PROBABILITES
TD
2025-2026
Chapitre 1

941

1 Modèle de Kolmogorov

Exercice 1 *(Mines 2021)*

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.
Soit $A_1, \ldots, A_n$ des événements.
Soit $\Gamma_n = \{A_1, \overline{A_1}\} \times \cdots \times \{A_n, \overline{A_n}\}$.
Calculer $\displaystyle\sum_{(B_1,\ldots,B_n)\in\Gamma_n} P(B_1 \cap \cdots \cap B_n)$.

Correction
Explicitons l'énoncé.
Γ_n est l'ensemble des n-uplets $(B_1, \ldots, B_n)$ où B_i est l'événement A_i ou son évènement contraire.
On cherche la somme des probabilités des intersections $B_1 \cap \cdots \cap B_n$ lorsque le n-uplet $(B_1, \ldots, B_n)$ décrit Γ_n.
Soit $\omega \in \Omega$.
Pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, ω appartient à A_i ou $\overline{A_i}$. Notons B_i l'évènement auquel appartient ω.
On a $(B_1, \ldots, B_n) \in \Gamma_n$ et $\omega \in B_1 \cap \cdots \cap B_n$.
On a donc : $\Omega = \displaystyle\bigcup_{(B_1,\ldots,B_n)\in\Gamma_n} (B_1 \cap \cdots \cap B_n)$ (l'inclusion de droite à gauche est triviale)
Mais ces intersections sont deux à deux disjointes :
Soit $(B_1, \ldots, B_n)$ et $(C_1, \ldots, C_n)$ deux éléments distincts de Γ_n .
Il existe $i \in [\![1; n]\!]$ tel que $B_i \neq C_i$.
Mais alors B_i et C_i sont complémentaires et $B_i \cap C_i = \emptyset$.
On en déduit que $(B_1 \cap \cdots \cap B_n) \cap (C_1 \cap \cdots \cap C_n) = \emptyset$.
Finalement, la somme cherchée est $P(\Omega) = 1$.

Exercice 2 *(Mines 2024)*

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.
Soit $A_1, \ldots, A_n$ des événements.
Soit $\Gamma_n = \{A_1, \overline{A_1}\} \times \cdots \times \{A_n, \overline{A_n}\}$.
Calculer $\displaystyle\sum_{(B_1,\ldots,B_n)\in\Gamma_n} P(B_1 \cup \cdots \cup B_n)$.

Correction
La première difficulté de l'exercice consiste à comprendre l'énoncé ie la notation $\displaystyle\sum_{(B_1,\ldots,B_n)\in\Gamma_n} P(B_1 \cup \cdots \cup B_n)$.

Dans le cas $n = 1$, $\Gamma_1 = \{A_1; \overline{A_1}\}$ et la somme cherchée est $P(A_1) + P(\overline{A_1}) = 1$.
Dans le cas $n = 2$:
$\Gamma_2 = \{A_1; \overline{A_1}\} \times \{A_2; \overline{A_2}\} = \Big\{(A_1, A_2), (A_1, \overline{A_2}), (\overline{A_1}, A_2), (\overline{A_1}, \overline{A_2})\Big\}$.
La somme cherchée est $P(A_1 \cup A_2) + P(A_1 \cup \overline{A_2}) + P(\overline{A_1} \cup A_2) + P(\overline{A_1} \cup \overline{A_2})$

$$\begin{aligned}
P(A \cup B) + P(A \cup \overline{B}) &= P\Big((A \cup B) \cup (A \cup \overline{B})\Big) + P\Big((A \cup B) \cap (A \cup \overline{B})\Big) \\
&= P(A \cup B \cup \overline{B}) + P\Big(\Big(A \cap (A \cup \overline{B})\Big) \cup \Big(B \cap (A \cup \overline{B})\Big)\Big) \\
&= P(\Omega) + P\Big(A \cup \Big((B \cap A) \cup (B \cap \overline{B})\Big)\Big) \\
&= 1 + P\left(A \cup ((B \cap A) \cup \emptyset)\right) = 1 + P\left(A \cup (B \cap A)\right) \\
&= 1 + P(A)
\end{aligned}$$

Donc pour $n = 2$, la somme cherchée est :
$1 + P(A_1) + 1 + P(\overline{A_1}) = 3$
Dans le cas général :

$$\begin{aligned}
& \sum_{(B_1,\ldots,B_n)\in\Gamma_n} P\left(B_1 \cup \cdots \cup B_n\right) \\
= & \sum_{(B_1,\ldots,B_{n-1})\in\Gamma_{n-1}} \Big(P\left(B_1 \cup \cdots \cup B_{n-1} \cup A_n\right) + P\Big(B_1 \cup \cdots \cup B_{n-1} \cup \overline{A_n}\Big)\Big) \\
= & \sum_{(B_1,\ldots,B_{n-1})\in\Gamma_{n-1}} \left(1 + P\left(B_1 \cup \cdots \cup B_{n-1}\right)\right) \\
= & \ 2^{n-1} + \sum_{(B_1,\ldots,B_{n-1})\in\Gamma_{n-1}} P\left(B_1 \cup \cdots \cup B_{n-1}\right)
\end{aligned}$$

