PROBABILITES
TD
2025-2026
Chapitre 5
Séries génératrices

941

Exercice 1

On jette un dé 10 fois.
Quelle est la probabilité que la somme des nombres obtenus soit 27 ?

Exercice 2 *(X 2023)*

Soient n et m deux entiers supérieurs ou égaux à 2.
On considère un dé à n faces numérotées de 1 à n et un dé à m faces numérotées de 1 à m qu'on jette simultanément.
Peut-on les piper pour que la somme des points obtenus sur les deux dés suivent une loi uniforme ?

Exercice 3 *(Mines 2023)*

1. Soit Y une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres n et p.
   Déterminer sa série génératrice.
2. Soient Y et Z deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que $U = Y + Z$ suive la loi binomiale de paramètres n et p.
   Montrer que Y et Z suivent également des lois binomiales.
3. Soit U une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres n et p.
   Soient l et m deux entiers tels que $P(U = l) > 0$, $P(U = m) > 0$ et $m \geq l + 3$.
   Soient $Y = \left\lfloor \dfrac{U}{2} \right\rfloor$ et $Z = \left\lfloor \dfrac{U+1}{2} \right\rfloor$.
   (a) Montrer que Y et Z ne sont pas indépendantes.
   (b) ?

Exercice 4 *(D'après Centrale 2017 Maths 2)*

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi :

(i) $X_1(\Omega) = \{-1; 1\}$

(ii) $P(X_1 = 1) = p$

(iii) $P(X_1 = -1) = 1 - p$ noté q

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $Y_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

1. Quelle est la loi de $\dfrac{Y_n + n}{2}$?
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}$, on pose $g_n(t) = E\left(\mathrm{e}^{-tY_n}\right)$.
   Montrer que $g_n(t) = \left(p\,\mathrm{e}^{-t} + q\,\mathrm{e}^{t}\right)^n$.
3. En utilisant l'inégalité de Markov, montrer :
   $\forall (n,t) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+ \; P(Y_n \leq 0) \leq g_n(t)$
4. On suppose $p > \dfrac{1}{2}$.
   Montrer que $P(Y_n \leq 0) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.
5. On suppose $p < \dfrac{1}{2}$.
   Montrer que $P(Y_n \leq 0) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$.

Exercice 5 *(D'après Centrale Maths 2 2017)*

Soit $(U_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant toutes la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$.

Pour $n \geq 1$, on pose $Y_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{U_k}{2^k}$, $Z_n = 2^n Y_n$ et $F_{Y_n}(x) = P(Y_n \leq x)$ $(x \in \mathbb{R})$.

1. Montrer que $P(Y_n \in [0;1]) = 1$.
2. Donner $E(Y_n)$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} E(Y_n)$.
3. Soit $x \in \mathbb{R}$.
   Etudier la monotonie de la suite $(F_{Y_n}(x))_{n \in \mathbb{N}}$.
   En déduire que la suite de fonctions $(F_{Y_n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.
4. Montrer que : $G_{Z_n}(t) = \dfrac{1}{2^n} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + t^{2^{n-k}}\right)$
5. En déduire que Z_n suit une loi uniforme.
6. Déterminer la limite simple de la suite de fonctions $(F_{Y_n})_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 6 *(X 2019)*

On lance n dés à six faces (non pipés).
Quelle est la probabilité que la somme des dés soit un multiple de 5 ?

Exercice 7 *(Centrale 2022, maths 1)*

Le temps est compté en secondes.
Une bactérie se trouve à $t = 0$ dans une enceinte fermée.
A $t = 1$, on effectue un tir de laser et on recommence toutes les secondes.
La bactérie a une probabilité $p \in]0;1[$ d'être touchée.
La bactérie meurt si elle est touchée r fois $(r \in \mathbb{N}^*)$.
Soit X la variable aléatoire qui donne la durée de vie de la bactérie.

1. Trouver la loi de X.

2. Prouver que X a une espérance et la calculer.

Exercice 8 *(D'après Centrale 2015 maths 2)*

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $(U_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes et de même loi uniforme sur $[\![1; N]\!]$. Pour n entier non nul, on note

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} U_i \text{ et } V_n = \frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} \text{ avec } m = E(U_1) \text{ et } \sigma = \sqrt{V(U_1)}$$

Soit X une variable aléatoire avec $X(\Omega)$ fini. On pose :

$$\forall t \in \mathbb{R}\ M_X(t) = E\left(\mathrm{e}^{tX}\right)$$

1. Préciser $E(U_1)$, $V(U_1)$ et une expression de la fonction génératrice G_{U_1}.
2. Exprimer la fonction génératrice G_{S_n} en fonction de G_{U_1}.
3. Montrer :
   $\forall t \in \mathbb{R}\ M_{V_n}(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}^{t^2/2}$