PROBABILITES
TD
2025-2026
Chapitre 5
Correcction

941

Exercice 1

On jette un dé 10 fois.
Quelle est la probabilité que la somme des nombres obtenus soit 27 ?

Correction
On note X_i le résultat du $i^{\text{ième}}$ lancer.
$X_i \hookrightarrow \mathbb{U}(\llbracket 1;6 \rrbracket)$.
Les X_i sont mutuellement indépendantes.
On note $S = X_1 + \cdots + X_{10}$.
On cherche $P(S=27)$.
C'est le coefficient de t^{27} dans $G_S(t)$.
Le rayon de convergence est infini et :
$G_S(t) = G_{X_1+\cdots+X_{10}}(t) = G_{X_1}(t)\dots G_{X_{10}}(t) = G_{X_1}(t)^{10}$
$G_{X_1}(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{6} \frac{1}{6}\, t^k = \frac{t}{6} \sum_{k=0}^{5} t^k = \frac{t}{6}\, \frac{1-t^6}{1-t}$ si $t \neq 1$
Donc, pour tout $t \in]-1;1[$:
$G_S(t) = \dfrac{1}{6^{10}}\, t^{10}\,(1-t^6)^{10}\,(1-t)^{-10}$
On cherche le coefficient de t^{17} dans $(1-t^6)^{10}\,(1-t)^{-10}$
$(1-t^6)^{10} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k\, t^k$ $(R=+\infty)$
$(1-t)^{-10} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \beta_k\, t^k$ $(R=1)$
Le coefficient de t^{17} est :

$\sum_{k=0}^{17} \alpha_k \, \beta_{17-k} = \alpha_0\beta_{17} + \alpha_6\beta_{11} + \alpha_{12}\beta_5$ car α_k est nul si k n'est pas un multiple de 6.

$$\begin{aligned} \beta_k &= \frac{(-10)\times(-11)\times\cdots\times(-10-k+1)}{k!}(-1)^k \\ &= (-1)^k \frac{(9+k)\ldots 10}{k!}(-1)^k = \frac{(k+9)!}{9!\,k!} \\ &= \binom{k+9}{9} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(S=27) &= \left(\frac{1}{6}\right)^{10}\left(\binom{26}{9} - 10\binom{20}{9} + \binom{10}{2}\binom{14}{9}\right) \\ &= \frac{2665}{104976} \simeq 0,025 \end{aligned}$$

Exercice 2 *(X 2023)*

Soient n et m deux entiers supérieurs ou égaux à 2.
On considère un dé à n faces numérotées de 1 à n et un dé à m faces numérotées de 1 à m qu'on jette simultanément.
Peut-on les piper pour que la somme des points obtenus sur les deux dés suivent une loi uniforme ?

Correction
Soit Z le résultat du dé à n faces et Y celui du dé à m faces.
On considère qu'on peut fixer arbitrairement la distribution de probabilité de Z et de Y :
$p_1,\ldots,p_n \in \mathbb{R}_+$, $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$, pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, $P(Z=k) = p_k$
$q_1,\ldots,q_m \in \mathbb{R}_+$, $\sum_{k=1}^{m} q_k = 1$, pour tout $k \in [\![1;m]\!]$, $P(Y=k) = q_k$
On suppose que $Z+Y$ suit la loi uniforme sur $[\![2;n+m]\!]$.
Z et Y sont indépendantes donc $G_{Z+Y} = G_Z G_Y$
$\forall x \in \mathbb{R}\ G_Z(x) = \sum_{k=1}^{n} p_k x^k$
$\forall x \in \mathbb{R}\ G_Y(x) = \sum_{k=1}^{m} q_k x^k$
$\forall x \in \mathbb{R}\ G_{Z+Y}(x) = \sum_{k=2}^{n+m} \frac{1}{n+m-1} x^k$
On a donc une égalité entre polynômes :
$\sum_{k=2}^{n+m} \frac{1}{n+m-1} X^k = \left(\sum_{k=1}^{n} p_k X^k\right)\left(\sum_{k=1}^{m} q_k X^k\right)$
Le coefficient de X^{n+m} donne $\frac{1}{n+m-1} = p_n q_m$ donc $p_n > 0$ et $q_m > 0$
Si n est pair, $n-1$ est impair et le polynôme $\sum_{k=1}^{n} p_k X^{k-1} = \sum_{l=0}^{n-1} p_{l+1} X^l$ a au moins une racine