On doit donc déterminer u_n avec $u_1 = 1$ et :
$\forall n \geq 2 \ u_n = u_{n-1} + 2^{n-1}$
Une récurrence triviale donne :
$\forall n \in \mathbb{N}^* \ u_n = 2^n - 1$

Remarque

$$\begin{aligned}
& \sum_{(B_1,\ldots,B_n)\in\Gamma_n} P\left(B_1 \cup \cdots \cup B_n\right) + \sum_{(B_1,\ldots,B_n)\in\Gamma_n} P\left(B_1 \cap \cdots \cap B_n\right) \\
= & \sum_{(B_1,\ldots,B_n)\in\Gamma_n} P\left(B_1 \cup \cdots \cup B_n\right) + \sum_{(C_1,\ldots,C_n)\in\Gamma_n} P\Big(\overline{C_1} \cap \cdots \cap \overline{C_n}\Big) \\
= & \sum_{(B_1,\ldots,B_n)\in\Gamma_n} \Big(P\left(B_1 \cup \cdots \cup B_n\right) + P\Big(\overline{B_1} \cap \cdots \cap \overline{B_n}\Big)\Big) \\
= & \sum_{(B_1,\ldots,B_n)\in\Gamma_n} \Big(P\left(B_1 \cup \cdots \cup B_n\right) + P\Big(\overline{B_1 \cup \cdots \cup B_n}\Big)\Big) \\
= & \sum_{(B_1,\ldots,B_n)\in\Gamma_n} 1 = 2^n
\end{aligned}$$

Exercice 3

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.
Démontrer l'inégalité de Bonferroni :

$$\forall (A_1, \ldots, A_n) \in \mathcal{A}^n \ P\left(\bigcup_{r=1}^{n} A_r\right) \geq \sum_{r=1}^{n} P(A_r) - \sum_{1\leq r<k\leq n} P(A_r \cap A_k)$$

Correction

On raisonne par récurrence sur n.

- $n=1$: à gauche, on a $P(A_1)$ et à droite $P(A_1)-0$ donc la propriété est vraie au rang 1.
- $n=2$: $P(A_1\cup A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1\cap A_2)$: la prorpiété est vraie au rang 2 et il y a même égalité.
- On suppose la propriété vraie au rang n.

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{r=1}^{n+1} A_r\right) &= P\left(\bigcup_{r=1}^{n} A_r\right)+P(A_{n+1})-P\left(A_{n+1}\cap\left(\bigcup_{r=1}^{n} A_r\right)\right)\\ &\geq \sum_{r=1}^{n} P(A_r)-\sum_{1\leq r<k\leq n} P(A_r\cap A_k)+P(A_{n+1})-P\left(\bigcup_{r=1}^{n}(A_{n+1}\cap A_r)\right)\end{aligned}$$

Or, par la sous-additivité :

$P\left(\bigcup_{r=1}^{n}(A_{n+1}\cap A_r)\right)\leq\sum_{r=1}^{n} P(A_{n+1}\cap A_r)$

Donc $P\left(\bigcup_{r=1}^{n+1} A_r\right)\geq\sum_{r=1}^{n+1} P(A_r)-\sum_{1\leq r<k\leq n+1} P(A_r\cap A_k)$

Remarque

L'exercice peut également se traiter avec la linéarité et la croissance de l'espérance.

Soit $(A_1,\dots,A_n)\in\mathcal{A}^n$.

$P\left(\bigcup_{r=1}^{n} A_r\right)=E\left(1_{\bigcup\limits_{r=1}^{n} A_r}\right)$

$\sum_{r=1}^{n} P(A_r)-\sum_{1\leq r<k\leq n} P(A_r\cap A_k)=\sum_{r=1}^{n} E\left(1_{A_r}\right)-\sum_{1\leq r<k\leq n} E\left(1_{A_r\cap A_k}\right)$

Il suffit donc de montrer : $1_{\bigcup\limits_{r=1}^{n} A_r}\geq\sum_{r=1}^{n} 1_{A_r}-\sum_{1\leq r<k\leq n} 1_{A_r\cap A_k}$.

Si aucun des évènements A_i n'est réalisé l'inégalité est vraie : $0\geq 0$.

Si $p\geq 1$ évènements A_i sont réalisés :

$1_{\bigcup\limits_{r=1}^{n} A_r}=1$

$\sum_{r=1}^{n+1} 1_{A_r}-\sum_{1\leq r<k\leq n+1} 1_{A_r\cap A_k}=p-\binom{p}{2}=\dfrac{p(3-p)}{2}$

De plus $1-\dfrac{p(3-p)}{2}=\dfrac{2-3p+p^2}{2}=\dfrac{(2-p)(3-p)}{2}\geq 0$.

Exercice 4 *(Lemmes de Borel-Cantelli)*

Soit $(\Omega,\mathcal{A},P)$ un espace probabilisé.

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'évènements.

On note $B=\{\omega\in\Omega \text{ tq } \omega\in A_n \text{ pour une infinité de } n\}$.

1. Montrer : $B=\bigcap_{n=1}^{+\infty}\left(\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k\right)$
2. **Premier lemme de Borel-Cantelli**
   On suppose que la série de terme général $P(A_n)$ converge.
   Montrer que $P(B)=0$.

