# jeudi 8 janvier 2026

941

**Exercice 1** *(Mines 2024)*

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Montrer :
$M \in A_n(\mathbb{R}) \Longleftrightarrow \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\ X^T M X = 0$

**Correction**
On suppose $M \in A_n(\mathbb{R})$.
Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
$X^T M X \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ donc $X^T M X$ est symétrique.
$X^T M X = \left(X^T M X\right)^T = X^T M^T X = X^T(-M)X = -X^T M X$ donc $X^T M X = 0$

Réciproquement, on suppose :
$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\ X^T M X = 0$

$$\begin{array}{rcl} \forall (X,Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2\ 0 & = & (X+Y)^T M(X+Y) \\ & = & X^T M X + X^T M Y + Y^T M X + Y^T M Y \\ & = & (X \mid MY) + (Y \mid MX) \end{array}$$

On prend alors pour $X$ le $i$-ème vecteur de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et pour $Y$ le $j$-ème.
$0 = m_{i,j} + m_{j,i}$
$M$ est bien antisymétrique.

**Exercice 2** *(Ens 2024)*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soit $(f_1, \ldots, f_k)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}, \exists i \in \{1, \ldots, k\},\ < x, f_i > > 0$.

1. Donner un exemple de famille de $\mathbb{R}^n$ vérifiant cette propriété.
2. Montrer que $(f_1, \ldots, f_k)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^n$.

**Correction**

1. On considère la famille $(e_1, -e_1, \ldots, e_n, -e_n)$ où $(e_1, \ldots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
   Soit $x$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$.
   $x$ est non nul donc une de ses coordonnées est différente de 0 :
   $\exists i \in \mathbb{N}_n$ tq $\langle x, e_i \rangle \neq 0$
   Donc $\langle x, e_i \rangle$ ou $\langle x, -e_i \rangle$ est strictement positif.
2. Soit $x$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$ orthogonal à tous les $f_i$, c'est-à-dire $\langle x, f_i \rangle = 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$.
   $x$ ne peut donc pas être non nul ie $x = 0$.
   Donc $\mathrm{Vect}(f_1, \ldots, f_k)^\perp = \{0\}$ et $\mathrm{Vect}(f_1, \ldots, f_k) = \{0\}^\perp = \mathbb{R}^n$.
   $(f_1, \ldots, f_k)$ est donc une famille génératrice de $\mathbb{R}^n$.

**Exercice 3** *(Ens 2025)*

Soient $(A, B, C) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ symétriques.
Pour $X$ et $Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on note $[X, Y] = XY - YX$ le commutateur de $X$ et de $Y$.

1. Montrer que $[[A, B]^2, C] = 0$.
2. Même question si on ne suppose pas que les matrices sont symétriques.

**Correction**

1. $[A, B]^T = (AB - BA)^T = B^T A^T - A^T B^T = BA - AB = -[A, B]$ : $[A, B]$ est antisymétrique.
   Mais $[A, B] \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ donc $[A, B] = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{R}$.
   On a alors $[A, B]^2 = \begin{pmatrix} -a^2 & 0 \\ 0 & -a^2 \end{pmatrix} = -a^2 I_2$ donc $[A, B]^2$ commute avec $C$.
   D'où $[[A, B]^2, C] = 0$.
2. $\chi_{[A,B]} = X^2 - \operatorname{tr}([A, B])X + \det([A, B])$
   $\operatorname{tr}([A, B]) = \operatorname{tr}(AB - BA) = \operatorname{tr}(AB) - \operatorname{tr}(BA) = 0$ donc $\chi_{[A,B]} = X^2 + \det([A, B])$
   Avec Cayley-Hamilton, $[A, B]^2 = -\det([A, B]) I_2$ donc $[A, B]^2$ commute avec $C$.
   D'où $[[A, B]^2, C] = 0$.