PROBABILITES
TD
2025-2026
Chapitre 4
Correction

941

# 1 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

**Exercice 1** *(Mines 2018)*

On effectue des tirages successifs et avec remise dans une urne contenant deux boules rouges et 3 boules noires.
Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $Y_i = 1$ si on tire une boule rouge au $i^{\text{ième}}$ tirage, 0 sinon.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $S_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$.

1. Montrer que $P\left(\left|\frac{S_n}{n} - E(Y_1)\right| \geq a\right) \leq \frac{V(Y_1)}{a^2 n}$ avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
2. Donner $n$ pour que la probabilité que la proportion de boules rouges tirées soit comprise entre $0,35$ et $0,45$ soit supérieure à $0,95$.

**Correction**

1. On applique l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à $\frac{S_n}{n}$.
   $E\left(\frac{S_n}{n}\right) = E(Y_1)$ (linéarité de l'espérance)
   $V\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{V(S_n)}{n^2} = \frac{V(Y_1)}{n}$ : indépendance des lancers dans le tirage avec remise.
   **Inégalité de Bienaymé-Tchebychev**
   Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.
   Soit $X$ une variable aléatoire réelle discrète telle que $X^2$ soit d'espérance finie.
   On a alors, en notant $m$ l'espérance de $X$ et $\sigma^2$ sa variance :
   $$\forall a > 0 \ P\left(|X - m| \geq a\right) \leq \frac{\sigma^2}{a^2}$$
2. $a$ vaut ici $0,05$.
   $V(Y_1) = 0,4 * 0,6 = 0,24$.
   On cherche $n$ tel que $\frac{0,24}{a^2 n} \leq 0,05$ ou encore $n \geq \frac{0,24}{0,05^3} = \frac{10^4 \times 24}{125} = 2^4 \times 5 \times 24 = 1920$.

**Exercice 2** *(CCP 2017)*

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes $\mathcal{B}(p)$ ($p \in ]0;1[$).

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $Y_n = X_n + X_{n+1}$ et $S_n = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n}$.

1. Quelle est la loi de $Y_n$ ?, son espérance ?, sa variance ?
2. Déterminer l'espérance et la variance de $S_n$.
3. Montrer :
   $\forall \epsilon > 0 \ \lim_{n\to+\infty} P\left(|S_n - 2p| \geq \epsilon\right) = 0$

**Correction**

1. $Y_n \hookrightarrow \mathcal{B}(2,p)$ (somme de deux Bernoulli indépendantes de même paramètre), $E(Y_n) = 2p$, $V(Y_n) = 2p(1-p)$
2. $E(S_n) = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(Y_i) = \dfrac{1}{n}\, n2p = 2p$
   **Attention :** les $Y_n$ ne sont pas indépendantes.
   Si $j \geq i+2$, $Y_i = X_i + X_{i+1}$ et $Y_j = X_j + X_{j+1}$ sont indépendantes par le lemme des coalitions.
   Par contre :

$$\begin{aligned}
Cov(Y_i, Y_{i+1}) &= E(Y_iY_{i+1}) - E(Y_i)E(Y_{i+1}) \\
&= E(X_iX_{i+1} + X_iX_{i+2} + X_{i+1}^2 + X_{i+1}X_{i+2}) - 4p^2 \\
&= E(X_iX_{i+1}) + E(X_iX_{i+2}) + E(X_{i+1}) + E(X_{i+1}X_{i+2}) - 4p^2 \\
&= 3p^2 + p - 4p^2 = p(1-p)
\end{aligned}$$

   On en déduit :

$$\begin{aligned}
V(S_n) &= \frac{1}{n^2}V(Y_1 + \cdots + Y_n) \\
&= \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} V(Y_i) + 2\sum_{i<j} Cov(Y_i, Y_j)\right) \\
&= \frac{1}{n^2}\left(2np(1-p) + 2\sum_{i=1}^{n-1} p(1-p)\right) \\
&= \frac{1}{n^2}\left(2np(1-p) + 2(n-1)p(1-p)\right) = \frac{p(1-p)}{n^2}\left(2n + 2(n-1)\right) \\
&= \frac{2p(1-p)(2n-1)}{n^2}
\end{aligned}$$

