
$CBx = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} y_i v_i$
Il existe $\epsilon_1, \dots, \epsilon_p$, p vecteurs de la base canonique tels que $u_i = B\epsilon_i$ et $v_i = A\epsilon_i$.
$Bx = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} y_i u_i = \sum_{i=1}^{p} y_i B\epsilon_i$ donc $x - \displaystyle\sum_{i=1}^{p} y_i \epsilon_i \in \mathrm{Ker}\,(B)$.
Mais $\mathrm{Ker}\,(A) = \mathrm{Ker}\,(B)$ et :
$Ax = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} y_i A\epsilon_i = \sum_{i=1}^{p} y_i v_i = CBx$.
D'où $A = CB$.

Exercice 15 *(Centrale 2015, rapport du jury)*

Soit f un automorphisme orthogonal d'un espace euclidien E.
On pose $g = f - id_E$.

1. Montrer que $\mathrm{Im}\,(g) = \mathrm{Ker}\,(g)^\perp$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $p_n = \dfrac{1}{n}\left(id_E + f + f^2 + \cdots + f^{n-1}\right)$.
Montrer que pour tout $x \in E$, la suite $(p_n(x))$ converge vers $p(x)$ le projeté orthogonal sur $\mathrm{Ker}\,(g)$.

Correction

1. Soit $x \in \mathrm{Ker}\, g$ et $y \in \mathrm{Im}\,(g)$.
$x \in \mathrm{Ker}\,(g)$ donc $f(x) = x$
$y \in \mathrm{Im}\,(g)$ donc : $\exists z \in E$ tq $y = g(z) = f(z) - z$
$(x|y) = (x|f(z) - z) = (x|f(z)) - (x|z) = (f(x)|f(z)) - (x|z) = 0$ car $f \in O(E)$
Donc $\mathrm{Ker}\,(g) \perp \mathrm{Im}\,(g)$ et $\mathrm{Im}\,(g) \subset \mathrm{Ker}\,(g)^\perp$
Mais $\dim\left(\mathrm{Ker}\,(g)^\perp\right) = \dim(E) - \dim(\mathrm{Ker}\,(g)) = \dim(\mathrm{Im}\,(g))$ avec la formule du rang.
Donc $\mathrm{Im}\,(g) = \mathrm{Ker}\,(g)^\perp$.

2.

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}^* \ g \circ p_n &= \frac{1}{n}(f - id_E) \circ \sum_{k=0}^{n-1} f^k = \frac{1}{n}\left(f \circ \sum_{k=0}^{n-1} f^k - \sum_{k=0}^{n-1} f^k\right) \\ &= \frac{1}{n}\left(\sum_{k=0}^{n-1} f^{k+1} - \sum_{k=0}^{n-1} f^k\right) \\ &= \frac{1}{n}\left(f^{n+1} - id_E\right)\end{aligned}$$

g et p_n commutent (ce sont des polynômes en f) donc $p_n \circ g = \dfrac{1}{n}\left(f^{n+1} - id_E\right)$.
Soit $x \in E$.
$\forall n \in \mathbb{N}^* \ \|p_n(g(x))\| \leq \dfrac{1}{n}\left(\|f^n(x)\| + \|x\|\right) = \dfrac{2}{n}\|x\|$
En effet $f \in O(E)$ qui est stable par $\circ$ donc les puissances de f sont toutes dans $O(E)$.
Donc :
$\forall x \in E \ p_n(g(x)) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$
ou encore :
$\forall y \in \mathrm{Im}\,(g) \ p_n(y) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Soit $x \in \mathrm{Ker}\,(g)$.
$f(x) = x$ donc par une récurrence facile :
$\forall n \in \mathbb{N} \ f^n(x) = x$
Donc :
$\forall n \in \mathbb{N}^* \ p_n(x) = \dfrac{1}{n}(nx) = x \xrightarrow[n \to +\infty]{} x$

Soit $x \in E$.
Soit y son projeté orthogonal sur $\mathrm{Ker}\,(g)$.
$x - y \in \mathrm{Ker}\,(g)^\perp = \mathrm{Im}\,(g)$
$\forall n \in \mathbb{N}^* \ p_n(x) = p_n(y) + p_n(x - y)$
D'après l'étude des cas particuliers ci-dessus, $p_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} y + 0 = y$.

Exercice 16 *(X 2022)*

A quelle condition sur n existe-t-il $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + I_n = 0$?

Correction
Si A existe alors $A^2 = -I_n$ et en prenant le déterminant $(\det(A))^2 = (-1)^n$.
On en déduit que n est pair.
Réciproquement, si $n = 2p$ la matrice diagonale par blocs $A = \mathrm{Diag}(B, \ldots, B)$ avec $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ convient.

Exercice 17 *(Mines 2023)*

Soit $M \in O(n)$.
Montrer que $\left|\displaystyle\sum_{1 \leq i,j \leq n} m_{i,j}\right| \leq n \leq \displaystyle\sum_{1 \leq i,j \leq n} |m_{i,j}| \leq n\sqrt{n}$.

