PROBABILITES
TD
2025-2026
Chapitre 4

941

1 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Exercice 1 *(Mines 2018)*

On effectue des tirages successifs et avec remise dans une urne contenant deux boules rouges et 3 boules noires.
Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $Y_i = 1$ si on tire une boule rouge au $i^{\text{ième}}$ tirage, 0 sinon.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $S_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$.

1. Montrer que $P\left(\left|\frac{S_n}{n} - E(Y_1)\right| \geq a\right) \leq \frac{V(Y_1)}{a^2 n}$ avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
2. Donner n pour que la probabilité que la proportion de boules rouges tirées soit comprise entre $0,35$ et $0,45$ soit supérieure à $0,95$.

Exercice 2 *(CCP 2017)*

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes $\mathcal{B}(p)$ ($p \in]0;1[$).
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $Y_n = X_n + X_{n+1}$ et $S_n = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n}$.

1. Quelle est la loi de Y_n ?, son espérance ?, sa variance ?
2. Déterminer l'espérance et la variance de S_n.
3. Montrer :
   $\forall \epsilon > 0 \ \lim_{n\to+\infty} P(|S_n - 2p| \geq \epsilon) = 0$

Exercice 3 *(Ens 2016)*

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes.
On suppose :

- $\forall n \in \mathbb{N}^* \ E(X_n) = 0$
- $\exists M > 0$ tq $\forall n \in \mathbb{N}^* \ E(X_n^2) \leq M$

Soit $\epsilon > 0$.
A-t-on toujours $P(|X_1 + \cdots + X_n| \geq n\epsilon) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$?

Exercice 4 *(Ens 2023)*

On considère n points deux à deux distincts du plan ($n \geq 3$).
Soit E l'ensemble des parties $[\![1;n]\!]$ de cardinal 2.
On considère une famille $(X_e)_{e\in E}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes et suivant toutes la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0;1[$.
Si $X_e = 1$ alors on trace le segment joignant les points d'indice i et j où $e = \{i;j\}$.
Soient T_n le nombre de triangles et $a_n = p^3 \binom{n}{3}$.
Montrer que :
$\forall \epsilon > 0 \; P\left(\left|\frac{T_n}{a_n} - 1\right| > \epsilon\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$

2 Divers

Exercice 5 *(X 2023)*

1. Montrer :
   $\forall x \in \mathbb{R} \;\; \cosh(x) \leq \mathrm{e}^{x^2/2}$
2. Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes et suivant la loi uniforme sur $\{-1;1\}$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.
   Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+$, $P(|S_n| \geq \lambda) \leq 2\,\mathrm{e}^{-\lambda^2/(2n)}$

Exercice 6 *(CCP 2016)*

On dit que la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifie la propriété $(\star)$ lorsque pour tous entiers $n, m \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+m} \leq u_n + u_m$.

1. Soient $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $m \in \mathbb{N}^*$.
   Déterminer les variations de la fonction $g_{\alpha,m} : x \mapsto (x+m)^\alpha - x^\alpha - m^\alpha$ sur $\mathbb{R}_+$.
2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = n^\alpha$.
   Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifie $(\star)$ si et seulement si $\alpha \leq 1$.
   Dans ce cas, déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{v_n}{n}$.
3. Dans cette question seulement, on considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que pour tous $m, n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+m} = u_n + u_m$.
   Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite arithmétique et déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n}$.
4. Soit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifiant $(\star)$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Soit $\epsilon > 0$.
   (a) Montrer que pour tous $p, q \in \mathbb{N}^*$, $u_{pq} \leq p u_q$.
   (b) Montrer l'existence de $m = \inf\left\{\frac{u_k}{k} \;;\; k \in \mathbb{N}^*\right\}$, puis de $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{u_q}{q} \leq m + \frac{\epsilon}{2}$.
   (c) Soit $r \in [\![0;q-1]\!]$.
   Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $m \leq \frac{u_{pq+r}}{pq+r} \leq m + \frac{\epsilon}{2} + \frac{u_r}{pq+r}$
   (d) Montrer que $\frac{u_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} m$.

5. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires réelles discrètes indépendantes et identiquement distribuées.
   Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\overline{X_n} = \dfrac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$.
   Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.
   Montrer que $P(\overline{X_{n+m}} \geq x) \geq P(\overline{X_n} \geq x)P(\overline{X_m} \geq x)$ pour tous $n, m \in \mathbb{N}^*$.
   En déduire que la suite $\left((P(\overline{X_n} \geq x))^{1/n}\right)$ converge.