3. **Second lemme de Borel-Cantelli**
   On suppose que les A_n sont mutuellement indépendants et que la série de terme général $P(A_n)$ diverge.
   Montrer que $P(B) = 1$.
   Indication :
   On pourra utiliser, après l'avoir démontrée, l'inégalité :
   $\forall x \in \mathbb{R}\ 1 - x \leq \mathrm{e}^{-x}$

Correction

1. $\omega \in \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k \iff \exists k \geq n \text{ tq } \omega \in A_k$

$$\begin{aligned} \omega \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left(\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k \right) &\iff \forall n \in \mathbb{N}\ \exists k \geq n \text{ tq } \omega \in A_k \\ &\iff \{k \in \mathbb{N} \text{ tq } \omega \in A_k\} \text{ n'est pas majoré} \\ &\iff \{k \in \mathbb{N} \text{ tq } \omega \in A_k\} \text{ est infini} \\ &\iff \omega \in B \end{aligned}$$

2. On note $C_n = \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k$.
   $\forall n \in \mathbb{N}\ C_{n+1} \subset C_n : C_n = C_{n+1} \cup A_n$
   Par continuité décroissante :
   $P(B) = P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} C_n\right) = \lim_{n \to +\infty} P(C_n)$
   Par sous-additivité :
   $0 \leq P(C_n) \leq \sum_{k=n}^{+\infty} P(A_k) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$: reste d'une série convergente
   Donc $P(C_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$
   Donc $P(B) = 0$.
3. $\overline{B} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left(\bigcap_{k=n}^{+\infty} \overline{A_k} \right)$
   Par sous-additivité :
   $P(\overline{B}) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} P\left(\bigcap_{k=n}^{+\infty} \overline{A_k} \right)$
   Il suffit donc de prouver :
   $\forall n \in \mathbb{N}^*\ P\left(\bigcap_{k=n}^{+\infty} \overline{A_k} \right) = 0$
   Fixons donc $n \in \mathbb{N}^*$.

$$P\left(\bigcap_{k=n}^{+\infty} \overline{A_k}\right) = \lim_{N\to+\infty} P\left(\bigcap_{k=n}^{N} \overline{A_k}\right) \text{ (justifié en cours).}$$

$$\begin{aligned}
P\left(\bigcap_{k=n}^{N} \overline{A_k}\right) &= \prod_{k=n}^{N} P(\overline{A_k}) \text{ par indépendance} \\
&= \prod_{k=n}^{N} (1 - P(A_k)) \\
&\leq \prod_{k=n}^{N} \mathrm{e}^{-P(A_k)} \text{ tout est positif} \\
&\leq \mathrm{e}^{-\sum\limits_{k=n}^{N} P(A_k)} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0
\end{aligned}$$

D'où le résultat.

Exercice 5 *(X 2017)*

On range n boules distinctes dans n boîtes.
Probabilité qu'une seule boîte soit vide et équivalent quand $n \to \infty$?

Correction
Il y a une seule boîte vide si, et seulement si, il y a une boîte vide, une boîte qui contient deux boules et $n-2$ boîtes qui contiennent une boule.
L'univers Ω est ici $[\![1;n]\!]^n$ de cardinal n^n et il y a équiprobabilité.
Pour construire un cas favorable, on :

- choisit la case vide : n choix
- choisit la case qui contient deux boules : $n-1$ choix
- choisit les deux boules en question $\binom{n}{2}$ choix
- répartit les $n-2$ boules restantes dans $n-2$ boules

On en déduit :

$$\begin{aligned}
p_n &= \frac{n(n-1)\binom{n}{2}(n-2)!}{n^n} \\
&= \frac{n(n-1)}{2}\,\frac{n!}{n^n} \\
&\sim \frac{n^2}{2}\,\frac{\sqrt{2\pi n}(n/\mathrm{e})^n}{n^n} = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}\, n^{5/2}\, \mathrm{e}^{-n}
\end{aligned}$$

Exercice 6 *(Mines-Telecom 2023)*

On dispose de deux urnes : l'urne numéro 1 qui contient 3 boules blanches et 5 boules noires et l'urne numéro 2 qui contient 2 boules blanches et 3 boules noires.
On tire la première boule dans une des urnes, tirées au sort avec équiprobabilité des deux urnes.

On note la couleur de la boule et on la remet dans l'urne dont elle provient.
Si la boule est blanche, le prochain tirage se fera dans l'urne numéro 1. Si elle est noire, dans l'urne 2.
On note p_n la probabilité de tirer une boule blanche au n-ième tirage.

1. Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n.
2. Déterminer p_n.