Correction

Soit $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$$MU = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} m_{1,j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} m_{n,j} \end{pmatrix}$$

Donc $\left| \sum_{1 \leq i,j \leq n} m_{i,j} \right| = (MU, U)$ et par Cauchy-Schwarz :

$$\left| \sum_{1 \leq i,j \leq n} m_{i,j} \right| \leq \|MU\| \, \|U\|$$

M étant une matrice orthogonale, $\|MU\| = \|U\|$ et :

$$\left| \sum_{1 \leq i,j \leq n} m_{i,j} \right| \leq \|U\|^2 = n$$

$\forall j \in [\![1;n]\!]\ \sum_{i=1}^{n} m_{i,j}^2 = 1$

On en déduit :

$\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2\ m_{i,j}^2 \leq 1$ puis $|m_{i,j}| \leq 1$

Donc :

$\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2\ m_{i,j}^2 \leq |m_{i,j}|$

En sommant, on obtient :

$n = \mathrm{tr}\,(I_n) = \mathrm{tr}\,(M^T M) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} m_{i,j}^2 \leq \sum_{1 \leq i,j \leq n} |m_{i,j}|$

Il a été vu en cours que $\begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ (A,B) \mapsto \mathrm{tr}\,(A^T B) \end{cases}$ est un produit scalaire.

Pour ce produit scalaire :

$\forall M \in O(n)\ \ \|M\|^2 = \mathrm{tr}\,(M^T M) = \mathrm{tr}\,(I_n) = n$

Soit J la matrice telle que $J_{i,j} = 1$ si $m_{i,j} \geq 0$, -1 sinon.

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne :

$\sum_{1 \leq i,j \leq n} |m_{i,j}| = (M, J) \leq \|M\| \, \|J\| = \sqrt{n} \times n$

2 Endomorphismes et matrices symétriques

Exercice 18 *(CCP 2018,2019)*

Soit E un espace préhilbertien réel.

Soient f et g deux applications de E dans E telles que :

$\forall (x,y) \in E^2\ (f(x)|y) = (x|g(y))$

1. Montrer que f et g sont linéaires.
2. Que dire de l'image de g et du noyau de f ?

Correction

1. Soit x_1 et $x_2 \in E$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$.
   Soit $y \in E$.

$$\begin{aligned}(f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) - \lambda_1 f(x_1) - \lambda_2 f(x_2)|y) &= (f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)|y) - \lambda_1(f(x_1|y) - \lambda_2(f(x_2)|y) \\ &= (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2|g(y)) - \lambda_1(x_1|g(y)) - \lambda_2(x_2|g(y)) \\ &= (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 - \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2|g(y)) \\ &= 0\end{aligned}$$

   Comme c'est vrai pour tout y, $f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$.
   f est donc linéaire.
   On montre de même que g est linéaire.
2. Soit $x \in \mathrm{Ker}\,(f)$ et $y \in \mathrm{Im}\,(g)$.
   Il existe z dans E tel que $y = g(z)$.
   $(x|y) = (x|g(z)) = (f(x)|z) = (0|z) = 0$
   $\mathrm{Ker}\,(f)$ et $\mathrm{Im}\,(g)$ sont donc orthogonaux.
   On a donc $\mathrm{Ker}\,(f) \subset \mathrm{Im}\,(g)^\perp$.
   La réciproque est vraie.
   Soit $x \in \mathrm{Im}\,(g)^\perp$.
   $\|f(x)\|^2 = (f(x)|f(x)) = (x|g(f(x))) = 0$.
   Donc $\mathrm{Ker}\,(f) = \mathrm{Im}\,(g)^\perp$.
3. **Remarque**
   On suppose E de dimension finie ie E euclidien.
   Soit n la dimension de E, qu'on suppose strictement positive.
   Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E.
   Soit A la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.
   Soit B la matrice de g dans la base $\mathcal{B}$.
   $\forall (x,y) \in E^2\ (f(x)|y) = (x|g(y))$
   donne :
   $\forall (X,Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2\ (AX)^T Y = X^T(BY)$
   ou encore :
   $\forall (X,Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2\ X^T A^T Y = X^T BY$
   Donc $B = A^T$.

Exercice 19 *(Mines 2017)*

La matrice $A = \begin{pmatrix} 1-i & -4 & 5 & -7 \\ -4 & 2-i & 14 & 37 \\ 5 & 14 & 3-i & -21 \\ -7 & 37 & -21 & 4-i \end{pmatrix}$ est-elle inversible ?

Correction

La matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 5 & -7 \\ -4 & 2 & 14 & 37 \\ 5 & 14 & 3 & -21 \\ -7 & 37 & -21 & 4 \end{pmatrix}$ est symétrique réelle donc i n'est pas valeur propre de B.
$A = B - iI_4$ est donc inversible.

Exercice 20 *(Centrale 2019)*

Soit E un espace euclidien de dimension n.
Soient a et b deux vecteurs linéairement indépendants de E.
Soit $f \begin{cases} E \to E \\ x \mapsto (a|x)b + (b|x)a \end{cases}$.

1. Montrer que f est un endomorphisme symétrique de E.
2. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.

Correction

1. f est un endomorphisme de E : trivial.
   Un calcul simple donne :

$$\begin{array}{rcl} \forall (x,y) \in E^2 \ (f(x)|y) & = & (a|x)(b|y) + (b|x)(a|y) \\ (x|f(y)) & = & (a|y)(b|x) + (a|x)(b|x) \end{array}$$

   f est symétrique.

