PROBABILITES
TD
2025-2026
Chapitre 1

941

1 Modèle de Kolmogorov

Exercice 1 *(Mines 2021)*

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.
Soit $A_1, \ldots, A_n$ des événements.
Soit $\Gamma_n = \{A_1, \overline{A_1}\} \times \cdots \times \{A_n, \overline{A_n}\}$.
Calculer $\displaystyle\sum_{(B_1,\ldots,B_n)\in\Gamma_n} P\left(B_1 \cap \cdots \cap B_n\right)$.

Exercice 2 *(Mines 2024)*

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.
Soit $A_1, \ldots, A_n$ des événements.
Soit $\Gamma_n = \{A_1, \overline{A_1}\} \times \cdots \times \{A_n, \overline{A_n}\}$.
Calculer $\displaystyle\sum_{(B_1,\ldots,B_n)\in\Gamma_n} P\left(B_1 \cup \cdots \cup B_n\right)$.

Exercice 3

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.
Démontrer l'inégalité de Bonferroni :

$$\forall (A_1, \ldots, A_n) \in \mathcal{A}^n \; P\left(\bigcup_{r=1}^{n} A_r\right) \geq \sum_{r=1}^{n} P(A_r) - \sum_{1\leq r<k\leq n} P(A_r \cap A_k)$$

Exercice 4 *(Lemmes de Borel-Cantelli)*

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.
Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'évènements.
On note $B = \{\omega \in \Omega \text{ tq } \omega \in A_n \text{ pour une infinité de } n\}$.

1. Montrer : $B = \displaystyle\bigcap_{n=1}^{+\infty} \left(\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k\right)$

2. **Premier lemme de Borel-Cantelli**
   On suppose que la série de terme général $P(A_n)$ converge.
   Montrer que $P(B) = 0$.
3. **Second lemme de Borel-Cantelli**
   On suppose que les A_n sont mutuellement indépendants et que la série de terme général $P(A_n)$ diverge.
   Montrer que $P(B) = 1$.
   Indication :
   On pourra utiliser, après l'avoir démontrée, l'inégalité :
   $\forall x \in \mathbb{R}\ 1 - x \leq \mathrm{e}^{-x}$

Exercice 5 *(X 2017)*

On range n boules distinctes dans n boîtes.
Probabilité qu'une seule boîte soit vide et équivalent quand $n \to \infty$?

Exercice 6 *(Mines-Telecom 2023)*

On dispose de deux urnes : l'urne numéro 1 qui contient 3 boules blanches et 5 boules noires et l'urne numéro 2 qui contient 2 boules blanches et 3 boules noires.
On tire la première boule dans une des urnes, tirées au sort avec équiprobabilité des deux urnes.
On note la couleur de la boule et on la remet dans l'urne dont elle provient.
Si la boule est blanche, le prochain tirage se fera dans l'urne numéro 1. Si elle est noire, dans l'urne 2.
On note p_n la probabilité de tirer une boule blanche au n-ième tirage.

1. Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n.
2. Déterminer p_n.

Exercice 7

On jette de manière répétée une pièce de monnaie.
A chaque fois la probabilité d'obtenir face est $p \in]0; 1[$.
Déterminer p_n, la probabilité d'obtenir face un nombre pair de fois au cours de n lancers.

Exercice 8 *(Mines 2018)*

On considère un panier de r pommes rouges et v pommes vertes. On pioche et on mange une à une les pommes au hasard. On s'arrête quand il n'y a plus que des rouges. Quelle est la probabilité que l'on ait mangé toutes les pommes ?
Remarque
L'énoncé est ambigü :
S'il ne reste que des pommes rouges, c'est qu'il en reste et on ne peut donc pas les avoir toutes mangées.
Je pense donc qu'il s'agit de calculer la probabilité de manger toutes les pommes rouges avant d'avoir fini les vertes.
Par exemple on ne peut pas terminer avec une seule pomme rouge : après avoir mangé $r + v - 1$ pommes, on constate qu'il ne reste qu'une rouge et on s'arrête avant d'avoir mangé toutes les pommes.

Exercice 9

Loïc joue une suite de parties de poker avec deux autres joueurs de cartes.
A chaque partie, il gagne avec la probabilité 1/3. Les parties sont supposées indépendantes les unes des autres.
Soit k un entier strictement positif fixé. Loïc décide d'arrêter de jouer dès qu'il gagne k parties de suite. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note p_n la probabilité pour que Loïc joue exactement n parties.

1. Calculer p_k.
2. Montrer, en considérant le rang de la première partie perdue par Loïc, que :

$$\forall n \geq k \; p_{n+1} = \frac{2}{3} \sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{1}{3}\right)^i p_{n-i}$$

3. Pour $k = 2$, calculer p_n ($n \in \mathbb{N}^*$).

Exercice 10

Trois joueurs A, B et C jouent de la façon suivante :
A et B jouent la première partie. Le perdant est remplacé par C pour la deuxième partie. Le perdant de cette deuxième partie est remplacé par le perdant de la première partie. Le jeu se poursuit ainsi jusqu'à ce qu'un joueur gagne deux fois de suite ; ce joueur est déclaré vainqueur.
On suppose qu'à chaque partie, la probabilité de gain de chacun des joueurs est 1/2.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Quelle est la probabilité que A soit déclaré vainqueur :
   (a) à l'issue de la $(3n)^{\text{ième}}$ partie ?
   (b) à l'issue de la $(3n+1)^{\text{ième}}$ partie ?
   (c) à l'issue de la $(3n+2)^{\text{ième}}$ partie ?
2. Quelle est la probabilité que A soit déclaré vainqueur ?
3. Quelle est la probabilité que C soit déclaré vainqueur ?

Exercice 11 *(Mines 2023)*

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et a un diviseur de n.
On note $D(a) = \{k \in [\![1; n]\!] \text{ tq } a|k\}$.
On se place dans l'espace probabilisé $([\![1; n]\!], \mathcal{P}([\![1; n]\!]), P)$ où P est la probabilité uniforme.

1. Calculer $P(D(a))$.
2. Soient $p_1, \ldots, p_l$ les diviseurs premiers de n.
   Montrer que les $D(p_i)$ sont mutuellement indépendants.
3. Soit $B = \{k \in [\![1; n]\!] \text{ tq } k \text{ et } n \text{ sont premiers entre eux}\}$.
   Calculer $P(B)$.