   On peut aussi procéder ainsi :
   $S_n = \dfrac{1}{n}\left(X_1 + 2\sum_{i=2}^{n} X_i + X_{n+1}\right)$
   et là il y a indépendance des termes de la somme.
   On en déduit :

$$\begin{aligned}
V(S_n) &= \frac{1}{n^2}\left(V(X_1) + 4\sum_{i=2}^{n} V(X_i) + V(X_{n+1})\right) \\
&= \frac{1}{n^2}\left(2 + 4(n-1)\right)V(X_1) = \frac{2p(1-p)(2n-1)}{n^2}
\end{aligned}$$

3. **Attention : la loi faible des grands nombres ne s'applique pas directement** (car les $Y_n$ ne sont pas indépendantes).
   On utilise BT :

$$\begin{aligned}\forall \epsilon > 0 \; P\left(|S_n - 2p| \geq \epsilon\right) &= P\left(|S_n - E(S_n)| \geq \epsilon\right) \\ &\leq \frac{V(S_n)}{\epsilon^2} = \frac{2p(1-p)(2n-1)}{n^2\epsilon^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\end{aligned}$$

**Exercice 3** *(Ens 2016)*

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes.
On suppose :
- $\forall n \in \mathbb{N}^* \; E(X_n) = 0$
- $\exists M > 0$ tq $\forall n \in \mathbb{N}^* \; E(X_n^2) \leq M$

Soit $\epsilon > 0$.
A-t-on toujours $P\left(|X_1 + \cdots + X_n| \geq n\epsilon\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ ?

**Correction**
C'est un raffinement de la loi faible des grands nombres. On peut considérer cet exercice comme une question de cours.
On note $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.
Par linéarité de l'espérance, $E(S_n) = 0$.
Par indépendance [1], $V(S_n) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i)$.
$V(X_i) = E(X_i^2) - E(X_i)^2 = E(X_i^2) \leq M$ donc $V(S_n) \leq nM$
On applique alors l'inégalité de Bienaymé-Tchebitcheff :

$$P\left(|X_1 + \cdots + X_n| \geq n\epsilon\right) = P\left(|S_n| \geq n\epsilon\right) \leq \frac{V(S_n)}{n^2\epsilon^2} \leq \frac{M}{n\epsilon^2}$$

On conclut facilement.

**Exercice 4** *(Ens 2023)*

On considère $n$ points deux à deux distincts du plan ($n \geq 3$).
Soit $E$ l'ensemble des parties $[\![1;n]\!]$ de cardinal 2.
On considère une famille $(X_e)_{e\in E}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes et suivant toutes la loi de Bernoulli de paramètre $p \in ]0;1[$.
Si $X_e = 1$ alors on trace le segment joignant les points d'indice $i$ et $j$ où $e = \{i;j\}$.
Soient $T_n$ le nombre de triangles et $a_n = p^3 \binom{n}{3}$.
Montrer que :
$\forall \epsilon > 0 \; P\left(\left|\frac{T_n}{a_n} - 1\right| > \epsilon\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

**Correction**
Luisa a commencé par chercher la loi de $T_n$. L'examinateur l'a arrêté et lui à demander de

1. L'indépendance deux à deux suffit

chercher autre chose : l'espérance.
Il s'agit typiquement d'écrire $T_n$ comme une somme d'indicatrices et d'utiliser la linéarité de l'espérance.
Soit $F$ l'ensemble des parties $[\![1;n]\!]$ de cardinal 3.

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{\{i,j,k\}\in F} 1_{X_{\{i,j\}}=1 \text{ et } X_{\{j,k\}}=1 \text{ et } X_{\{k,i\}}=1} \\ &= \sum_{\{i,j,k\}\in F} 1_{X_{\{i,j\}}=1} \times 1_{X_{\{j,k\}}=1} \times 1_{X_{\{k,i\}}=1} \\ &= \sum_{\{i,j,k\}\in F} X_{\{i,j\}}X_{\{j,k\}}X_{\{k,i\}} \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} E(T_n) &= \sum_{\{i,j,k\}\in F} E\left(X_{\{i,j\}}X_{\{j,k\}}X_{\{k,i\}}\right) \text{ par linéarité} \\ &= \sum_{\{i,j,k\}\in F} E\left(X_{\{i,j\}}\right) \times E\left(X_{\{j,k\}}\right) \times E\left(X_{\{k,i\}}\right) \text{ par indépendance} \\ &= \sum_{\{i,j,k\}\in F} p\times p\times p = p^3 \text{Card}(F) \\ &= p^3\binom{n}{3} \end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebyschev :

$$\begin{aligned} \forall \epsilon > 0 \; P\left(\left|\frac{T_n}{a_n} - 1\right| > \epsilon\right) &= P\left(|T_n - a_n| > a_n\epsilon\right) \\ &= P\left(|T_n - E(T_n)| > a_n\epsilon\right) \\ &\leq \frac{V(T_n)}{a_n^2\epsilon^2} \end{aligned}$$

$a_n = p^3\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6} \sim \dfrac{p^3n^3}{6}$.
Il s'agit donc de montrer que $V(T_n) = o\left(n^6\right)$.
Or :
$V(T_n) = \displaystyle\sum_{\{i,j,k\}\in F} V\left(X_{\{i,j\}}X_{\{j,k\}}X_{\{k,i\}}\right) + \sum_{\{i_1,j_1,k_1\}\times\{i_2,j_2,k_2\}\in F^2} Cov\left(X_{\{i_1,j_1\}}X_{\{j_1,k_1\}}X_{\{k_1,i_1\}}, X_{\{i_2,j_2\}}X_{\{j_2,k_2\}}X_{\{k_2,i_2\}}\right.$
Cela donne une somme de $N + N(N-1)$ termes où $N = \dbinom{n}{3}$ est le cardinal de $F$.

Cela fait $N^2 \sim \dfrac{n^6}{36}$ termes : c'est trop. En fait si $\{i_1;j_1;k_1\}$ et $\{i_2,j_2,k_2\}$ sont disjoints ou ont un seul point en commun alors les variables aléatoires $X_{\{i_1,j_1\}}X_{\{j_1,k_1\}}X_{\{k_1,i_1\}}$ et $X_{\{i_2,j_2\}}X_{\{j_2,k_2\}}X_{\{k_2,i_2\}}$ sont indépendantes et leur covariance est nulle.
Il reste donc dans la somme de droite les termes pour lesquels $\{i_1;j_1;k_1\} \cap \{i_2,j_2,k_2\}$ est de cardinal 2.
Cela donne $N_2 = \dbinom{n}{3} \times 3\dbinom{n-3}{1} \sim \dfrac{n^4}{2}$ termes.
La variance de $T_n$ qui est égale à

$$NV\left(X_{\{1,2\}}X_{\{2,3\}}X_{\{3,1\}}\right) + N_2 Cov\left(X_{\{1,2\}}X_{\{2,3\}}X_{\{3,1\}}, X_{\{1,2\}}X_{\{2,4\}}X_{\{4,1\}}\right)$$

est donc en $O\left(n^4\right)$.

## 2 Divers

**Exercice 5** *(X 2023)*

1. Montrer :
   $\forall x \in \mathbb{R} \ \cosh(x) \leq \mathrm{e}^{x^2/2}$
2. Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes et suivant la loi uniforme sur $\{-1;1\}$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.
   Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+$, $P(|S_n| \geq \lambda) \leq 2\,\mathrm{e}^{-\lambda^2/(2n)}$

**Correction**

1. $\forall x \in \mathbb{R} \ \cosh(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$
   avec pour $n \geq 1$, $(2n)! = \prod_{i=1}^{2n} i \geq \prod_{i=1}^{n} 2i = 2^n n!$.
   C'est vrai également pour $n = 0$ donc :
   $\forall x \in \mathbb{R} \ \cosh(x) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^{2n}}{2^n n!} = \mathrm{e}^{x^2/2}$
2. L'inégalité est triviale pour $\lambda = 0$ car à gauche on a une probabilité et à droite 2.
   Soit $\lambda > 0$.
   Soit $t > 0$, à choisir plus tard en fonction de $\lambda$.

