Mercredi 10 et jeudi 11 décembre 2025

941

Exercice 1 *(Mines Telecom 2024)*

Pour les réels t pour lesquels cela a un sens, on pose $f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nt}}{n^2+t^2}$.

1. Domaine de définition de f.
2. Continuité de f.
3. f est-elle intégrable sur $\mathbb{R}_+$?

Correction

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \dfrac{e^{-nt}}{n^2+t^2} \end{cases}$.

   Soit $t \in \mathbb{R}$.
   $\forall n \in \mathbb{N}^*\ f_n(t) > 0$
   $\dfrac{f_{n+1}(t)}{f_n(t)} = \dfrac{n^2+t^2}{(n+1)^2+t^2} e^{-t} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-t}$
   D'après la règle de d'Alembert :
   Si $t > 0$ la série de terme général $f_n(t)$ converge.
   Si $t < 0$ la série de terme général $f_n(t)$ diverge.
   Enfin :
   $\forall n \in \mathbb{N}^*\ f_n(0) = \dfrac{1}{n^2}$
   donc la série de terme général $f_n(0)$ converge.
   Le domaine de définition de f est $\mathbb{R}_+$.
2. - Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue sur $\mathbb{R}_+$.
   - La série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.
     En effet :
     $\forall n \in \mathbb{N}^*\ \forall t \in \mathbb{R}_+\ |f_n(t)| = f_n(t) \leq \dfrac{1}{n^2}$ indépendant de t et terme général d'une série convergente
     Donc la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$.
     Donc la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

   Donc f est continue sur $\mathbb{R}_+$.
3. f est continue sur $\mathbb{R}_+$.
   $\forall t \in \mathbb{R}_+\ |f(t)| = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nt}}{n^2+t^2} \leq e^{-t} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$
   Donc f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 2 *(CCP 2024)*

Soit $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ et $g : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$.

1. Soit $x > 0$ et $h_x : t \mapsto \frac{\ln(t)}{t^x}$.
   Etudier les variations de h_x sur $[1; +\infty[$.
2. Donner le domaine de définition de f et de g.
3. Trouver une relation entre $f(x)$ et $g(x)$ en calculant $f(x) - g(x)$ pour $x \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$.
4. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur son domaine de définition.
5. Calculer $g(1)$.
6. Montrer que quand x tend vers 1, $f(x) = \frac{a}{x-1} + b + o(1)$ et déterminer a et b.

Correction

1. $\forall t > 0$ $h_x(t) = \ln(t) t^{-x}$
   $\forall t > 0$ $h_x'(t) = t^{-1-x} - x \ln(t) t^{-1-x} = -x t^{x-1} \left(\ln(t) - \frac{1}{x}\right)$
   $x > 0$ donc $t_x = \mathrm{e}^{1/x} > 1$.
   h_x est donc croissante sur $[1; t_x]$ de 0 à $\frac{1}{\mathrm{e}x}$ et décroissante sur $[t_x; +\infty[$ de $\frac{1}{\mathrm{e}x}$ à 0.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$.
   Si $x < 0$, $\frac{1}{n^x} = n^{-x} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$: les séries $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^x}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ divergent grossièrement.
   Si $x = 0$, $\frac{1}{n^x} = 1$ et $\frac{(-1)^{n-1}}{n^x} = (-1)^{n-1}$, les séries $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^x}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ divergent grossièrement.
   Si $x > 0$:
   - la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ est alternée.
   - $\frac{(-1)^{n-1}}{n^x} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$
   - la suite $\left(\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}\right|\right)_{n \in \mathbb{N}^*} = \left(\frac{1}{n^x}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.

   Donc la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ converge et $g(x)$ est bien défini.
   $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}_+^*$.
   La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^x}$ est décroissante sur $[1; +\infty[$ donc :
   si $x \in]0; 1[$:
   $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x} \geq \int_1^{N+1} t^{-x} \, \mathrm{d}t = \left[\frac{t^{1-x}}{1-x}\right]_1^{N+1} = \frac{(N+1)^{1-x} - 1}{1-x} \xrightarrow[N \to +\infty]{} +\infty$ car $1 - x > 0$
   Donc $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x} \xrightarrow[N \to +\infty]{} +\infty$ et la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^x}$ diverge.
   Si $x = 1$:
   $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \geq \int_1^{N+1} \frac{1}{\mathrm{d}t} = \ln(N+1) \xrightarrow[N \to +\infty]{} +\infty$

Donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}\xrightarrow[N\to+\infty]{}+\infty$ et la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ diverge.
Si $x>0$:
$$\forall n\in\mathbb{N}^*\ \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^x}\leq 1+\int_1^N t^{-x}\,\mathrm{d}t=1+\left[\frac{t^{1-x}}{1-x}\right]_1^N=1+\frac{1-N^{1-x}}{x-1}\leq 1+\frac{1}{x-1}=\frac{x}{x-1}$$
La suite des sommes partielles de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^x}$ est majorée. Comme c'est une série à termes positifs, elle converge.
$\mathcal{D}_f=]1;+\infty[$.

