Mercredi 10 et jeudi 11 décembre 2025

941

Exercice 1 *(Mines Telecom 2024)*

Pour les réels t pour lesquels cela a un sens, on pose $f(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-nt}}{n^2+t^2}$.

1. Domaine de définition de f.
2. Continuité de f.
3. f est-elle intégrable sur $\mathbb{R}_+$?

Exercice 2 *(CCP 2024)*

Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ et $g : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$.

1. Soit $x > 0$ et $h_x : t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{t^x}$.
   Etudier les variations de h_x sur $[1;+\infty[$.
2. Donner le domaine de définition de f et de g.
3. Trouver une relation entre $f(x)$ et $g(x)$ en calculant $f(x) - g(x)$ pour $x \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$.
4. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur son domaine de définition.
5. Calculer $g(1)$.
6. Montrer que quand x tend vers 1, $f(x) = \dfrac{a}{x-1} + b + o(1)$ et déterminer a et b.

Exercice 3 *(CCP 2024)*

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n(1+nx^2)}$.

1. Montrer que S est définie sur $\mathbb{R}$.
2. (a) Etudier les variations de $f_n : x \mapsto \dfrac{x}{n(1+nx^2)}$.
   (b) En déduire que S est continue sur $\mathbb{R}$.
3. Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ avec $a < b$.
   Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a;b]$.
   Montrer que S est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ puis sur $\mathbb{R}_-^*$.
4. (a) Montrer que $x \mapsto \dfrac{S(x)}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (b) Montrer :
   $$\forall (N, x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+^* \ \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(1+nx^2)} \leq \frac{S(x)}{x}$$

(c) Montrer par l'absurde que $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{S(x)}{x} = +\infty$.
Que peut-on en conclure sur S ?

Exercice 4 *(CCP 2024)*

Soit $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
Pour $f \in E$, on définit la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} f_0 = f \\ \forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{R}\ f_{n+1}(x) = \displaystyle\int_0^x f_n(t)\,\mathrm{d}t \end{cases}$$

1. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$?
2. Montrer que f_1 est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et déterminer f_1'.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$

On admet :

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^*\ \exists k \in \mathbb{R} \text{ tq } \forall x \in [-a; a]\ \ |f_n(x)| \leq k\frac{|x|^n}{n!} \quad (*)$$

4. On pose $F = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$.
   Montrer que F est bien définie et qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
5. Montrer que $F' - F = f_0$.
6. Montrer :
   $\forall x \in \mathbb{R}\ F(x) = \mathrm{e}^x \displaystyle\int_0^x f_0(t)\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$
7. Montrer $(*)$.