$$\begin{array}{rcl}
P(S_n \geq \lambda) & = & P(tS_n \geq t\lambda) = P\left(\mathrm{e}^{tS_n} \geq \mathrm{e}^{t\lambda}\right) \\
& \leq & \dfrac{E\left(\mathrm{e}^{tS_n}\right)}{\mathrm{e}^{t\lambda}} = \mathrm{e}^{-t\lambda} E\left(\mathrm{e}^{\sum_{k=1}^{n} tX_k}\right) = \mathrm{e}^{-t\lambda} E\left(\prod_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{tX_k}\right) \\
& \leq & \mathrm{e}^{-t\lambda} \prod_{k=1}^{n} E\left(\mathrm{e}^{tX_k}\right) \text{ par indépendance} \\
& \leq & \mathrm{e}^{-t\lambda} \prod_{k=1}^{n} \left(\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{t} + \dfrac{1}{2}\mathrm{e}{-t}\right) \text{ par le théorème de transfert} \\
& \leq & \mathrm{e}^{-t\lambda} (\cosh(t))^n \\
& \leq & \mathrm{e}^{-t\lambda + nt^2/2}
\end{array}$$

   Soit $f \begin{cases} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ t \mapsto -t\lambda + nt^2/2 \end{cases}$.
   $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et :
   $\forall t \in \mathbb{R}_+ \ f'(t) = -\lambda + nt$.
   On en déduit que $f$ est minimale en $t = \dfrac{\lambda}{n}$.
   $f\left(\dfrac{\lambda}{n}\right) = -\dfrac{\lambda^2}{n} + \dfrac{\lambda^2}{2n} = -\dfrac{\lambda^2}{2n}$
   Donc $P(S_n \geq \lambda) \leq \mathrm{e}^{-\lambda^2/(2n)}$
   $-S_n = -\sum_{k=1}^{n} X_k = \sum_{k=1}^{n} (-X_k)$

$(-X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes et suivant la loi uniforme sur $\{-1;1\}$.
Donc $-S_n$ a la même loi que $S_n$.
Donc :
$P(S_n \leq -\lambda) = P(-S_n \geq \lambda) \leq \mathrm{e}^{-\lambda^2/(2n)}$
On conclut avec $(|S_n| \geq \lambda) = (S_n \geq \lambda) \cap (S_n \leq -\lambda)$ (union disjointe si $\lambda > 0$).

**Exercice 6** *(CCP 2016)*

On dit que la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifie la propriété $(\star)$ lorsque pour tous entiers $n, m \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+m} \leq u_n + u_m$.

1. Soient $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $m \in \mathbb{N}^*$.
   Déterminer les variations de la fonction $g_{\alpha,m} : x \mapsto (x+m)^\alpha - x^\alpha - m^\alpha$ sur $\mathbb{R}_+$.
2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = n^\alpha$.
   Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifie $(\star)$ si et seulement si $\alpha \leq 1$.
   Dans ce cas, déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{v_n}{n}$.
3. Dans cette question seulement, on considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que pour tous $m, n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+m} = u_n + u_m$.
   Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite arithmétique et déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{n}$.
4. Soit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifiant $(\star)$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Soit $\epsilon > 0$.
   (a) Montrer que pour tous $p, q \in \mathbb{N}^*$, $u_{pq} \leq p u_q$.
   (b) Montrer l'existence de $m = \inf\left\{\dfrac{u_k}{k}\ ;\ k \in \mathbb{N}^*\right\}$, puis de $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{u_q}{q} \leq m + \dfrac{\epsilon}{2}$.
   (c) Soit $r \in [\![0; q-1]\!]$.
   Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $m \leq \dfrac{u_{pq+r}}{pq+r} \leq m + \dfrac{\epsilon}{2} + \dfrac{u_r}{pq+r}$
   (d) Montrer que $\dfrac{u_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} m$.
5. Soit $(X_n)$ une suite de variables aléatoires réelles discrètes indépendantes et identiquement distribuées.
   Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\overline{X_n} = \dfrac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$.
   Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.
   Montrer que $P(\overline{X_{n+m}} \geq x) \geq P(\overline{X_n} \geq x)P(\overline{X_m} \geq x)$ pour tous $n, m \in \mathbb{N}^*$.
   En déduire que la suite $\left((P(\overline{X_n} \geq x))^{1/n}\right)$ converge.