2. D'après le théorème spectral, f est diagonalisable.
   (a, b) est libre donc :
   $f(x) = 0 \iff (a|x) = (b|x) = 0$
   $\ker(f) = Vect(a, b)^{\perp}$ est de dimension $n - 2 > 0$.
   0 est valeur propre de multiplicité $n - 2$ de f.
   Il manque deux valeurs propres de f. Les vecteurs propres associés sont dans $(\ker(f))^{\perp} = Vect(a, b)$.
   La matrice dans (a, b) de l'endomorphisme de $Vect(a, b)$ induit par f, noté g, est $\begin{pmatrix} (a|b) & \|b\|^2 \\ \|a\|^2 & (a|b) \end{pmatrix}$ et on utilise la méthode habituelle :

$$\begin{array}{rcl} \chi_g & = & X^2 - \mathrm{tr}\,(g)X + \det(g) \\ & = & X^2 - 2(a|b)X + (a|b)^2 - \|a\|^2 \|b\|^2 \\ & = & (X - (a|b))^2 - \|a\|^2 \|b\|^2 \\ & = & (X - (a|b) - \|a\| \|b\|)(X - (a|b) + \|a\| \|b\|) \end{array}$$

   Les valeurs propres manquantes de f sont donc $(a|b) + \|a\| \|b\|$ et $(a|b) - \|a\| \|b\|$.
   a et b sont linéairement indépendants donc non nuls et ces deux valeurs propres sont distinctes.
   Le cas d'égalité de Cauchy-Schwarz assure qu'elles sont non nulles.
   Passons aux sous-espaces propres :

$$\begin{array}{rcl} xa + yb \in E_{(a|b)+\|a\|\|b\|}(f) & \iff & \begin{cases} (a|b)x + \|b\|^2 y = (a|b)x + \|a\| \|b\| x \\ \|a\|^2 x + (a|b)y = (a|b)y + \|a\| \|b\| y \end{cases} \\ & \iff & y = \dfrac{\|a\|}{\|b\|} x \end{array}$$

   Donc le sous-espace propre de f associé à la valeur propre $(a|b) + \|a\| \|b\|$ est la droite dirigée par $\dfrac{a}{\|a\|} + \dfrac{b}{\|b\|}$.

$$xa + yb \in E_{(a|b)-\|a\|\|b\|}(f) \iff \begin{cases} (a|b)x + \|b\|^2 y = (a|b)x - \|a\| \, \|b\| \, x \\ \|a\|^2 x + (a|b)y = (a|b)y - \|a\| \, \|b\| \, y \end{cases}$$
$$\iff y = -\frac{\|a\|}{\|b\|} x$$

Donc le sous-espace propre de f associé à la valeur propre $(a|b) - \|a\| \, \|b\|$ est la droite dirigée par $\dfrac{a}{\|a\|} - \dfrac{b}{\|b\|}$.

Exercice 21 *(CCP 2019)*

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Quel est le rang de A ?
A est-elle diagonalisable ?
Quelles sont les valeurs propres de A ?

Correction
On suppose que $n \geq 2$.
Le rang de A est égal au rang de la famille $(C_1, \dots, C_n)$ de ses colonnes. Mais $C_1 = C_2 = \dots = C_{n-1}$ et (C_1, C_n) est libre donc A est de rang 2.

A est diagonalisable car symétrique réelle.

On va supposer $n \geq 3$, le cas $n = 2$ ne présentant pas de difficulté particulière.
$n - 2 > 0$ donc 0 est valeur propre. La multiplicité de 0 est la même que la dimension du noyau car A est diagonalisable.
Il manque deux valeurs propres.Leur somme est égale à $\operatorname{tr}(A) = 0$ donc elles sont opposées.
A est donc semblable à une matrice de la forme $\operatorname{Diag}(\lambda, -\lambda, 0, \dots, 0)$ avec $\lambda > 0$.
A^2 est donc semblable à $\operatorname{Diag}(\lambda^2, \lambda^2, 0, \dots, 0)$.
On en déduit $\operatorname{tr}(A^2) = 2\lambda^2$.
Mais $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & 0 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & n-1 \end{pmatrix}$ donc $\lambda = \sqrt{n-1}$

Exercice 22 *(Centrale 2016)*

On note $S = \{X \in \mathbb{R}^n \text{ tq } \|X\| = 1\}$ où $\|.\|$ est la norme euclidienne canonique de $\mathbb{R}^n$.
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Montrer que $\{(MX|X),\ X \in S\}$ est un segment de $\mathbb{R}$.
On pourra commencer par supposer que M est symétrique.

Correction
On commence par supposer que M est symétrique.
On note $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$ ses valeurs propres.
On a classiquement :
$\forall X \in S\ \lambda_1 \leq (MX|X) \leq \lambda_n$ ie $\{(MX|X),\ X \in S\} \subset [\lambda_1; \lambda_n]$.
Soit ϵ_1 un vecteur propre unitaire de M associé à la valeur propre λ_1.
Soit ϵ_n un vecteur propre unitaire de M associé à la valeur propre λ_n.
$\forall \theta \in \mathbb{R}\ \cos\theta\epsilon_1 + \sin\theta\epsilon_n \in S$
Soit $f : \theta \mapsto (M(\cos\theta\epsilon_1 + \sin\theta\epsilon_n)|\cos\theta\epsilon_1 + \sin\theta\epsilon_n)$
f est continue, $f(0) = \lambda_1$ et $f(1) = \lambda_n$
D'après le TVI $[\lambda_1; \lambda_n] \subset \{(MX|X),\ X \in S\}$.
On en déduit : $\{(MX|X),\ X \in S\} = [\lambda_1; \lambda_n]$.
Autre solution
Soit $y \in [\lambda_1; \lambda_n]$.
$\exists t \in [0; 1]$ tq $y = (1-t)\lambda_1 + t\lambda_n$.
$y = (MX|X)$ avec $X = \sqrt{1-t}\epsilon_1 + \sqrt{t}\epsilon_n$.

Dans le cas général, on remarque :
$(MX|X) = (MX)^T X = X^T M^T X = (X|M^T X) = (M^T X|X)$
On en déduit :
$(MX|X) = \left(\left(\dfrac{M+M^T}{2}\right) X|X\right)$
ce qui nous ramène au cas d'une matrice symétrique.

