PROBABILITES
TD
2025-2026
Chapitre 2

941

1 Loi d'une variable aléatoire

Exercice 1

X est une variable aléatoire sur un univers Ω vérifiant $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et :
$\exists k \in]0;1[$ tq $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $P(X = n) = kP(X \geq n)$
Déterminer la loi de X.

Exercice 2 *(Mines 2022)*

Une machine produit deux types de pièces : les pièces de type A avec la probabilité $a \in]0;1[$ et les pièces de type b avec la probabilité $b = 1 - a$.
Chaque pièce a une probabilité p d'être défectueuse.
Les évènements "la pièce est de type A" et "la pièce est défectueuse" sont indépendants.
Un ouvrier lance la machine et l'arrête dès la production de la première pièce de type A.
Quelle est la probabilité que la machine ait produit n pièces défectueuses pendant cet intervalle de temps ?

Exercice 3 *(CCP 2018)*

Que vaut $1 + j^k + j^{2k}$?
Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre 1.
$X = 3Z + Y$: division euclidienne
Que vaut $P(Y = 0)$?
Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n)!}$.

Exercice 4 *(X 2019)*

Soit X une variable aléatoire réelle discrète.

1. Existe-t-il toujours $\alpha \in \mathbb{R}$ tq $P(X \leq \alpha) = P(X \geq \alpha) = \dfrac{1}{2}$?
2. Si α existe, est-il forcément unique ?
3. Est-il possible que α soit unique ?

2 Couples de variables aléatoires

Exercice 5 *(Mines 2019)*

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
Déterminer la probabilité que $\begin{pmatrix} 0 & Y & 0 \\ X & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

Exercice 6

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi géométrique de paramètre $p \in]0;1[$.

1. Soit $Z = \min(X, Y)$.
   (a) Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $P(X > n)$.
   (b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $P(Z \geq n)$ puis $P(Z = n)$.
   Reconnaître la loi de Z.
   (c) X et Z sont-elles indépendantes ?
2. Soit $M = \max(X, Y)$.
   (a) Déterminer la loi de M ?
   (b) Calculer l'espérance de M.

Exercice 7 *(Mines 2016)*

Un centre d'appel téléphonique appelle N personnes. Chaque personne répond indépendamment avec la probabilité $p \in]0;1[$.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de personnes ayant répondu au cours d'une première série d'appels.
On rappelle alors les personnes n'ayant pas répondu la première fois et on note Y le nombre de personnes ayant répondu lors de cette deuxième série d'appels.
On pose $Z = X + Y$.
Loi de X ?
Loi conditionnelle de Y sachant $X = i$?
Loi et espérance de Z ?

Exercice 8 *(X 2017)*

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi géométrique de paramètre p.

1. Calculer $P(X = Y)$.
2. Calculer $P(X > Y)$.
3. Pour $n \geq 2$, calculer $P(X = n | X > Y)$.

Exercice 9 *(Simulation d'un pile ou face équitable)*

On dispose d'une pièce déséquilibrée : la probabilité d'obtenir "face" est $p \in]0;1[$.
On procède à une suite de lancers de cette pièce. On note X_n la variable aléatoire qui vaut 1 si on obtient "face" au n-ième lancer, 0 sinon.
On pose $T = \min\{n \geq 1 \text{ tq } (X_{2n-1}, X_{2n}) \in \{(0,1);(1,0)\}\}$.

1. Quelle est la loi de T ?
2. Montrer que $P(X_{2T} = 1) = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 10 *(Ens 2018)*

Pour X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{Z}$, on définit :

$$d(X,Y) = \sup_{A \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})} \left(P(X \in A) - P(Y \in A)\right)$$

1. Montrer que $d(X,Y)$ est atteint en $B = \{k \in \mathbb{Z} \text{ tq } P(X=k) - P(Y=k) > 0\}$.
2. Montrer que $d(X,Y) = \dfrac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |P(X=k) - P(Y=k)|$.
3. Montrer que $d(X,Y) \leq P(X \neq Y)$.