**Correction**

1. $g_{\alpha,m}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ ($\alpha > 0$) et $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et :
   $\forall x > 0\ g'_{\alpha,m}(x) = \alpha(x+m)^{\alpha-1} - \alpha x^{\alpha-1} = \alpha\left((x+m)^{\alpha-1} - x^{\alpha-1}\right)$
   - Si $\alpha < 1$ alors $g_{\alpha,m}$ décroît strictement. Comme $g_{\alpha,m}(0) = 0$, $g_{\alpha,m}$ est strictement négative sur $\mathbb{R}_+^*$.
   - Si $\alpha = 1$, en revenant à la définition on voit que $g_{1,m}$ est la fonction nulle.
   - Si $\alpha > 1$ alors $g_{\alpha,m}$ croît strictement. Comme $g_{\alpha,m}(0) = 0$, $g_{\alpha,m}$ est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Si $\alpha > 1$ alors :
   $\forall (n,m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*\ (n+m)^\alpha - n^\alpha - m^\alpha = g_{\alpha,m}(n) > 0$
   $\forall (n,m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*\ (n+m)^\alpha > n^\alpha + m^\alpha$

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne vérifie pas $(\star)$ (un seul couple $(n,m)$ suffirait).
Si $\alpha = 1$ alors :
$\forall (n,m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*\ (n+m)^\alpha = n+m \leq n+m = n^\alpha + m^\alpha$
La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifie $(\star)$.
Si $\alpha < 1$ alors :
$\forall (n,m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*\ (n+m)^\alpha - n^\alpha - m^\alpha = g_{\alpha,m}(n) < 0$
$\forall (n,m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*\ (n+m)^\alpha < n^\alpha + m^\alpha$
La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifie $(\star)$.
D'où la première partie de la question.
$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{v_n}{n} = \begin{cases} 0 \text{ si } \alpha < 1 \\ 1 \text{ si } \alpha = 1 \end{cases}$

3. $\forall n \in \mathbb{N}^*\ u_{n+1} = u_n + u_1$
   $\forall n \in \mathbb{N}^*\ u_n = nu_1$
   $\frac{u_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} u_1$
4. (a) On fixe $q \in \mathbb{N}^*$.
   Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, soit $\mathcal{P}(p)$ : $u_{pq} \leq pu_q$.
   $\mathcal{P}(1)$ est triviale.
   On suppose $\mathcal{P}(p)$ vraie :
   $u_{(p+1)q} = u_{pq+q} \leq u_{pq} + u_q \leq pu_q + u_q = (p+1)u_q$
   Donc $\mathcal{P}(p+1)$ est vraie.
   On a donc :
   $\forall p \in \mathbb{N}_*\ u_{pq} \leq pu_q$
   où $q$ est quelconque.

   (b) Toute partie non vide et minorée (ici par 0) de $\mathbb{R}$ possède une borne inférieure, d'où l'existence de $m$.
   La borne inférieure d'une partie de $\mathbb{R}$ est le plus grand des minorants donc $m + \frac{\epsilon}{2}$ n'est pas un minorant et :
   $\exists q \in \mathbb{N}^*$ tq $\frac{u_q}{q} < m + \frac{\epsilon}{2}$

   (c) L'inégalité de gauche découle directement de la définition de $m$.
   A droite :
   $\frac{u_{pq+r}}{pq+r} \leq \frac{u_{pq}+u_r}{pq+r} \leq \frac{pu_q+u_r}{pq+r} \leq \frac{p}{pq}u_q + \frac{u_r}{pq+r} = \frac{u_q}{q} + \frac{u_r}{pq+r} \leq m + \frac{\epsilon}{2} + \frac{u_r}{pq+r}$
   On observera qu'a priori $u_0$ n'est pas défini. Le résultat précédent est valable en prenant $u_0 = 0$.