Exercice 23 *(Mines 2011, 2019)*

Déterminer les $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A\,A^T\,A = I_n$.

Correction
$A\,(A^T\,A) = I_n$ donc A est inversible et $A^{-1} = A^T\,A$ qui est symétrique.
On en déduit que A est symétrique réelle.
On a donc $A = PDP^T$ avec P orthogonale et D diagonale.
$A\,A^T\,A = I_n$ donne $A^3 = I_n$ puis $D^3 = I_n$.
On en déduit facilement $D = I_n$ puis $A = I_n$.
La réciproque est triviale.

Exercice 24 *(Mines 2021)*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 + A^2 + A = 0$.

1. On suppose en plus A symétrique.
   Montrer que A est nulle.
2. Montrer que $\mathrm{tr}\,(A) \in \mathbb{Z}$.
3. Donner un encadrement de $\mathrm{tr}\,(A)$.

Correction

1. On montre classiquement que si λ est une valeur propre complexe de A alors $\lambda^3+\lambda^2+\lambda = 0$ ie $\lambda = 0, j$ ou j^2.
   Mais si A est symétrique réelle, ses valeurs propres complexes sont en fait réelles : 0 est

la seule valeur propre de A.
Mais une matrice symétrique réelle est diagonalisable donc A est semblable à la diagonale nulle ie la matrice nulle. On en déduit facilement que A est nulle.

2. $\operatorname{tr}(A)$ est la somme des valeurs propres complexes de A comptées avec leurs multiplicités donc $\operatorname{tr}(A) = \alpha_1 \times 0 + \alpha_2 \times j + \alpha_3 j^2$ avec $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = n$.
Mais A est réelle donc $\alpha_2 = \alpha_3$ et :
$\operatorname{tr}(A) = \alpha_2(j + j^2) = -\alpha_2 \in \mathbb{Z}$
3. $\alpha_1 + 2\alpha_2 = n$ donc $0 \leq \alpha_2 \leq \dfrac{n}{2}$.
Avec une matrice diagonale par blocs de la forme $\mathrm{Diag}(0, \dots, 0, R, \dots, R)$ où $R = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$,
on montre que α_2 peut prendre comme valeur tous les entiers de 0 à $\left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor$.
On conclut facilement.

Exercice 25 *(Mines 2011,2019)*

Soit E un espace euclidien.
Si w est un endomorphisme symétrique de E, on note $\alpha(w)$ sa plus petite valeur propre et $\beta(w)$ sa plus grande valeur propre.

1. Si w est un endomorphisme symétrique de E et x un vecteur de E, encadrer $(w(x) \mid x)$ à l'aide de $\alpha(w)$ et de $\beta(w)$.
2. Soient u et v deux endomorphismes symétriques de E.
Montrer $\beta(u + v) \geq \alpha(u) + \beta(v)$.

Correction

1. $\forall x \in E \ \alpha(w) \|x\|^2 \leq (w(x) \mid x) \leq \beta(w) \|x\|^2$
Démonstration
D'après le théorème spectral, il existe $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ BON de E formée de vecteurs propres de w.
Pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, on note λ_i la valeur propre associée au vecteur propre e_i de sorte que :
$\forall i \in [\![1; n]\!] \ w(e_i) = \lambda_i e_i$
Quitte à permuter les vecteurs de cette base, on peut supposer $\lambda_1 \leq \dots \lambda_n$.
On a alors $\lambda_1 = \alpha(w)$ et $\lambda_n = \beta(w)$.
Soit $x \in E$.
$\exists (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tq $x = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k e_k$.
$$\begin{aligned} (w(x) \mid x) &= \left(w\left(\sum_{k=1}^{n} x_k e_k\right) \mid \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \right) = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k w(e_k) \mid \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \right) \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n} x_k \lambda_k e_k \mid \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k^2 \text{ car } \mathcal{B} \text{ est orthonormée} \end{aligned}$$
On en déduit :
$\lambda_1 \|x\|^2 = \lambda_1 \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \leq (w(x) \mid x) \leq \lambda_n \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = \lambda_n \|x\|^2$

2. Soit y un vecteur propre de v pour la valeur propre $\beta(v)$.
   $x = \dfrac{1}{\|y\|} y$ est un vecteur unitaire tel que $v(x) = \beta(v)x$.

$$\begin{array}{rcl} \beta(u+v) & = & \beta(w) \geq (w(x) \mid x) = (u(x) \mid x) + (v(x) \mid x) = (u(x) \mid x) + \beta(v) \|x\|^2 \\ & \geq & \alpha(u) \|x\|^2 + \beta(v) = \alpha(u) + \beta(v) \end{array}$$

Exercice 26 *(Centrale 2019)*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique dont toutes les valeurs propres sont strictement positives.
Etant donné un vecteur x de $\mathbb{R}^n$, on pose $f_A(x) = X^T AX$ où X est le vecteur colonne canoniquement associé à x.

1. Montrer que la fonction $L(f_A) : p \mapsto \max\limits_{x \in \mathbb{R}^n} ((p|x) - f_A(x))$ est bien définie.
2. Montrer que la fonction $L(f_A)$ est de la forme f_B pour une matrice B à préciser.

