PROBABILITES
TD
2025-2026
Chapitre 2
CORRECTION

941

1 Loi d'une variable aléatoire

Exercice 1

X est une variable aléatoire sur un univers Ω vérifiant $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et :
$\exists k \in]0;1[$ tq $\forall n \in \mathbb{N}^*\ P(X=n) = kP(X \geq n)$
Déterminer la loi de X.

Correction
$\forall n \in \mathbb{N}^*\ P(X=n+1) - P(X=n) = k\left(P(X \geq n+1) - P(X \geq n)\right) = -kP(X=n)$
Donc :
$\forall n \in \mathbb{N}^*\ P(X=n+1) = (1-k)P(X=n)$
Donc :
$\forall n \in \mathbb{N}^*\ P(X=n) = (1-k)^{n-1}P(X=1)$.
Comme la somme doit faire 1 :
$P(X=1) = \dfrac{1}{\sum\limits_{l=0}^{+\infty}(1-k)^l} = k$
On peut aussi utiliser : $P(X=1) = kP(X \geq 1) = k$.
Finalement X suit la loi géométrique de paramètre k.

Exercice 2 *(Mines 2022)*

Une machine produit deux types de pièces : les pièces de type A avec la probabilité $a \in]0;1[$ et les pièces de type b avec la probabilité $b = 1-a$.
Chaque pièce a une probabilité p d'être défectueuse.
Les évènements "la pièce est de type A" et "la pièce est défectueuse" sont indépendants.
Un ouvrier lance la machine et l'arrête dès la production de la première pièce de type A.
Quelle est la probabilité que la machine ait produit n pièces défectueuses pendant cet intervalle de temps ?

Correction
Attention dans cet exercice aux indices de sommation
Soit T le rang d'apparition de la première pièce A. T suit la loi géométrique de paramètre a.

Soit X le nombre de pièces défectueuses produites. On cherche en fait la loi de X.
On commence par appliquer la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements : $(T=k)_{k\in\mathbb{N}^*}$.

$$\begin{aligned}
\forall n\in\mathbb{N}\ P(X=n) &= \sum_{k=1}^{+\infty} P(X=n\mid T=k)P(T=k)\\
\forall n\in\mathbb{N}^*\ P(X=n) &= \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k}{n} p^n q^{k-n} b^{k-1} a\\
&= \frac{ap^n}{n!bq^n}\sum_{k=n}^{+\infty} k(k-1)\dots(k-n+1)(bq)^k\\
&= \frac{ap^n}{n!bq^n}(bq)^n\sum_{k=n}^{+\infty} k(k-1)\dots(k-n+1)(bq)^{k-n}\\
&= \frac{ap^nb^n}{bn!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[\left(\sum_{k=0}^{+\infty} x^k\right)\right]_{x=bq}\\
&= \frac{ap^nb^n}{bn!}\frac{n!}{(1-bq)^{n+1}}\\
&= \frac{a}{b(1-bq)}\left(\frac{pb}{1-bq}\right)^n\\
P(X=0) &= \sum_{k=1}^{+\infty} q^k b^{k-1} a\\
&= \frac{aq}{1-bq}
\end{aligned}$$

Exercice 3 *(CCP 2018)*

Que vaut $1+j^k+j^{2k}$?
Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre 1.
$X=3Z+Y$: division euclidienne
Que vaut $P(Y=0)$?
Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(3n)!}$.

Correction
Si k est un multiple de 3, $1+j^k+j^{2k}+1+1=3$.
Si k est de la forme $3l+1$ alors $1+j^k+j^{2k}=1+j+j^2=0$
Si k est de la forme $3l+2$ alors $1+j^k+j^{2k}=1+j^2+j=0$
On peut aussi dire que :

$$1 + j^k + j^{2k} = 1 + j^k + \left(j^k\right)^2 = \begin{cases} \dfrac{\left(j^k\right)^3 - 1}{j^k - 1} = \dfrac{j^{3k} - 1}{j^k - 1} = 0 \text{ si } j^k \neq 1 \\ 3 \text{ si } j^k = 1 \end{cases} \quad .$$

$$\begin{aligned} P(Y = 0) &= P(3 \text{ divise } X) = P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} (X = 3n)\right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = 3n) \text{ par incompatibilité} \\ &= \mathrm{e}^{-1} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n)!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{e} &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \\ \mathrm{e}^{j} &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{j^k}{k!} \\ \mathrm{e}^{j^2} &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{j^{2k}}{k!} \end{aligned}$$

On somme :

$$\begin{aligned} \mathrm{e} + \mathrm{e}^{j} + \mathrm{e}^{j^2} &= \mathrm{e} + \mathrm{e}^{-1/2}\left(\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) + \mathrm{e}^{-1/2}\left(\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - i\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) \\ &= \mathrm{e} + 2\,\mathrm{e}^{-1/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1 + j^k + j^{2k}}{k!} = 3\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n)!} \end{aligned}$$

Donc :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n)!} = \frac{1}{3}\left(\mathrm{e} + 2\,\mathrm{e}^{-1/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$$

et

$$P(X = 0) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\,\mathrm{e}^{-3/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Exercice 4 *(X 2019)*

Soit X une variable aléatoire réelle discrète.