Correction

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n l'évènement : la n-ième boule tirée est blanche.
   On note A_0 l'évènement : le premier tirage se fait dans l'urne 1.
   Par la formule des probabilités totales :
   $$\begin{aligned} p_1 &= P(A_1) = P(A_1 \mid A_0)P(A_0) + P(A_1 \mid \overline{A_0})P(\overline{A_0}) \\ &= \frac{3}{8} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{15}{80} + \frac{16}{80} = \frac{31}{80} \end{aligned}$$
   Ensuite, toujours avec la formule des probabilités totales :
   $$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^* \; p_{n+1} &= P(A_{n+1}) = P(A_{n+1} \mid A_n)P(A_n) + P(A_{n+1} \mid \overline{A_n})P(\overline{A_n}) \\ &= \frac{3}{8}p_n + \frac{2}{5}(1 - p_n) \\ &= -\frac{1}{40}p_n + \frac{2}{5} \end{aligned}$$
   Cette formule est valable pour $n = 0$ en prenant $p_0 = \frac{1}{2}$.
2. L'équation $x = \frac{-x}{40} + \frac{2}{5}$ possède une et une seule solution : $l = \frac{16}{41}$.
   $\forall n \in \mathbb{N} \; p_{n+1} = -\frac{1}{40}p_n + \frac{2}{5}$
   et $l = -\frac{1}{40}l + \frac{2}{5}$ donc :
   $\forall n \in \mathbb{N} \; p_{n+1} - l = -\frac{1}{40}(p_n - l)$
   Donc :
   $\forall n \in \mathbb{N} \; p_n = l + \left(\frac{-1}{40}\right)^n (p_0 - l) = \frac{16}{41} + \left(\frac{-1}{40}\right)^n \frac{9}{82}$

Exercice 7

On jette de manière répétée une pièce de monnaie.
A chaque fois la probabilité d'obtenir face est $p \in]0;1[$.
Déterminer p_n, la probabilité d'obtenir face un nombre pair de fois au cours de n lancers.

Correction

- **Première méthode**
  On note E_{2k} l'évènement : "on obtient $2k$ fois face".
  $P(E_{2k})$ se calcule avec la loi binomiale. Donc :
  $p_n = \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} p^{2k}(1-p)^{n-2k}$

Pour calculer p_n, on introduit $q_n = \displaystyle\sum_{0\leq 2k+1\leq n} \binom{n}{2k+1} p^{2k+1}(1-p)^{n-2k-1}$

$p_n + q_n = \displaystyle\sum_{0\leq l\leq n} \binom{n}{l} p^l(1-p)^{n-l} = (p+1-p)^n = 1$

$p_n - q_n = \displaystyle\sum_{0\leq l\leq n} (-1)^l \binom{n}{l} p^l(1-p)^{n-l} = (-p+1-p)^n = (1-2p)^n$

$p_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}(1-2p)^n$

En particulier, si $p = \dfrac{1}{2}$ alors $p_n = \dfrac{1}{2}$.

Dans tous les cas, $p_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{2}$ $(-1 < 1-2p < 1)$

- **Deuxième méthode**

On considère une série de n lancers et on note E_n l'évènement :"on obtient face un nombre pair de fois" .

On note A l'évènement : "le premier lancer donne face".

$$\begin{aligned} p_n &= P(E_n|A)\,P(A) + P(E_n|\overline{A})\,P(\overline{A}) \\ &= p\,P(\overline{E_{n-1}}) + (1-p)P(E_{n-1}) = p(1-p_{n-1}) + (1-p)p_{n-1} \\ &= p + (1-2p)p_{n-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l = p + (1-2p)l \quad &\iff \quad 2pl = p \\ &\iff \quad l = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

En faisant la différence membre à membre, on a :

$\forall n \geq 2\ p_n - \dfrac{1}{2} = (1-2p)\left(p_{n-1} - \dfrac{1}{2}\right)$

On en déduit :

$\forall p \geq 1\ p_n = \dfrac{1}{2} + (1-2p)^{n-1}\left(p_1 - \dfrac{1}{2}\right)$

$p_1 = 1-p$ car 0 est pair et 1 impair.

Finalement : $p_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}(1-2p)^n$

Remarque :

Comment justifier rigoureusement la formule : $p_n = p\,P(\overline{E_{n-1}}) + (1-p)P(E_{n-1})$?

Le recours aux variables aléatoires simplifie la rédaction, qui reste fastidieuse.

On note X_k la variable aléatoire qui vaut 1 si on obtient face au k-ième lancer, 0 sinon.

Les X_k sont mutuellement indépendantes et suivent toutes la loi de Bernoulli de paramètre p.

Evidemment le nombre de faces obtenus au cours des n premiers lancers est $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ et suit la loi binomiale de paramètres n et p ce qui nous ramène à la première méthode mais ce n'est pas le point de vue adopté pour cette seconde méthode.

On note $\mathcal{E}_n = \{(x_1,\ldots,x_n) \in [\![0;1]\!]^n \text{ tq } \mathrm{Card}(\{i \in [\![1;n]\!] \text{ tq } x_i = 1\}) \text{ est pair}\}$.

$P(E_n) = P\left((X_1,\ldots,X_n) \in \mathcal{E}_n\right)$

$\mathcal{E}_n$ est la réunion de :

$\{(x_1,\ldots,x_n) \in [\![0;1]\!]^n \text{ tq } \mathrm{Card}(\{i \in [\![1;n]\!] \text{ tq } x_i = 1\}) \text{ est pair et } x_1 = 0\}$

et de :