Correction

1. • **La question vue depuis le cours d'algèbre linéaire**
   A est symétrique réelle donc :
   $\exists Q \in O(n)$ tq $A = QDQ^T$ avec $D = \text{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.
   Par hypothèse :
   $\forall i \in [\![1; n]\!]$ $\lambda_i > 0$
   Soit $x \in \mathbb{R}^n$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ la matrice colonne canoniquement associée.
   Soit $p \in \mathbb{R}^n$ et $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$ la matrice colonne canoniquement associée. Attention : contrairement aux notations habituelles, P est une colonne et non une matrice carrée.

$$\begin{array}{rcl} (p|x) - f_A(x) & = & P^T X - X^T AX = P^T (QQ^T)X - X^T (QDQ^T)X \\ & = & (P^T Q)(Q^T X) - (X^T Q)D(Q^T X) \\ & = & (Q^T P)^T (Q^T X) - (Q^T X)^T D(Q^T X) \end{array}$$

   On pose $Y = Q^T X = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ et $Z = Q^T P = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{rcl} (p|x) - f_A(x) & = & Z^T Y - Y^T DY = \displaystyle\sum_{i=1}^n z_i y_i - \begin{pmatrix} y_1 & \ldots & y_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 y_1 \\ \vdots \\ \lambda_n y_n \end{pmatrix} \\ & = & \displaystyle\sum_{i=1}^n z_i y_i - \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2 = \sum_{i=1}^n \left(z_i y_i - \lambda_i y_i^2 \right) \end{array}$$

   Une étude de fonction élémentaire donne pour $z \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$:
   $\forall y \in \mathbb{R}$ $zy - \lambda y^2 \leq \dfrac{z^2}{4\lambda}$ avec égalité pour $y = \dfrac{z}{2\lambda}$

On en déduit :
$(p|x) - f_A(x) \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{z_i^2}{4\lambda_i}$
avec égalité pour x tel que $Y = \begin{pmatrix} z_1/(2\lambda_1) \\ \vdots \\ z_n/(2\lambda_n) \end{pmatrix}$ ie $X = \frac{1}{2}QD^{-1}Z = \frac{1}{2}QD^{-1}Q^TP = \frac{1}{2}A^{-1}P$
Donc la fonction $L(f_A)$ est bien définie.

- **La question vue depuis le cours sur les fonctions de plusieurs variables**
On va justifier l'existence du maximum avec le théorème des bornes atteintes.
La fonction $g : x \in \mathbb{R}^n \mapsto (p|x) - f_A(x)$ est continue (car polynomiale) et $\mathbb{R}^n$ est un fermé non vide mais $\mathbb{R}^n$ n'est pas borné.
On doit tout de même avoir recours à l'algèbre linéaire.
A est symétrique réelle donc :
$\exists Q \in O(n)$ tq $A = QDQ^T$ avec $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.
Par hypothèse :
$\forall i \in [\![1; n]\!]\ \lambda_i > 0$
et on peut supposer (quitte à permuter les colonnes de Q) que $\lambda_1 \leq \ldots \lambda_n$
Soit $x \in \mathbb{R}^n$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ la matrice colonne canoniquement associée.

$$\begin{array}{rcl} f_A(x) & = & X^TAX = X^T(QDQ^T)XT = (X^TQ)D(Q^TX) \\ & = & (Q^TX)^TD(Q^TX) \end{array}$$

On pose $Y = Q^TX = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{rcl} f_A(x) & = & Y^TDY = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 \\ & \geq & \lambda_1 \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \lambda_1 Y^TY = \lambda_1 X^TQQ^TX = \lambda_1 X^TX \\ & \geq & \lambda_1 \|x\|^2 \end{array}$$

On en déduit :
$\forall x \in \mathbb{R}^n\ g(x) \leq \|p\| \|x\| - \lambda_1 \|x\|^2 \xrightarrow[\|x\| \to +\infty]{} -\infty$ car $\lambda_1 > 0$
Donc :
$\exists R > 0$ tq $\|x\| \geq R \Longrightarrow g(x) \leq g(0) = 0$
La boule fermée de centre 0 et de rayon R est fermée et bornée donc :
$\exists x_0 \in \mathcal{B}(0, R)$ tq $\forall x \in \mathcal{B}(0, R)\ g(x) \leq g(x_0)$
En particulier, $g(0) \leq g(x_0)$.
Donc si $\|x\| \geq R$ alors $g(x) \leq g(0) \leq g(x_0)$
On a donc :

$\forall x \in \mathbb{R}^n \ g(x) \leq g(x_0)$
La fonction g a bien un maximum sur $\mathbb{R}^n$.
La fonction $L(f_A)$ est bien définie.
Par contre contrairement à la première méthode, on n'a pas à ce stade la valeur du maximum.
Comme c'est un maximum sur $\mathbb{R}^n$, il n'y a pas d'effet de bord et $\nabla g(x_0) = 0$.

$$\begin{array}{rcl} g(x_0+h) & = & (p|x_0+h) - (X_0+H)^T A(X_0+H) \\ & = & (p|x_0) + (p|h) - \left(X_0^T AX_0 + H^T AX_0 + X_0^T AH + H^T AH\right) \\ & = & g(x_0) + (p|h) - \left(H^T AX_0 + X_0^T A^T H\right) + o(H) \text{ car } A^T = A \\ & = & g(x_0) + (p|h) - \left(X_0^T A^T H + \left(X_0^T A^T H\right)^T\right) + o(H) \\ & = & g(x_0) + (p|h) - 2X_0^T A^T H + o(h) \text{ car } X_0^T A^T H \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}) \\ & = & g(x_0) + (p - 2Ax_0|h) + o(h) \end{array}$$

Donc $\nabla g(x_0) = p - 2Ax_0$ et $x_0 = \dfrac{1}{2}A^{-1}p$

2. On a montré à la question précédente que le maximum est atteint en $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $X = \dfrac{1}{2}A^{-1}P$, P étant la matrice colonne des coordonnées de p dans la base canonique

$$\begin{array}{rcl} L(f_A)(p) & = & \dfrac{1}{2}P^T A^{-1}P - \dfrac{1}{4}P^T(A^{-1})^T AA^{-1}P = \dfrac{1}{4}P^T A^{-1}P \\ & = & f_{1/4A^{-1}}(p) \end{array}$$

Donc $L(f_A) = f_B$ avec $B = \dfrac{1}{4}A^{-1}$

Exercice 27 *(Mines 2021)*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Montrer que AA^T et A^TA sont semblables.