1. Existe-t-il toujours $\alpha \in \mathbb{R}$ tq $P(X \leq \alpha) = P(X \geq \alpha) = \dfrac{1}{2}$?
2. Si α existe, est-il forcément unique ?
3. Est-il possible que α soit unique ?

Correction

La façon naturelle de démarrer l'exercice est de tester des exemples.
Néanmoins on peut prendre du recul et essayer d'énoncer des résultats généraux.

1. Supposons que α existe.
$\frac{1}{2} = P(X \leq \alpha) = P(X < \alpha) + P(X = \alpha)$
$\frac{1}{2} = P(X \geq \alpha) = P(X > \alpha) + P(X = \alpha)$
En sommant ces deux lignes, on trouve $1 = 1 + P(X = \alpha)$.
Donc si α existe alors $P(X = \alpha) = 0$, $P(X < \alpha) = P(X > \alpha) = \frac{1}{2}$.
Réciproquement, si $P(X < \alpha) = \frac{1}{2}$ et $P(X = \alpha) = 0$ alors $P(X \geq \alpha) = P(X \leq \alpha) = \frac{1}{2}$.
Si $X(\Omega) = \{x_1; x_2; \ldots; x_n\}$ avec $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$, une CNS d'existence de α est donc l'existence d'un entier k tel que $\sum_{i=1}^{k} P(X = x_i) = \frac{1}{2}$.
On peut alors prendre pour α n'importe quel nombre strictement compris entre x_k et x_{k+1}.
En effet $P(X < \alpha) = 0$ si $\alpha \leq x_1$ et $P(X < \alpha) = \sum_{i=1}^{l} P(X = x_i)$ où $l = \max\left(\{i \in [\![1; n]\!] \text{ tq } x_i < \alpha\}\right)$ si $\alpha > x_1$
La réponse à la question posée est donc non : par exemple si X suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \neq \frac{1}{2}$, α n'existe pas.
2. La réponse est : non.
Cela découle immédiatement de ce qui précède.
3. Si $X(\Omega)$ est fini, α n'est jamais unique lorsqu'il existe.
Si $X(\Omega) = \{x_n, n \in \mathbb{N}^*\}$ avec $x_n < x_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, α ne sera pas unique si il existe.
Intuitivement, il faut diminuer l'écart entre x_k et x_{k+1} (notation de la première question).
D'où l'idée de réunir deux suites adjacentes pour former $X(\Omega)$.
Par exemple :
Il existe un espace probabilisé et une var discrète définie sur cet espace telle que :
$X(\Omega) = \left\{\pm\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$
$\forall n \in \mathbb{N}^* \; P\left(X = \frac{1}{n}\right) = P\left(X = -\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2^{n+1}}$
En effet ces nombres sont positifs et leur somme est :
$2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 1$
$P(X \geq 0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}$
$P(X \leq 0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}$
Soit $\alpha > 0$
$E = \left\{n \in \mathbb{N}^* \text{ tq } n \leq \frac{1}{\alpha}\right\}$ est fini (éventuellement vide) donc :
$P(X \geq \alpha) = \sum_{n \in E} \frac{1}{2^{n+1}} < \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}$
De même si $\alpha < 0$, $P(X \leq \alpha) < \frac{1}{2}$
$\alpha = 0$ est la seule solution.

2 Couples de variables aléatoires

Exercice 5 *(Mines 2019)*

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

Déterminer la probabilité que $\begin{pmatrix} 0 & Y & 0 \\ X & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

Correction

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & y & 0 \\ x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec x et $y \in \mathbb{N}$.

$\chi_A = X(X^2 - xy)$ sans problème

- **Premier cas :** $xy = 0$
  $\chi_A = X^3$ et 0 est valeur propre triple. Peu importe qu'on soit dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$:
  A diagonalisable $\iff A = 0 \iff x = y = 0$
- **Deuxième cas :** $xy \neq 0$
  x et y appartiennent à $\mathbb{N}$ donc $xy > 0$ et χ_A est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$.