3.
$$\begin{aligned}\forall x>1\ f(x)-g(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1-(-1)^{n-1}}{n^x}\\ &= \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{2}{(2p)^x}=\frac{1}{2^{x-1}}f(x)\end{aligned}$$

4. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, soit $g_n\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}=(-1)^{n-1}\,\mathrm{e}^{-x\ln(n)}\end{cases}$.

- La série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1}g_n$ converge simplement sur $]0;+\infty[$.
- Pour tout $n\in\mathbb{N}$, g_n est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
  $\forall n\in\mathbb{N}^*\ \forall x>0\ g_n'(x)=(-1)^n\ln(n)\,\mathrm{e}^{-x\ln(n)}=(-1)^n\dfrac{\ln(n)}{n^x}$
- La série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1}g_n'$ converge uniformément sur tout segment de $]0;+\infty[$.
  On montre d'abord la convergence simple et on s'intéresse ensuite au reste.
  On fixe $x\in\mathbb{R}_+^*$.
  — $\sum g_n'(x)$ est alternée.
  — $g_n'(x)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$
  — $(|g_n'(x)|)=\left(\dfrac{\ln(n)}{n^x}\right)=(h_x(n))$ décroît APCR d'après l'étude des variations de h_x.
  Donc $\sum g_n'(x)$ converge.
  Donc $\sum g_n'$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ et on peut définir $R_p=\displaystyle\sum_{n=p+1}^{+\infty}g_n'(x)$.
  On montre ensuite que (R_p) CVU vers 0 sur tout segment de $]0;+\infty[$.
  Soit $[a,b]$ $(0<a<b)$ un tel segment.
  $\forall x\in[a;b]\ \mathrm{e}^{1/x}\leq\mathrm{e}^{1/a}$
  Si on pose $n_0=\lfloor\mathrm{e}^{1/a}\rfloor+1$ on a :
  $\forall x\in[a;b]\ \left(\dfrac{\ln(n)}{n^x}\right)_{n\geq n_0}$ décroît
  Donc :
  $\forall p\geq n_0\ \forall x\in[a;b]\ |R_p(x)|\leq|g_{p+1}(x)|=\dfrac{\ln(p+1)}{(p+1)^x}\leq\dfrac{\ln(p+1)}{(p+1)^a}$ indépendant de x et $\xrightarrow[p\to+\infty]{}0$.

Donc (R_p) CVU vers 0 sur tout segment de $]0;+\infty[$.

On a bien prouvé que $\sum g_n'$ CVU sur tout segment de $]0;+\infty[$.

Donc g est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\forall x > 0 \; g'(x) = \sum_{\substack{n=1 \\ \text{ou } 2}}^{+\infty} \frac{(-1)^n \ln(n)}{n^x}$$

5. $g(1) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2)$.
   Faut-il le redémontrer ? Les détails sont dans le cours sur le développement en série entière de la fonction $t \mapsto \ln(1+t)$.
6.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{g(x)}{1-2^{1-x}} = \frac{g(1)+g'(1)(x-1)+o(x-1)}{1-\,\mathrm{e}^{(1-x)\ln(2)}} \\
&= \frac{\ln(2)+g'(1)(x-1)+o(x-1)}{1-1+(x-1)\ln(2)-\dfrac{\ln(2)^2}{2}(x-1)^2+o\left((x-1)^2\right)} \\
&= \frac{1}{x-1}\frac{\ln(2)+g'(1)(x-1)+o(x-1)}{\ln(2)-\dfrac{\ln(2)^2}{2}(x-1)+o(x-1)} \\
&= \frac{1}{x-1}\frac{1+\dfrac{g'(1)}{\ln(2)}(x-1)+o(x-1)}{1-\dfrac{\ln(2)}{2}(x-1)+o(x-1)} \\
&= \frac{1}{x-1}\left(1+\left(\frac{g'(1)}{\ln(2)}+\frac{\ln(2)}{2}\right)(x-1)+o(x-1)\right)
\end{aligned}$$

D'où le résultat avec $a=1$ et $b = \dfrac{g'(1)}{\ln(2)} + \dfrac{\ln(2)}{2}$

$g'(1) = \gamma\ln(2) - \dfrac{1}{2}\ln(2)^2$ mais cela ne peut pas être trouvé simplement.

