PROBABILITES
TD
2025-2026
Chapitre 3

941

Exercice 1 *(Mines 2018)*

Soient X et Y deux variables aléatoires telles que :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2 \; P\left((X=i)\cap(Y=j)\right) = \frac{1}{\mathrm{e}\; 2^{i+1} j!}$$

1. Trouver les lois de X et de Y.
2. Montrer que $X+1$ suit une loi géométrique.
   En déduire $E(X)$ et $V(X)$.
3. Donner $E(Y)$ et $V(Y)$.
4. X et Y sont-elles indépendantes ?
5. Calculer $P(X=Y)$.

Exercice 2 *(Centrale 2018)*

Soit $p \in]0;1[$ et $q = 1-p$.
On considère deux variables aléatoires X et Y sur un espace probabilisé dont la loi conjointe est donnée par :

$$\forall j \in [\![0;n]\!] \; \forall k \in [\![1;n]\!] \; P\left((X=j)\cap(Y=k)\right) = \begin{cases} \dfrac{q^n}{n} \text{ si } j=0 \\ 0 \text{ si } j \neq 0 \text{ et } k \neq j \\ \dbinom{n}{k} p^k q^{n-k} \text{ si } j \neq 0 \text{ et } k = j \end{cases}$$

1. (a) Déterminer les lois marginales de X et de Y.
   (b) Déterminer l'espérance de Y.
2. (a) Déterminer la covariance de X et de Y.
   (b) X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 3 *(Mines 2017)*

Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0;1[$.
Trouver $E\left(\dfrac{1}{X}\right)$.

Exercice 4 *(Mines 2017)*

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes indépendantes qui suivent la loi uniforme sur $[\![0;n]\!]$.
On pose $Z = X + Y$.
Déterminer l'espérance et la variance de Z.

Exercice 5 *(Mines 2021)*

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes à valeurs strictement positives et de même loi.

1. Montrer que $\dfrac{X}{Y}$ et $\dfrac{Y}{X}$ ont la même loi.
2. Montrer que $E\left(\dfrac{X}{Y}\right) \geq 1$.

Exercice 6 *(Mines 2022)*

On dispose de 5 dés équilibrés. On les lance et on écarte ceux qui ont donné 1.
On recommence le processus avec les dés restants et on continue tant qu'on n'a pas écarté tous les dés.
On note T la variable aléatoire égale au nombre de fois qu'on a lancé les dés.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $P(T \leq n)$.
2. Montrer que T est d'espérance finie et calculer son espérance.

Exercice 7

On considère un sac contenant n pommes rouges et n pommes vertes.
On mange les pommes une à une au hasard et on s'arrête lorsque toutes les pommes restant dans le sac sont de la même couleur.
Quel est l'ordre de grandeur du nombre de pommes restant dans le sac : $O(\sqrt{n})$? $O(\ln(n))$? $O(1)$?

Exercice 8

Soient $X_1, \dots, X_n$ n variables aléatoires mutuellement indépendantes qui suivent toutes la loi uniforme sur $[\![1;n]\!]$.

Pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, soit $Y_k = \displaystyle\sum_{l=1}^{n} 1_{X_l = k}$.

Soit $Z = \displaystyle\max_{1 \leq k \leq n} (Y_k)$.

1. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+$, $\mathrm{e}^{\lambda E(Z)} \leq nE\left(\mathrm{e}^{\lambda Y_1}\right)$.
2. Montrer que $E(Z) \leq \dfrac{2\ln(n)}{\ln(1+\ln(n))}$.

Exercice 9 *(X 2017)*

Soit A une partie aléatoire de $[\![1;n]\!]$. En d'autres termes A est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathcal{P}([\![1;n]\!])$. On suppose que A suit une loi uniforme.
Soit B une autre variable aléatoire à valeurs dans $\mathcal{P}([\![1;n]\!])$ qui suit une loi uniforme.
On suppose A et B indépendantes.
Quelle est l'espérance du cardinal de $A \cap B$?

Exercice 10 *(X 2017)*

Soit X le nombre de tirages nécessaires à l'obtention de deux faces consécutifs dans un jeu de pile ou face avec une pièce équilibrée.
Loi et espérance de X ?

Exercice 11 *(X 2018)*

On considère n couples formant un ensemble de $2n$ personnes. On suppose que $r \in [\![1; 2n-1]\!]$ personnes décèdent. Déterminer le nombre moyen de couples restants.

Exercice 12 *(Mines 2019)*

Soit A une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre λ.
Soit B une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $\{1; 2\}$.
On suppose que A et B sont indépendantes.
Soit $C = AB$.

1. Donner la loi de C, son espérance et sa variance.
2. Quelle est la probabilité que C soit paire ?