Donc :
A DZ $\iff (x = y = 0)$ ou $(x > 0$ et $y > 0))$
La probabilité cherchée est donc :

$$\begin{aligned} P\left((X = Y = 0) \cup ((X \neq 0) \cap (Y \neq 0)\right) &= P\left((X = 0) \cap (Y = 0)\right) + P\left((X \neq 0) \cap (Y \neq 0)\right) \text{ par incompatibilité} \\ &= P(X = 0)P(Y = 0) + P(X \neq 0)P(Y \neq 0) \text{ par indépendance} \\ &= P(X = 0)^2 + (1 - P(X = 0))^2 \text{ car } X \text{ et } Y \text{ ont la même loi} \\ &= \mathrm{e}^{-2\lambda} + \left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda}\right)^2 = 1 - 2\,\mathrm{e}^{-\lambda} + 2\,\mathrm{e}^{-2\lambda} \end{aligned}$$

Exercice 6

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi géométrique de paramètre $p \in]0;1[$.

1. Soit $Z = \min(X, Y)$.
   (a) Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $P(X > n)$.
   (b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $P(Z \geq n)$ puis $P(Z = n)$.
   Reconnaître la loi de Z.
   (c) X et Z sont-elles indépendantes ?
2. Soit $M = \max(X, Y)$.
   (a) Déterminer la loi de M ?
   (b) Calculer l'espérance de M.

Correction

1. (a)

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}\ P(X > n) &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} P(X = k) \\
&= \sum_{k=n+1}^{+\infty} p(1-p)^{k-1} \text{ car } k \in \mathbb{N}^* \\
&= p(1-p)^n \sum_{l=0}^{+\infty} (1-p)^l = \frac{p(1-p)^n}{1-(1-p)} \\
&= (1-p)^n
\end{aligned}$$

Cf aussi l'interprétation comme temps d'attente.

(b)

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}^*\ P(Z \geq n) &= P\left(\min(X,Y) \geq n\right) = P\left(X \geq n \text{ et } Y \geq n\right) \\
&= P(X \geq n) \times P(Y \geq n) \text{ par indépendance} \\
&= \left(P(X > n-1)\right)^2 = \left(q^{n-1}\right)^2 \text{ en posant } q = 1-p \\
&= q^{2n-2}
\end{aligned}$$

$Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}^*\ P(Z = n) &= P(Z \geq n) - P(Z \geq n+1) = q^{2n-2} - q^{2n} = q^{2n-2}(1-q^2) \\
&= (1-q^2)\left(1-(1-q^2)\right)^{n-1}
\end{aligned}$$

$Z \hookrightarrow \mathcal{G}(1-q^2)$

Interprétation

On a deux processus en parallèle.

Z est le temps d'attente du premier succès dans l'un ou l'autre.

$P(S) = P(S_1 \cup S_2) = P(S_1) + P(S_2) - P(S_1 \cap S_2) = p + p - p^2 = p(2-p)$

$1 - q^2 = 1 - (1-p)^2 = 1 - 1 + 2p - p^2 = 2p - p^2 = P(S)$

(c) $Z = \min(X,Y) \leq X$ donc $P(X = 1 \text{ et } Z = 2) = 0$

Mais $P(X = 1) > 0$ et $P(Z = 2) > 0$ donc $P(X = 1) \times P(Z = 2) \neq 0$

X et Z ne sont pas indépendantes.

2. (a)

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}^*\ P(M \leq n) &= P\left(\max(X,Y) \leq n\right) = P\left(X \leq n \text{ et } Y \leq n\right) \\
&= P(X \leq n) \times P(Y \leq n) \text{ par indépendance} \\
&= \left(P(X \leq n)\right)^2 = \left(1 - P(X > n)\right)^2 \\
&= (1-q^n)^2 \text{ valable aussi pour } n = 0
\end{aligned}$$

$M(\Omega) = \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}^*\ P(M = n) &= P(M \leq n) - P(M \leq n-1) = (1-q^n)^2 - \left(1-q^{n-1}\right)^2 \\
&= 1 - 2q^n + q^{2n} - 1 + 2q^{n-1} - q^{2n-2} = 2q^{n-1}(1-q) + q^{2n-2}(q^2-1) \\
&= 2pq^{n-1} + (q^2-1)q^{2n-2}
\end{aligned}$$

(b) $M + Z = X + Y$ donc :

$$\begin{aligned} E(M) &= E(X) + E(Y) - E(Z) = \frac{2}{p} - \frac{1}{1-q^2} = \frac{2}{p} - \frac{1}{p(1+q)} = \frac{1+2q}{p(1+q)} \\ &= \frac{3-2p}{p(2-p)} \end{aligned}$$

Si on veut faire le calcul directement, il faut remarquer que $P(M = n) = 2u_n - v_n$ avec (u_n) la loi géométrique de paramètre p et (v_n) la loi géométrique de paramètre $1 - q^2$.