Correction

- **Première méthode**
  On commence par montrer :
  Soient A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
  Les matrices AB et BA ont le même polynôme caractéristique.

  Démonstration
  Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
  — **Premier cas :** $A \in GL_n(\mathbb{K})$
  $BA = A^{-1}(AB)A = A^{-1}(AB)\left(A^{-1}\right)^{-1}$
  Les matrices AB et BA sont semblables donc ont le même polynôme caractéristique.
  — **Deuxième cas :** $A \notin GL_n(\mathbb{K})$
  Il existe une suite $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de matrices inversibles qui converge vers A.
  $\forall \lambda \in \mathbb{K} \ \forall p \in \mathbb{N} \ \det(\lambda I_n - A_pB) = \det(\lambda I_n - BA_p)$ cf le premier cas.
  On fixe λ et on fait tendre p vers $+\infty$.
  $\forall \lambda \in \mathbb{K} \ \det(\lambda I_n - AB) = \det(\lambda I_n - BA)$
  D'où le résultat car $\mathbb{K}$ est infini.

Néanmoins, l'examinatrice a demandé de montrer que toute matrice est la limite d'une suite de matrices inversibles :
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Si A est inversible, $(A)_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite de matrices inversibles qui converge vers A.
On suppose donc que A n'est pas inversible.
A n'a qu'un nombre fini de valeurs propres, dont 0.
Donc :
$\exists a > 0$ tq $\forall \lambda \in [-a; a] \setminus \{0\}$ $A - \lambda I_n \in GL_n(\mathbb{K})$
$\dfrac{1}{p} \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$ donc :
$\exists p_0 \in \mathbb{N}^*$ tq $\forall p \geq p_0$ $\dfrac{1}{p} \in [-a; a] \setminus \{0\}$
On a :
i $\forall p \geq p_0$ $A - \dfrac{1}{p} I_n \in GL_n(\mathbb{K})$

ii $A - \dfrac{1}{p} I_n \xrightarrow[p\to+\infty]{} A$
On peut passer à l'exercice :
D'après ce qui précède, AA^T et A^TA ont le même polynôme caractéristique.
Mais AA^T et A^TA sont symétriques réelles donc leur polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{R}$:
$\chi_{A^TA} = \chi_{AA^T} = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i)$
et AA^T et A^TA sont toues les deux semblables à $\text{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, elles sont donc semblables.

- **Deuxième méthode**
On va montrer que AA^T et A^TA ont les mêmes valeurs propres sans passer par le polynôme caractéristique.
Soit λ une valeur propre non nulle de AA^T.
$\forall X \in E_\lambda(AA^T)$ $(A^TA)(A^TX) = A^T(AA^TX) = A^T(\lambda X) = \lambda A^TX$
Donc : $A^T(E_\lambda(AA^T)) \subset \text{Ker}\,(A^TA - \lambda I_n)$.
De plus $\dim \Big(A^T(E_\lambda(AA^T))\Big) = \dim \Big(E_\lambda(AA^T)\Big) - \dim \Big(\text{Ker}\,(A^T) \cap (E_\lambda(AA^T)\Big)$
Mais si $X \in \text{Ker}\,(A^T) \cap (E_\lambda(AA^T)$, $\lambda X = AA^TX = A \times 0 = 0$ donc $\text{Ker}\,(A^T) \cap (E_\lambda(AA^T) = \{0\}$ et $\dim \Big(A^T(E_\lambda(AA^T))\Big) = \dim \Big(E_\lambda(AA^T)\Big)$.
On en déduit que λ est valeur propre de A^TA et que la dimension de $E_\lambda(A^TA)$ est supérieure ou égale à celle de $E_\lambda(AA^T)$.
Les deux matrices jouant des rôles symétriques, on a en fait prouvé qu'elles ont les mêmes valeurs propres non nulles avec des sous-espaces propres de même dimension.
Mais il s'agit de matrices symétriques réelles donc diagonalisables en BON et leurs noyaux sont les supplémentaires orthogonaux de la somme des sous-espaces propres associés aux valeurs propres non nulles. Ils sont donc de même dimension.
Les matrices AA^T et A^TA ont donc le même spectre, avec pour chaque valeur propre (commune) égalité des dimensions des sous-espaces propres. De plus les sommes de ces sous-espaces propres sont égales à $\mathbb{R}^n$.En prenant des BON adaptées à ces sommes, on montre que AA^T et A^TA sont semblables à la même matrice diagonale donc semblables entre elles.

2.1 Endomorphismes et matrices symétriques positifs

Exercice 28 *(X 2019, 2021)*

Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$ telle que : $\forall X \in \mathbb{R}^n\ X^T AX \geq 0$.
Montrer que $\max\limits_{1\leq i,j\leq n} (|a_{i,j}|) = \max\limits_{1\leq i\leq n} (a_{i,i})$.