   (d) On note $M = \max(u_1, \ldots, u_{q-1})$.
   Compte tenu des propriétés de la division euclidienne :
   $\forall n \geq q\ m \leq \frac{u_n}{n} \leq m + \frac{\epsilon}{2} + \frac{M}{n}$.
   $\exists n_0 \geq q$ tq $\forall n \geq n_0\ \frac{M}{n} \leq \frac{\epsilon}{2}$
   On a donc :
   $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$ tq $\forall n \geq n_0\ m \leq \frac{u_n}{n} \leq m + \epsilon$

5. Si $X_1 + \cdots + X_n \geq nx$ et $X_{m+1} + \cdots + X_{n+m} \geq mx$ alors $X_1 + \cdots + X_{n+m} \geq (n+m)x$.
   En d'autres termes, si on note $\overline{Y} = \frac{X_{n+1} + \cdots + X_{n+m}}{m}$ alors :
   $(\overline{X_n} \geq x) \cap (\overline{Y} \geq x) \subset (\overline{X_{n+m}} \geq x)$

Donc $P(\overline{X_{n+m}} \geq x) \geq P\left((\overline{X_n} \geq x) \cap (\overline{Y} \geq x)\right)$.
Par le lemme des coalitions les évènements $(\overline{X_n} \geq x)$ et $(\overline{Y} \geq x)$ sont indépendants donc :
$P(\overline{X_{n+m}} \geq x) \geq P(\overline{X_n} \geq x)P(\overline{Y} \geq x)$
Mais $\overline{Y}$ a la même loi que $\overline{X_m}$ : ce n'est pas mentionné dans le programme mais clair.
En fait $(X_1, \ldots, X_m)$ et $(X_{n+1}, \ldots, X_{n+m})$ ont la même loi :

- $(X_1, \ldots, X_m)(\Omega) = (X_{n+1}, \ldots, X_{n+m})(\Omega)$ $(= X_1(\Omega)^m$ ici).
- Pour tout $(x_1, \ldots, x_m) \in (X_1, \ldots, X_m)(\Omega) = (X_{n+1}, \ldots, X_{n+m})(\Omega)$,
  $$P(X_1 = x_1, \ldots, X_m = x_m) = \prod_{i=1}^{m} P(X_i = x_i) = \prod_{i=1}^{m} P(X_1 = x_i)$$
  $$P(X_{n+1} = x_1, \ldots, X_{n+m} = x_m) = \prod_{i=1}^{m} P(X_{n+i} = x_i) = \prod_{i=1}^{m} P(X_1 = x_i)$$

Encore faudrait-il montrer que si $Z_1$ et $Z_2$ ont la même loi, $f(Z_1)$ et $f(Z_2)$ ont la même loi.
Cela paraît difficile sans famille sommable.
Le programme ne mentionne pas cette propriété.

En tous cas :
$P(\overline{X_{n+m}} \geq x) \geq P(\overline{X_n} \geq x)P(\overline{X_m} \geq x)$

- **Premier cas :** $P(X_1 \geq x) = 0$
  Cela se produit en particulier si $x > \sup X_1(\Omega)$ mais cela peut se produire pour d'autres valeurs de $x$ : on peut avoir $x \in X_1(\Omega)$ et $P(X_1 = x) = 0$.
  Si des nombres sont tous inférieurs à $x$ alors leur moyenne l'est aussi. En termes probabilistes :
  $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} (X_i < x) \subset (\overline{X_n} < x)$
  On en déduit par croissance :
  $\displaystyle P\left(\bigcap_{i=1}^{n} (X_i < x)\right) \leq P(\overline{X_n} < x)$
  puis par indépendance :
  $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} P(X_i < x) \leq P(\overline{X_n} < x)$
  et par équidistribution :
  $P(X_1 < x)^n \leq P(\overline{X_n} < x)$
  Mais $P(X_1 < x) = 1$ donc $P(\overline{X_n} < x) = 1$ et $P(\overline{X_n} \geq x) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
  On conclut facilement.
- **Deuxième cas :** $P(X_1 \geq x) > 0$.
  On montre comme dans le premier cas :
  $P(\overline{X_n} \geq x) \geq P(X_1 \geq x)^n > 0$
  On peut donc poser $u_n = -\ln\left(P(\overline{X_n} \geq x)\right)$
  $\forall (n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2 \; u_{n+m} \leq u_n + u_m$
  $\displaystyle\frac{u_n}{n} = -\ln\left(\left(P(\overline{X_n} \geq x)\right)^{1/n}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} l \in \mathbb{R}$
  On conclut facilement.