Exercice 7 *(Mines 2016)*

Un centre d'appel téléphonique appelle N personnes. Chaque personne répond indépendamment avec la probabilité $p \in]0; 1[$.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de personnes ayant répondu au cours d'une première série d'appels.
On rappelle alors les personnes n'ayant pas répondu la première fois et on note Y le nombre de personnes ayant répondu lors de cette deuxième série d'appels.
On pose $Z = X + Y$.
Loi de X ?
Loi conditionnelle de Y sachant $X = i$?
Loi et espérance de Z ?

Correction
$X \hookrightarrow \mathcal{B}(N, p)$
C'est une situation classique, il ne me semble pas nécessaire d'en dire plus. La loi conditionnelle de Y sachant $X = i$ est la loi binomiale $\mathcal{B}(N - i, p)$.
$Z(\Omega) = [\![0; N]\!]$.

$$\begin{aligned} \forall n \in [\![0; N]\!]\, P(Z = n) &= \sum_{k=0}^{n} P(X = k, Y = n - k) = \sum_{k=0}^{n} P(X = k) \times P(Y = n - k | X = k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k} \binom{N-k}{n-k} p^{n-k} (1-p)^{N-k-(n-k)} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{N!}{k!(N-k)!} \, \frac{(N-k)!}{(n-k)!(N-n)!} p^n (1-p)^{2N-k-n} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{N!}{k!(n-k)!(N-n)!} p^n (1-p)^{2N-k-n} \\ &= \frac{N!}{n!(N-n)!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} p^n (1-p)^{2N-k-n} \\ &= \binom{N}{n} p^n (1-p)^{2N-2n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (1-p)^{n-k} \\ &= \binom{N}{n} p^n (1-p)^{2N-2n}!2-p)^n \\ &= \binom{N}{n} (p(2-p))^n \left((1-p)^2\right)^{N-n} \end{aligned}$$

et on remarque :
$1-p(2-p)=1-2p+p^2=(1-p)^2$
donc $Z \hookrightarrow \mathcal{B}(N, 1-(1-p)^2)$.
On en déduit immédiatement :

$$\boxed{E(Z)=pN(2-p)}$$

Interprétation
Pour chaque client la probabilité de "succès" ie de réponse est $1-(1-p)^2$ ie la probabilité qu'il réponse au moins une fois lors de deux appels indépendants.
Z est alors le nombre de "succès".
Pour simplifier les calculs, on pourrait faire comme si chaque client recevait deux appels.

Exercice 8 *(X 2017)*

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi géométrique de paramètre p.

1. Calculer $P(X=Y)$.
2. Calculer $P(X>Y)$.
3. Pour $n \geq 2$, calculer $P(X=n|X>Y)$.

Correction

1. $$\begin{aligned} P(X=Y) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P(X=n, Y=n) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X=n)^2 \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} p^2(1-p)^{2n-2} \\ &= \frac{p}{2-p} \end{aligned}$$

2. Par symétrie :
$$\begin{aligned} P(X>Y) &= \frac{1}{2}(1-P(X=Y)) = \frac{1}{2}\,\frac{2-2p}{2-p} \\ &= \frac{1-p}{2-p} \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} P(X=n|X>Y) &= \frac{P((X=n)\cap(X>Y))}{P(X>Y)} = \frac{P((X=n)\cap(Y<n))}{P(X>Y)} \\ &= p(1-p)^{n-1}(1-P(Y\geq n))\frac{2-p}{1-p} \\ &= p(2-p)(1-p)^{n-2}\left(1-(1-p)^{n-1}\right) \end{aligned}$$

On vérifie avec une machine : $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} p(2-p)(1-p)^{n-2}\left(1-(1-p)^{n-1}\right)=1.$

Exercice 9 *(Simulation d'un pile ou face équitable)*

On dispose d'une pièce déséquilibrée : la probabilité d'obtenir "face" est $p \in]0;1[$.
On procède à une suite de lancers de cette pièce. On note X_n la variable aléatoire qui vaut 1 si on obtient "face" au n-ième lancer, 0 sinon.
On pose $T = \min\{n \geq 1 \text{ tq } (X_{2n-1}, X_{2n}) \in \{(0,1);(1,0)\}\}$.