Cela donne alors $b=\gamma$

Exercice 3 *(CCP 2024)*

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n(1+nx^2)}$.

1. Montrer que S est définie sur $\mathbb{R}$.
2. (a) Etudier les variations de $f_n : x \mapsto \dfrac{x}{n(1+nx^2)}$.

   (b) En déduire que S est continue sur $\mathbb{R}$.
3. Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ avec $a < b$.
   Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a;b]$.
   Montrer que S est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ puis sur $\mathbb{R}_-^*$.
4. (a) Montrer que $x \mapsto \dfrac{S(x)}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

(b) Montrer :

$$\forall (N,x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+^* \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(1+nx^2)} \leq \frac{S(x)}{x}$$

(c) Montrer par l'absurde que $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{S(x)}{x} = +\infty$.

Que peut-on en conclure sur S ?

Correction

1. Soit $x \in \mathbb{R}$.
   $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $n(1+nx^2) > 0$: les termes de la somme sont tous définis.
   Si $x > 0$, $\dfrac{x}{n(1+nx^2)} \sim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{xn^2}$, tout est positif et la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{xn^2}$ converge donc la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{x}{n(1+nx^2)}$ converge.
   Si x est nul, tous les termes de la somme sont nuls donc $S(0)$ eet bien défini et $S(0) = 0$.
   Enfin, le cas $x < 0$ se traite par parité.
   Finalement S est une fonction impaire définie sur $\mathbb{R}$.
2. (a) f_n est impaire.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \ f_n'(x) \quad = \quad \frac{1}{n}\frac{1+nx^2 - x\,2nx}{(1+nx^2)^2} = \frac{1-nx^2}{n(1+nx^2)^2}$$

   f_n est croissante sur $\left[0; \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$ de 0 à $\dfrac{1}{n^{3/2}}$ puis décroissante sur $\left[\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right[$ de $\dfrac{1}{n^{3/2}}$ à 0.

   (b)
   - Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue sur $\mathbb{R}$.
   - La série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.
     En effet :
     $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\displaystyle\sup_{x\in\mathbb{R}} (|f_n(x)|) = \frac{1}{n^{3/2}}$ terme général d'une série convergente.
     Donc la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.
     Donc la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

   On en déduit que S est continue sur $\mathbb{R}$.
3.
   - Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est $\mathcal{C}^1$ sur $[a;b]$ avec :
     $\forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times [a;b]$ $f_n'(x) = \dfrac{1-nx^2}{n(1+nx^2)^2}$
   - La série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n$ converge simplement sur $[a;b]$.
   - La série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n'$ converge uniformément sur $[a;b]$.
     En effet :
     $\forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times [a;b]$ $|f_n'(x)| \leq \dfrac{1+nx^2}{n(1+nx^2)^2} \leq \dfrac{1+nb^2}{n(1+na^2)^2}$ indépendant de x et terme général d'une série convergente :
     $\dfrac{1+nb^2}{n(1+na^2)^2} \sim \dfrac{b^2}{n^2a^2}$

Donc la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n'$ converge normalement sur $[a;b]$.

Donc la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n'$ converge uniformément sur $[a;b]$.

Donc S est $\mathcal{C}^1$ sur $[a;b]$

Soit $x_0 > 0$.
S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[\frac{x_0}{2}; 2x_0\right]$ donc S est dérivable en x_0.
S est donc dérivable sur $\mathbb{R}$.
Soit $x_1 \in \mathbb{R}_+^*$.
S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[\frac{x_1}{2}; 2x_1\right]$ donc S' est continue sur $\left[\frac{x_1}{2}; 2x_1\right]$ donc S' est continue en x_1.
S' est donc continue sur $\mathbb{R}$.

S étant impaire, S est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_-^*$.

4. (a) $\forall x \in \mathbb{R}^*\ \frac{S(x)}{x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(1+nx^2)}$.
   Soient x et $y \in \mathbb{R}_+^*$ avec $x < y$.
   $\forall n \in \mathbb{N}^*\ \frac{1}{n(1+nx^2)} \geq \frac{1}{n(1+ny^2)}$
   D'où en sommant $S(x) \geq S(y)$.

   (b) $\forall (N,x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+^*\ \frac{S(x)}{x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(1+nx^2)} \geq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(1+nx^2)}$
   car les termes de la somme sont tous positifs.