$\{(x_1,\dots,x_n)\in [\![0;1]\!]^n \text{ tq } \mathrm{Card}(\{i\in[\![1;n]\!] \text{ tq } x_i=1\}) \text{ est pair et } x_1=1\}$
Donc $\mathcal{E}_n$ est la réunion de :
$\{(x_1,\dots,x_n)\in [\![0;1]\!]^n \text{ tq } x_1=0 \text{ et } (x_2,\dots,x_n)\in\mathcal{E}_{n-1}\}$
et de :
$\{(x_1,\dots,x_n)\in [\![0;1]\!]^n \text{ tq } x_1=1 \text{ et } (x_2,\dots,x_n)\in[\![1;n-1]\!]\setminus\mathcal{E}_{n-1}\}$
On en déduit :

$$\begin{aligned}
P(E_n) &= P\left((X_1,\dots,X_n)\in\mathcal{E}_n\right)\\
&= P\left((X_1,\dots,X_n)\in\{(x_1,\dots,x_n)\in[\![0;1]\!]^n \text{ tq } x_1=0 \text{ et } (x_2,\dots,x_n)\in\mathcal{E}_{n-1}\}\right)\\
&\quad +P\left((X_1,\dots,X_n)\in\{(x_1,\dots,x_n)\in[\![0;1]\!]^n \text{ tq } x_1=1 \text{ et } (x_2,\dots,x_n)\in[\![1;n-1]\!]\setminus\mathcal{E}_{n-1}\}\right)\\
&\quad \text{ par incompatibilité}\\
&= \sum_{(x_2,\dots,x_n)\in\mathcal{E}_{n-1}} P\left((X_1,\dots,X_n)=(0,x_2,\dots,x_n)\right)\\
&\quad + \sum_{(x_2,\dots,x_n)\in[\![1;n-1]\!]\setminus\mathcal{E}_{n-1}} P\left((X_1,\dots,X_n)=(1,x_2,\dots,x_n)\right)\\
&= \sum_{(x_2,\dots,x_n)\in\mathcal{E}_{n-1}} P(X_1=0)P(X_2=x_2)\dots P(X_n=x_n)\\
&\quad + \sum_{(x_2,\dots,x_n)\in[\![1;n-1]\!]\setminus\mathcal{E}_{n-1}} P(X_1=1)P(X_2=x_2)\dots P(X_n=x_n) \text{ par indépendance}\\
&= (1-p)\sum_{(x_2,\dots,x_n)\in\mathcal{E}_{n-1}} P(X_1=x_2)\dots P(X_{n-1}=x_n)\\
&\quad +p\sum_{(x_2,\dots,x_n)\in[\![1;n-1]\!]\setminus\mathcal{E}_{n-1}} P(X_1=x_2)\dots P(X_{n-1}=x_n)\\
&\quad \text{ car les variables aléatoires ont toutes la même loi}\\
&= (1-p)\sum_{(x_2,\dots,x_n)\in\mathcal{E}_{n-1}} P\left((X_1,\dots,X_{n-1})=(x_2,\dots,x_n)\right)\\
&\quad +p\sum_{(x_2,\dots,x_n)\in[\![1;n-1]\!]\setminus\mathcal{E}_{n-1}} P\left((X_1,\dots,X_{n-1})=(x_2,\dots,x_n)\right) \text{ par indépendance}\\
&= (1-p)P\left((X_1,\dots,X_{n-1})\in\mathcal{E}_{n-1}\right)+pP\left((X_1,\dots,X_{n-1})\in[\![1;n-1]\!]\setminus\mathcal{E}_{n-1}\right)\\
&= (1-p)P(E_{n-1})+pP(\overline{E_{n-1}})
\end{aligned}$$

Exercice 8 *(Mines 2018)*

On considère un panier de r pommes rouges et v pommes vertes. On pioche et on mange une à une les pommes au hasard. On s'arrête quand il n'y a plus que des rouges. Quelle est la probabilité que l'on ait mangé toutes les pommes ?
Remarque
L'énoncé est ambigü :
S'il ne reste que des pommes rouges, c'est qu'il en reste et on ne peut donc pas les avoir toutes mangées.
Je pense donc qu'il s'agit de calculer la probabilité de manger toutes les pommes rouges avant d'avoir fini les vertes.
Par exemple on ne peut pas terminer avec une seule pomme rouge : après avoir mangé $r+v-1$ pommes, on constate qu'il ne reste qu'une rouge et on s'arrête avant d'avoir mangé toutes les pommes.

Correction
Plusieurs méthodes sont possibles.