1. Quelle est la loi de T ?
2. Montrer que $P(X_{2T} = 1) = \dfrac{1}{2}$.

Correction

1. Les variables aléatoires $((X_{2n-1}, X_{2n}))_{n\in\mathbb{N}^*}$, sont mutuellement indépendantes donc T suit la loi géométrique de paramètre $(1-p)p + p(1-p) = 2p(1-p)$ (la suite de va démarre bien à 1).
2. On note E l'ensemble $\{(0,1);(1,0)\}$

$$\begin{aligned}
P(X_{2T} = 0) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P(X_{2T} = 0 \text{ et } T = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X_{2n} = 0 \text{ et } T = n)\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} P\left(((X_1, X_2) \notin E) \cap \cdots \cap ((X_{2n-3}, X_{2n-2}) \notin E) \cap (X_{2n-1} = 1) \cap (X_{2n} = 0)\right)\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} (1 - 2p(1-p))^{n-1} (1-p)p = \frac{p(1-p)}{1 - (1 - 2p(1-p))}\\
&= \frac{p(1-p)}{2p(1-p)} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Exercice 10 *(Ens 2018)*

Pour X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{Z}$, on définit :

$$d(X,Y) = \sup_{A \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})} (P(X \in A) - P(Y \in A))$$

1. Montrer que $d(X,Y)$ est atteint en $B = \{k \in \mathbb{Z} \text{ tq } P(X = k) - P(Y = k) > 0\}$.
2. Montrer que $d(X,Y) = \dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{k \in \mathbb{Z}} |P(X = k) - P(Y = k)|$.
3. Montrer que $d(X,Y) \leq P(X \neq Y)$.

Correction

1. Soit $A \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})$.
   En négligeant aux Ens les problèmes de définition :

$$\begin{aligned}
P(X \in A) - P(Y \in A) &= \sum_{k \in A} P(X = k) - \sum_{k \in A} P(Y = k) = \sum_{k \in A} (P(X = k) - P(Y = k))\\
&= \sum_{k \in A \cap B} (P(X = k) - P(Y = k)) + \sum_{k \in A \setminus B} (P(X = k) - P(Y = k) \leq 0)\\
&\leq \sum_{k \in A \cap B} (P(X = k) - P(Y = k))\\
&\leq \sum_{k \in B} (P(X = k) - P(Y = k)) - \sum_{k \in B \setminus A} (P(X = k) - P(Y = k))
\end{aligned}$$

Si $k \in B$, $P(X = k) - P(Y = k) > 0$ donc $\sum_{k \in B \setminus A} (P(X = k) - P(Y = k)) > 0$ sauf si $B \setminus A = \emptyset$ ie si $B \subset A$.
Donc :
$\forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})\ P(X \in A) - P(Y \in A) \leq P(X \in B) - P(Y \in B)$
On conclut facilement.

2. On note C le complémentaire de B.

$$\begin{aligned}
\sum_{k \in B} (P(X = k) - P(Y = k)) + \sum_{k \in C} (P(X = k) - P(Y = k)) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} (P(X = k) - P(Y = k)) \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}} P(X = k) - \sum_{k \in \mathbb{Z}} P(Y = k) \\
&= 1 - 1 = 0 \\
\sum_{k \in B} (P(X = k) - P(Y = k)) - \sum_{k \in C} (P(X = k) - P(Y = k)) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} |P(X = k) - P(Y = k)|
\end{aligned}$$

On conclut facilement.

3. Pour alléger les notations, on note $p_k = P(X = k)$ et $q_k = P(Y = k)$.
On note également $r_k = P(X = k, Y = k)$.
X et Y n'étant pas indépendantes, on n'a pas forcément $r_k = p_k q_k$.
Néanmoins : $r_k \leq p_k$ et $r_k \leq q_k$ par croissance de P.
On a donc : $r_k \leq \min(p_k, q_k)$.

$$\begin{aligned}
P(X \neq Y) &= 1 - P(X = Y) = 1 - \sum_{k \in \mathbb{Z}} P(X = k, Y = k) = 1 - \sum_{k \in \mathbb{Z}} r_k \\
P(X \neq Y) - d(X, Y) &= \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (p_k + q_k) - \sum_{k \in \mathbb{Z}} r_k - \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |p_k - q_k| \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2} (p_k + q_k - |p_k - q_k|) - \sum_{k \in \mathbb{Z}} r_k \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}} (\min(p_k, q_k) - r_k) \geq 0
\end{aligned}$$