   (c) La fonction $x \mapsto \frac{S(x)}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc $\frac{S(x)}{x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
   Supposons $l \in \mathbb{R}$.
   On reprend l'inégalité de la question précédente, on fixe N et on fait tendre x vers 0 :
   $\forall N \in \mathbb{N}^*\ \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \leq l \in \mathbb{R}$
   La suite des sommes partiellles de la série harmonique est majorée.
   Comme c'est une série à termes positifs, elle converge : c'est absurde.
   Donc $l = +\infty$.
   $\frac{S(x)-S(0)}{x-0} = \frac{S(x)}{x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$ donc S n'est pas dérivable en 0.

Exercice 4 *(CCP 2024)*

Soit $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
Pour $f \in E$, on définit la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} f_0 = f \\ \forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{R}\ f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t)\,\mathrm{d}t \end{cases}$$

1. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$?
2. Montrer que f_1 est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et déterminer f_1'.

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$

On admet :

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^* \ \exists k \in \mathbb{R} \text{ tq } \forall x \in [-a; a] \ \ |f_n(x)| \leq k \frac{|x|^n}{n!} \quad (*)$$

4. On pose $F = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$.
   Montrer que F est bien définie et qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
5. Montrer que $F' - F = f_0$.
6. Montrer :
   $\forall x \in \mathbb{R} \ F(x) = \mathrm{e}^x \int_0^x f_0(t) \mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t$
7. Montrer $(*)$.

Correction

1. $+\infty$: c'est du cours.
2. D'après le théorème fondamental de l'analyse ($f_0 = f$ étant continue sur $\mathbb{R}$), f_1 est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $f_1' = f_0$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n)$: f_n est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$.
   $\mathcal{P}(0)$ est vraie : $f_0 = f \in E$
   On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie.
   D'après le théorème fondamental du calcul différentiel-intégral, f_{n+1} est dérivable de dérivée f_n qui est de classe $\mathcal{C}^n$. Donc f_{n+1} est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ et $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
4. - Pour tout $n \geq 1$, f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
   - La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$:
     Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.
     $\forall n \geq 1 \ \ |f_n(x_0)| \leq k \frac{|x_0|^n}{n!}$ terme général d'une série convergente.
     Donc la série de terme général $f_n(x_0)$ converge.
   - La série de fonctions $\sum f_n'$ converge normalement donc uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}$:
     Soit $[b; c]$ un segment de $\mathbb{R}$ et $a = \max(|b|, |c|)$.
     $\forall n \in \mathbb{N}^* \ \forall x \in [b, c] \ \ |f_n'(x)| \leq k \frac{|x|^{n-1}}{(n-1)!} \leq k \frac{a^{n-1}}{(n-1)!}$ indépendant de x et terme général d'une série convergente (l'existence de k étant assurée par $(*)$).

   On en déduit que F est bien définie et qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
5. Le théorème de dérivation terme à terme utilisé dans la question précédente donne aussi :
   $F' = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n' = \sum_{n=1}^{+\infty} f_{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = f_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} f_n = f_0 + F$
6. F est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' - y = f_0(x)$.
   ESSM : $y' = y$
   Solution générale de l'ESSM : $y(x) = C \mathrm{e}^x$
   On cherche une solution particulière sous la forme $y(x) = C(x) \mathrm{e}^x$
   On trouve $C'(x) \mathrm{e}^x = f_0(x)$
   La solution générale est donc $y(x) = C \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x \int_0^x f_0(t) \mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t$
   En particulier :

$\exists C \in \mathbb{R}$ tq $\forall x \in \mathbb{R}$ $F(x) = C\,\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x \displaystyle\int_0^x f_0(t)\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$

Mais $F(0) = 0$ car la somme démarre à $n = 1$ donc $C = 0$.

7. f_0 est une fonction continue sur le *segment* $[-a;a]$ donc $k = \displaystyle\sup_{x\in[-a;a]} |f_0(x)| \in \mathbb{R}$.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n)$: $\forall x \in [-a;a]$ $|f_n(x)| \leq k\dfrac{|x|^n}{n!}$

   $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

   On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie.

$$\begin{aligned}
\forall x \in [0;a]\ \ |f_{n+1}(x)| &= \left|\int_0^x f_n(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_0^x |f_n(t)|\ \mathrm{d}t \\
&\leq \int_0^x k\frac{t^n}{n!}\,\mathrm{d}t = k\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \\
&= k\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\forall x \in [-a;0]\ \ |f_{n+1}(x)| &= \left|\int_0^x f_n(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_x^0 |f_n(t)|\ \mathrm{d}t \\
&\leq \int_x^0 k\frac{(-t)^n}{n!}\,\mathrm{d}t = k(-1)^n\frac{-x^{n+1}}{(n+1)!} = k\frac{(-x)^{n+1}}{(n+1)!} \\
&= k\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}
\end{aligned}$$