- **Première méthode**
  On explicite Ω.
  Il est assez naturel de prendre pour Ω l'ensemble des mots de $v+k$ lettres sur l'alphabet $\{V, R\}$ avec v fois la lettre V et k fois la lettre R avec $0 \leq k \leq r$, la dernière lettre étant un V.
  Y a-t-il équiprobabilité ? Répondre à cette question me paraît difficile a priori.
  On calcule la probabilité de chaque mot avec la formule des probabilités composées.
  La probabilité d'un mot sera un produit de $v+k$ quotients. Au dénominateur on a $(r+v)(r+v-1)\ldots(r+v-(v+k-1) = (r+v)\ldots(r-k+1) = \dfrac{(r+v)!}{(r-k)!}$.
  Au numérateur, on a dans un ordre variable $v(v-1)\ldots 1$ et $r(r-1)\ldots(r-k+1) = \dfrac{r!}{(r-k)!}$
  Il y a donc équiprobabilité, la probabilité de chaque mot étant $\dfrac{1}{\binom{r+v}{r}} = \dfrac{1}{\binom{r+v}{v}}$
  La probabilité cherchée est celle de l'ensemble des mots pour lesquels $k = r$, il y en a $\binom{v+r-1}{r}$ ie le nombre de façons de placer les lettres R.
  La probabilité cherchée est donc :
  $$\frac{\binom{v+r-1}{r}}{\binom{r+v}{v}} = \frac{(v+r-1)!}{r!(v-1)!}\frac{r!v!}{(r+v)!} = \frac{v}{r+v}$$
  Remarque
  En écrivant que $P(\Omega) = 1$, on a :
  $$\sum_{k=0}^{r} \binom{v+k-1}{k} = \binom{r+v}{v}$$
- **Deuxième méthode**
  Les pommes rouges sont notées $R_1, \ldots, R_r$, les vertes $V_1, \ldots, V_v$.
  On prend Ω l'ensemble des permutation de $\{R_1, \ldots, R_r, V_1, \ldots, V_v\}$ ie on poursuit le processus fictivement même si il ne reste que des boules rouges. Le cardinal de Ω est $(r+v)!$ et il y a équiprobabilité.
  Le nombre de cas favorables est le nombre de $\omega \in \Omega$ tel que $\omega_{r+v} \in \{V_1, \ldots, V_v\}$ soit :
  (v choix de la dernière pomme verte) ($(r+v-1)!$ positionnement des autres boules)
  On en déduit facilement la probabilité cherchée : $\dfrac{v}{r+v}$.
- **Troisième méthode**
  On note $p_{r,v}$ la probabilité cherchée.
  $p_{r,0} = 0$ (pour $r > 0$) et $p_{0,v} = 1$
  En conditionnant par la couleur de la première boule tirée :
  $p_{r,v} = \dfrac{r}{r+v} p_{r-1,v} + \dfrac{v}{r+v} p_{r,v-1}$
  On calcule $p_{r,v}$ pour les petites valeurs de r et de v, on intuite $p_{r,v} = \dfrac{v}{r+v}$ et on conclut par une récurrence sur $r+v$.

Exercice 9

Loïc joue une suite de parties de poker avec deux autres joueurs de cartes.
A chaque partie, il gagne avec la probabilité 1/3. Les parties sont supposées indépendantes les unes des autres.
Soit k un entier strictement positif fixé. Loïc décide d'arrêter de jouer dès qu'il gagne k parties de suite. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note p_n la probabilité pour que Loïc joue exactement n parties.

1. Calculer p_k.
2. Montrer, en considérant le rang de la première partie perdue par Loïc, que :

$$\forall n \geq k \; p_{n+1} = \frac{2}{3} \sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{1}{3}\right)^i p_{n-i}$$

3. Pour $k = 2$, calculer p_n ($n \in \mathbb{N}^*$).

Correction

1. p_k est la probabilité que Loïc gagne les k premières parties donc $p_k = \left(\frac{1}{3}\right)^k$.
2. On note A l'évènement : "Loïc gagne les k premières parties".
   Pour tout $i \in [\![1; k]\!]$, on note R_i l'évènement : "Loïc gagne les $i-1$ premières parties et perd la ième".
   $(A, R_1, \ldots, R_k)$ est un système complet d'évènements.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, G_n est l'évènement : "Loïc joue exactement n parties".

$$\begin{aligned}\forall n \geq k \; p_{n+1} &= P(G_{n+1}) \\ &= P(G_{n+1}|A)\,P(A) + \sum_{i=1}^{k} P(G_{n+1}|R_i)\,P(R_i)\end{aligned}$$

   $P(G_{n+1}|A) = 0$ car $n+1 > k$

$$\begin{aligned}\forall n \geq k \; p_{n+1} &= \sum_{i=1}^{k} P(G_{n+1}|R_i)\,P(R_i) \\ &= \sum_{i=1}^{k} p_{n+1-i} \, \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^{i-1} \\ &= \frac{2}{3} \sum_{j=0}^{k-1} p_{n-j} \left(\frac{1}{3}\right)^j\end{aligned}$$

   On peut également rédiger ainsi :
   $G_{n+1} \subset \bigcup_{i=1}^{k} R_i$: si Loïc joue $n+1 > k$ parties il a forcément perdu une des k premières parties.
   Donc : $G_{n+1} = G_{n+1} \bigcap \left(\bigcup_{i=1}^{k} R_i\right) = \bigcup_{i=1}^{k} (G_{n+1} \cap R_i)$ et on retrouve la formule : $p_{n+1} = \sum_{i=1}^{k} P(G_{n+1}|R_i)\,P(R_i)$

   Remarque
   Justification de la formule $P(G_{n+1}|R_i) = p_{n+1-i}$?
   On va plutôt justifier : $P(G_{n+1} \cap R_i) = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^{i-1} p_{n+1-i}$