Correction

- **Première méthode**
  On note $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
  Soit i et $j \in [\![1;n]\!]$.
  $(e_i + e_j)^T A(e_i + e_j) \geq 0$
  $e_i^T Ae_i + e_i^T Ae_j + e_j^T Ae_i + e_j^T Ae_j \geq 0$
  $a_{i,i} + a_{i,j} + a_{j,i} + a_{j,j} \geq 0$
  $-2a_{i,j} \leq a_{i,i} + a_{j,j}$
  En considérant $e_i - e_j$, on obtient : $2a_{i,j} \leq a_{i,i} + a_{j,j}$.
  Donc $2|a_{i,j}| \leq a_{i,i} + a_{j,j} \leq 2 \max\limits_{1\leq i\leq n} (a_{i,i})$
  Ce majorant étant atteint lorsque $j = i = i_0$ qui réalise le maximum de $a_{i,i}$.

- **Deuxième méthode**
  A est une matrice symétrique positive donc ses valeurs propres sont réelles positives.
  On invoque le théorème spectral.
  On note $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
  On note $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$ une BON de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de A.
  On note P la matrice de passage de $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$ à $(e_1, \dots, e_n)$ ie :
  $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]\ e_j = \sum\limits_{i=1}^{n} p_{i,j}\epsilon_i$.
  On note λ_i la valeur propre associé à ϵ_i.
  Soit $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$.

$$
\begin{array}{rcl}
|a_{i,j}| & = & |(e_i|Ae_j)| = \left| \left(\sum\limits_{k=1}^{n} p_{k,i}\epsilon_k | \sum\limits_{k=1}^{n} p_{k,j}A\epsilon_k \right) \right| \\
& = & \left| \left(\sum\limits_{k=1}^{n} p_{k,i}\epsilon_k | \sum\limits_{k=1}^{n} p_{k,j}\lambda_k\epsilon_k \right) \right| \\
& = & \left| \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k p_{k,i} p_{k,j} \right| = \left| \sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{\lambda_k} p_{k,i} \sqrt{\lambda_k} p_{k,j} \right| \\
& \leq & \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k p_{k,i}^2 \right)^{1/2} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k p_{kji}^2 \right)^{1/2} \\
& = & \sqrt{e_i^T Ae_i}\ \sqrt{e_j^T Ae_j} = \sqrt{a_{i,i}}\ \sqrt{a_{j,j}} \\
& \leq & \max\limits_{1\leq i\leq n} (a_{i,i})
\end{array}
$$

  Ce majorant étant atteint lorsque $j = i = i_0$ qui réalise le maximum de $a_{i,i}$.

- **Troisième méthode**
  On vérifie facilement que l'application $\Phi \begin{cases} \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ (X,Y) \mapsto X^T AY \end{cases}$ est un produit

scalaire.
Si on note $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a :

$$\begin{aligned}\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2 \ |a_{i,j}| &= \left|e_i^T A e_j\right| = |\Phi(e_i, e_j)| \\ &\leq \sqrt{\Phi(e_i,e_i)} \times \sqrt{\Phi(e_j,e_j)} \text{ par Cauchy-Schwarz} \\ &\leq \sqrt{a_{i,i}} \times \sqrt{a_{j,j}} \\ &\leq \max_{1 \leq i \leq n} (a_{i,i})\end{aligned}$$

Ce majorant étant atteint lorsque $j = i = i_0$ qui réalise le maximum de $a_{i,i}$.

Exercice 29 *(Centrale 2021)*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle.
Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle telle que $Sp(B) \subset \mathbb{R}_+^*$.

1. Soit $\Delta \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonale réelle dont tous les coefficients diagonaux sont strictement positifs.
   Soit $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible.
   Montrer que $P^T \Delta P$ est symétrique.
   Montrer que les valeurs propres de $P^T \Delta P$ sont toutes réelles strictement positives.
2. Montrer qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale telles que $B = PP^T$ et $A = PDP^T$.
3. Deux autres questions.
   La question suivante est une application classique de la question précédente :
   Montrer :
   $\forall (A,B) \in S_n^+(\mathbb{R})^2 \ \det(A+B) \geq \det(A) + \det(B)$

Correction

1. $\left(P^T \Delta P\right)^T = P^T \Delta^T \left(P^T\right)^T = P^T \Delta P$ donc $P^T \Delta P$ est symétrique.
   Soit $X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
   $X^T \left(P^T \Delta P\right) X = (PX)^T \Delta (PX)$
   On note $PX = Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ et $\Delta = \text{Diag}(\delta_1, \ldots, \delta_n)$.
   X est non nul et P est inversible donc Y est non nul.
   Il existe donc $i_0 \in [\![1;n]\!]$ tel que $y_{i_0} \neq 0$.
   $Y^T \Delta Y = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \delta_i y_i^2 = \left(\delta_{i_0} y_{i_0}^2 > 0\right) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}} \left(\delta_i \lambda_i^2 \geq 0\right) > 0$
   On a donc prouvé que $P^T \Delta P$ est symétrique définie positive.
   Ses valeurs propres sont donc toutes réelles strictement positives.
2. D'après le théorème spectral, il existe $Q \in O(n)$ et $\Delta = \text{Diag}(\delta_1, \ldots, \delta_n)$ telles que $B = Q \Delta Q^T$.
   Par hypothèse, les valeurs propres de B sont strictement positives donc les δ_i sont strictement positifs.
   Soit $R = \text{Diag}(\sqrt{\delta_1}, \ldots, \sqrt{\delta_n}) Q^T$.
   C'est une matrice inversible réelle.