On note E_i l'évènement :"Loïc joue et gagne la i-ième partie" et F_i l'évènement :"Loïc joue et perd la i-ème partie".
On note $\phi_i \begin{cases} \{0;1\} \to \{E_i, F_i\} \\ 0 \mapsto F_i \\ 1 \mapsto E_i \end{cases}$
On note $\mathcal{E}_N = \{(x_1, \dots, x_N) \in \{0;1\}^N \text{ tq } \forall i \in [\![1; N-k]\!]\ (x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1}) \neq (1, \dots, 1) \text{ et } (x_{N-k+1}, \dots, x_N) = (1, \dots, 1)\}$.
$G_{n+1} = \displaystyle\bigcup_{(x_1,\dots,x_{n+1})\in\mathcal{E}_{n+1}} (\phi_1(x_1) \cap \dots \cap \phi_{n+1}(x_{n+1}))$
$R_i = \phi_1(1) \cap \dots \cap \phi_{i-1}(1) \cap \phi_i(0)$
$\mathcal{E}_{n+1} \cap \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \text{ tq } x_1 = \dots = x_{i-1} = 1 \text{ et } x_i = 0\}$ est égal à :
$\{(x_1, \dots, x_{n+1}) \text{ tq } x_1 = \dots = x_{i-1} = 1 \text{ et } x_i = 0 \text{ et } (x_{i+1}, \dots, x_{n+1}) \in \mathcal{E}_{n+1-i}\}$ noté $\mathcal{F}_{n+1}$
En notant $\psi \begin{cases} \{0;1\} \to \mathbb{R} \\ 0 \mapsto \frac{2}{3} \\ 1 \mapsto \frac{1}{3} \end{cases}$ et en utilisant la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned}
P(G_{n+1} \cap R_i) &= P\left(\bigcup_{(x_1,\dots,x_{n+1})\in\mathcal{F}_{n+1}} (\phi_1(x_1) \cap \dots \cap \phi_{n+1}(x_{n+1}))\right) \\
&= \sum_{(x_1,\dots,x_{n+1})\in\mathcal{F}_{n+1}} P\left(\phi_1(x_1) \cap \dots \cap \phi_{n+1}(x_{n+1})\right) \\
&= \sum_{(x_{i+1},\dots,x_{n+1})\in\mathcal{E}_{n+1-i}} \left(\frac{1}{3}\right)^{i-1} \frac{2}{3}\psi(x_{i+1}) \dots \psi(x_{n+1}) \\
&= \left(\frac{1}{3}\right)^{i-1} \frac{2}{3} \sum_{(x_{i+1},\dots,x_{n+1})\in\mathcal{E}_{n+1-i}} \psi(x_{i+1}) \dots \psi(x_{n+1}) \\
&= \left(\frac{1}{3}\right)^{i-1} \frac{2}{3} \sum_{(x_{i+1},\dots,x_{n+1})\in\mathcal{E}_{n+1-i}} P\left(\phi_1(x_{i+1}) \cap \dots \cap \phi_{n+1-i}(x_{n+1})\right) \\
&= \left(\frac{1}{3}\right)^{i-1} \frac{2}{3} P\left(\bigcup_{(x_{i+1},\dots,x_{n+1})\in\mathcal{E}_{n+1-i}} (\phi_1(x_{i+1}) \cap \dots \cap \phi_{n+1-i}(x_{n+1}))\right) \\
&= \left(\frac{1}{3}\right)^{i-1} \frac{2}{3} P\left(G_{n+1-i}\right) \\
&= \left(\frac{1}{3}\right)^{i-1} \frac{2}{3} p_{n+1-i}
\end{aligned}$$

3. $k = 2$ donc :
   $\forall n \geq 2\ p_{n+1} = \frac{2}{3}\left(p_n + \frac{1}{3}p_{n-1}\right)$
   La résolution suit la méthode habituelle :
   Equation caractéristique : $r^2 = \frac{2}{3}r + \frac{1}{9}$
   Racines : $r = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{3}$
   $\exists (A, B) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } \forall n \in \mathbb{N}^*\ p_n = A\left(\frac{1+\sqrt{3}}{3}\right)^{n-1} + B\left(\frac{1-\sqrt{3}}{3}\right)^{n-1}$

On utilise $p_1 = 0$ et $p_2 = \frac{1}{9}$.
On trouve :

$$\forall n \geq 1 \; p_n = \frac{\sqrt{3}}{18}\left[\left(\frac{1+\sqrt{3}}{3}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{3}}{3}\right)^{n-1}\right]$$

Exercice 10

Trois joueurs A, B et C jouent de la façon suivante :
A et B jouent la première partie. Le perdant est remplacé par C pour la deuxième partie. Le perdant de cette deuxième partie est remplacé par le perdant de la première partie. Le jeu se poursuit ainsi jusqu'à ce qu'un joueur gagne deux fois de suite ; ce joueur est déclaré vainqueur.
On suppose qu'à chaque partie, la probabilité de gain de chacun des joueurs est 1/2.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Quelle est la probabilité que A soit déclaré vainqueur :
   (a) à l'issue de la $(3n)^{\text{ième}}$ partie ?
   (b) à l'issue de la $(3n+1)^{\text{ième}}$ partie ?
   (c) à l'issue de la $(3n+2)^{\text{ième}}$ partie ?
2. Quelle est la probabilité que A soit déclaré vainqueur ?
3. Quelle est la probabilité que C soit déclaré vainqueur ?

Correction

1. Si A gagne la première partie, s'enclenche le processus suivant :
   - A gagne la première partie contre B.
   - A perd la seconde partie contre C.
   - C perd la troisième partie contre B.
   - B perd la quatrième partie contre A.