$R^TR = Q\text{Diag}(\sqrt{\delta_1}, \dots, \sqrt{\delta_n})\text{Diag}(\sqrt{\delta_1}, \dots, \sqrt{\delta_n})Q^T = Q\Delta Q^T = B$.
Soit $R_1 = R^{-1}$.
$R_1^T AR_1$ est symétrique :
$\left(R_1^T AR_1\right)^T = R_1^T A^T \left(R_1^T\right)^T = R_1^T AR_1$ donc $R_1^T AR_1$ est symétrique (réelle).
Par conséquent, il existe $S \in O(n)$ telle que $R_1^T AR_1 = SDS^T$ avec D une matrice diagonale.
Or $\left(R_1^T\right)^{-1} = \left(R_1^{-1}\right)^T = R^T$ On en déduit $A = R^T SDS^T R = PDP^T$ avec $P = R^T S$ inversible réelle.
Par ailleurs, $B = R^T R = R^T I_n R = R^T SS^T R = PP^T$

3. On conserve les notations précédentes.
$\det(B) = (\det(P))^2$
$\det(A) = (\det(P))^2 \det(D)$
$A + B = P(I_n + D)P^T$ donc $\det(A + B) = (\det(P))^2 \det(I_n + D)$
On ajoute l'hypothèse : A est symétrique positive.
$\forall X \in \mathbb{R}^n\ X^T DX = X^T P^{-1} A \left(P^T\right)^{-1} X = \left(\left(P^T\right)^{-1} X\right)^T A \left(P^T\right)^{-1} X \geq 0$: D est elle aussi symétrique positive.
Par conséquent ses coefficients sont positifs.
On en déduit (en développant le produit ou en raisonnant par récurrence) :
$\prod_{i=1}^{n}(1 + d_{i,i}) \geq 1 + \prod_{i=1}^{n} d_{i,i}$
ie $\det(I_n + D) \geq \det(I_n) + \det(D)$
On multiplie ensuite par $(\det(P))^2$ et on obtient $\det(A + B) \geq \det(A) + \det(B)$ pour A symétrique positive et B symétrique définie positive.
Si B n'est que positive, on applique ce qui précède à $B + \frac{1}{p}I_n$ qui est définie positive et on fait tendre p vers $+\infty$.

Exercice 30 *(Centrale 2022)*

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de sa norme euclidienne usuelle : $\|M\| = \sqrt{\text{tr}(M^T M)}$.
On considère $M \in GL_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer qu'il existe $(S, \Omega) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \times O_n(\mathbb{R})$ tel que $M = \Omega S$
2. Calculer $d(M, O_n(\mathbb{R})) = \inf_{V \in O_n(\mathbb{R})} \|M - V\|$.
Indication : montrer que pour tout $V \in O_n(\mathbb{R})$, $\|MV\| = \|VM\| = \|M\|$

Correction

1. $M^T M$ est symétrique. De plus si $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ alors :
$X^T M^T MX = (MX)^T(MX) = \|MX\|^2 > 0$ car M est inversible donc MX est non nul.
Donc $M^T M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
D'après le théorème spectral, il existe $P \in O(n)$ et $D = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ avec les λ_i tous strictement positifs tels que $M^T M = PDP^T$.
$S = P\text{Diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})P^T \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $S^2 = M^T M$
Soit $\Omega = MS^{-1}$.
$\Omega^T\Omega = S^{-1}M^T MS^{-1} = S^{-1}S^2S^{-1} = I_n$ donc $\Omega \in O(n)$
Enfin $M = \Omega S$.

2. On commence par démontrer l'indication.
$\forall M_1 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\ \forall V \in O(n)\ \ \|M_1V\|^2 = \mathrm{tr}\,(V^TM_1^TM_1V) = \mathrm{tr}\,(M_1^TM_1VV^T) = \mathrm{tr}\,(M_1^TM_1) = \|M_1\|^2$
$\forall M_1 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\ \forall V \in O(n)\ \ \|VM_1\|^2 = \mathrm{tr}\,(M_1^TV^TVM_1) = \mathrm{tr}\,(M_1^TM_1) = \|M_1\|^2$

$$\begin{aligned}
\forall V \in O(n)\ \ \|M-V\|^2 &= \|\Omega S - V\|^2 = \left\|\Omega(S-\Omega^TV)\right\|^2 \\
&= \|S-W\|^2 \text{ avec } W = \Omega^TV \in O(n) \\
&= \mathrm{tr}\,\Big((S-W)^T(S-W)\Big) = \mathrm{tr}\,(S^2 - SW - W^TS + W^TW) \\
&= \mathrm{tr}\,(M^TM) - 2\mathrm{tr}\,(SW) + \mathrm{tr}\,(I_n) \\
&= \mathrm{tr}\,(M^TM) - 2\mathrm{tr}\,(P\mathrm{Diag}(\sqrt{\lambda_1},\dots,\sqrt{\lambda_n})P^TW) + n \\
&= \mathrm{tr}\,(M^TM) - 2\mathrm{tr}\,(\mathrm{Diag}(\sqrt{\lambda_1},\dots,\sqrt{\lambda_n})P^TWP) + n \\
&= \mathrm{tr}\,(M^TM) - 2\mathrm{tr}\,(\mathrm{Diag}(\sqrt{\lambda_1},\dots,\sqrt{\lambda_n})A) + n \text{ avec } A = P^TWP \in O(n) \\
&= \mathrm{tr}\,(M^TM) - 2\sum_{i=1}^n \sqrt{\lambda_i}a_{i,i} + n \\
&\geq tr(M^TM) - 2\sum_{i=1}^n \sqrt{\lambda_i} + n \text{ avec égalité si } A = I_n \\
&= \mathrm{tr}\,(S^2) - 2\mathrm{tr}\,(S) + \mathrm{tr}\,(I_n) = \mathrm{tr}\,((S-I_n)^2)
\end{aligned}$$