   La liste des gagnants est $ACBACBA\ldots$.
   A ne peut alors gagner qu'à la $3n+2$ième partie où $n \in \mathbb{N}$.
   Dans la cas où A perd la première partie, la liste des gagnants est $BCABCA\ldots$.
   A ne peut alors gagner qu'à la $3n+1$ième partie où $n \in \mathbb{N}^*$.
   Si on note AV_n l'évènement : "A est déclaré vainqueur à l'issue de la $n^{\text{ième}}$ partie" on a :
   - $\forall n \in \mathbb{N} \; a_{3n} = 0$
   - $\forall n \in \mathbb{N}^* \; a_{3n+1} = \frac{1}{2^{3n+1}}$ $(a_1 = 0)$
   - $\forall n \in \mathbb{N} \; a_{3n+2} = \frac{1}{2^{3n+2}}$

   Attention à ce calcul
   Il faut être attentif à l'indépendance.
   On note A_i l'évènement : "A gagne la i-ième partie".
   On note B_i l'évènement : "B gagne la i-ième partie".
   On note C_i l'évènement : "C gagne la i-ième partie".
   $A_1 \cap B_2 = \emptyset$ alors que $P(A_1) > 0$ et $P(B_2) > 0$ (cf la situation où B gagne les deux premières parties)
   La calcul doit être mené ainsi :

$$\begin{aligned} P(AV_{3n+2}) &= P(A_1 \cap C_2 \cap B_3 \cdots \cap A_{3n+1} \cap A_{3n+2}) \\ &= P(A_1) \times P(C_2|A_1) \times P(B_3|A_1 \cap C_2) \ldots \end{aligned}$$

2. $P(A \text{ gagne}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{3n+1}} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{3n+2}} = \frac{5}{14}$.
   Par symétrie, $P(B \text{ gagne}) = \frac{5}{14}$.
3. Les déroulements qui permettent à C de gagner sont $ACBACB\dots ACC$ et $BCABCA\dots BCC$.
   $P(C \text{ gagne}) = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{3n}} = \frac{2}{7}$.
   $P(A \text{ gagne}) + P(B \text{ gagne}) + P(C \text{ gagne}) = 1$: le jeu se termine ps.

Exercice 11 *(Mines 2023)*

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et a un diviseur de n.
On note $D(a) = \{k \in [\![1;n]\!] \text{ tq } a|k\}$.
On se place dans l'espace probabilisé $([\![1;n]\!], \mathcal{P}([\![1;n]\!]), P)$ où P est la probabilité uniforme.

1. Calculer $P(D(a))$.
2. Soient $p_1, \dots, p_l$ les diviseurs premiers de n.
   Montrer que les $D(p_i)$ sont mutuellement indépendants.
3. Soit $B = \{k \in [\![1;n]\!] \text{ tq } k \text{ et } n \text{ sont premiers entre eux}\}$.
   Calculer $P(B)$.

Correction

1. a est un diviseur de n donc il existe $b \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = ab$.
   $D(a) = \{a; 2a; \dots; ba\}$ est de cardinal b.
   $P(D(a)) = \frac{b}{n} = \frac{1}{a}$.
2. Il s'agit en fait de montrer que si $q_1, \dots, q_k$ sont des nombres premiers 2 à 2 distincts et divisant n alors :
   $P\left(\bigcap_{i=1}^{k} D(q_i)\right) = \prod_{i=1}^{k} P(D(q_i))$
   Or $\bigcap_{i=1}^{k} D(q_i) = D(q_1 \dots q_k)$
   L'examinateur a demandé de le justifier.
   On procède par double inclusion.
   Si un nombre est divisible par $q_1 \dots q_k$ alors il est divisible par chaque q_i donc : $D(q_1 \dots q_k) \subset \bigcap_{i=1}^{k} D(q_i)$.
   Réciproquement, soit b un nombre divisible par chaque q_i.
   b est divisible par q_1 donc $b = q_1 b_1$ avec b_1 entier.
   q_2 est un nombre premier qui divise $q_1 b_1$ donc q_2 apparaît dans la décomposition en facteurs premiers de $q_1 b_1$. Comme q_1 est un nombre premier différent de q_2, il faut que q_2 apparaisse dans la décomposition en facteurs premiers de b_1.
   Donc $b_1 = q_2 b_2$ avec b_2 premier et $b = q_1 q_2 b_2$ et on itère le procédé.
   En tous cas :
$$\begin{aligned} P\left(\bigcap_{i=1}^{k} D(q_i)\right) &= P\left(D(q_1 \dots q_k)\right) = \frac{1}{q_1 \dots q_k} \\ &= \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{q_i} = \prod_{i=1}^{k} P(D(q_i)) \end{aligned}$$

3. $\overline{B} = \bigcup_{i=1}^{l} D(p_i)$ donc $B = \bigcap_{i=1}^{l} \overline{D(p_i)}$

   Les $D(p_i)$ étant mutuellement indépendants, il en est de même de leurs complémentaires et :

   $P(B) = \prod_{i=1}^{l} P\left(\overline{D(p_i)}\right) = \prod_{i=1}^{l}\left(1 - \frac{1}{p_i}\right) = \prod_{i=1}^{l} \frac{p_i - 1}{p_i}$