réelle (en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires).
Par conséquent, le polynôme $P = \sum_{k=1}^{n} p_k X^k$ a au moins deux racines réelles (comptées avec leurs multiplicités).
De même si m est pair, $Q = \sum_{k=1}^{m} q_k X^k$ a au moins deux racines réelles (comptées avec leurs multiplicités).
Donc si n et m sont tous les deux pairs, le polynôme de droite a au moins 4 racines réelles (comptées avec leurs multiplicités).
Mais à gauche, $\sum_{k=2}^{n+m} \frac{1}{n+m-1} X^k = \frac{X^2(X^{n+m-1}-1)}{(n+m-1)(X-1)}$ a une seule racine réelle : 0 de multiplicité 2 donc on aboutit à une contradiction.
Le cas de deux dés à 6 faces est donc réglé.
Mais je ne vois pas comment traiter les autres cas par cette méthode.
On revient au cas général (on ne suppose plus rien sur la parité de n et de m).
Le coefficient de X^{n+1} donne $p_n q_1 + p_{n-1} q_2 + \cdots + p_1 q_n = \frac{1}{n+m-1}$ avec la convention $q_l = 0$ si $l > m$.
Donc $p_n q_m = p_n q_1 + p_{n-1} q_2 + \cdots + p_1 q_n \geq p_n q_1$ et $q_m \geq q_1$.
De même $p_n \geq p_1$.
Le coefficient de X^2 donne $p_1 q_1 = \frac{1}{n+m-1}$
Donc $p_1 q_1 = p_n q_m$ avec $0 < p_1 \leq p_n$ et $0 < q_1 \leq q_m$
Donc $p_1 = p_n$ et $q_1 = q_m$.
Donc $p_n q_1 = p_n q_m = p_n q_1 + p_{n-1} q_2 + \cdots + p_1 q_n$
On en déduit $p_{n-1} q_2 + \cdots + p_1 q_n = 0$ puis $p_{n-1} q_2 = \cdots = p_1 q_n = 0$.
Si on ajoute l'hypothèse : $p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_m > 0$ ie il n'y a aucune face presque sûrement impossible, on a aboutit à une contradiction.
Par contre si les p_i et les q_j peuvent être nuls c'est possible :
$\frac{X^{15}-1}{X-1} = \frac{X^{15}-1}{X^5-1} \times \frac{X^5-1}{X-1}$
Donc :
$\sum_{k=0}^{14} X^k = \left(1 + X^5 + X^{10}\right) \times \left(1 + X + X^2 + X^3 + X^4\right)$
Avec $n = 11$ et $m = 5$ on a $n + m - 1 = 15 = 3 \times 5$ donc :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n+m} \frac{1}{n+m-1} X^k &= \frac{1}{15} \sum_{k=2}^{16} X^k = \frac{1}{15} \left(X + X^6 + X^{11}\right) \times \left(X + X^2 + X^3 + X^4 + X^5\right) \\
&= \left(\frac{1}{3}X + \frac{1}{3}X^6 + \frac{1}{3}X^{11}\right) \times \left(\frac{1}{5}X + \frac{1}{5}X^2 + \frac{1}{5}X^3 + \frac{1}{5}X^4 + \frac{1}{5}X^5\right)
\end{aligned}$$

Essayons d'obtenir tous les cas possibles.
Les facteurs irréductibles de $\frac{P}{X}$ et de $\frac{Q}{X}$ sont de la forme $X+1$ ou $X^2 - aX + 1$ (les racines complexes non réelles de P et de Q sont de module 1).
$X\left(\frac{1}{X} + 1\right) = X + 1$ et $X^2\left(\frac{1}{X^2} - a\frac{1}{X} + 1\right) = 1 - aX + X^2$

Donc $X^{n-1}\dfrac{P\left(\dfrac{1}{X}\right)}{1/X} = \dfrac{P(X)}{X}$.
On en déduit : $X^{n+1}P\left(\dfrac{1}{X}\right) = P(X)$ ie $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} p_k X^{n+1-k} = \sum_{k=1}^{n} p_k X^k$ ou encore
$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} p_{n+1-k}X^k = \sum_{k=1}^{n} p_k X^k$ puis :
$\forall k \in [\![1;n]\!]\ p_{n+1-k} = p_k$
De même :
$\forall k \in [\![1;m]\!]\ q_{m+1-k} = q_k$

$p_{n-1}q_2 = 0$ donc $p_{n-1} = 0$ ou $q_{m-1} = 0$.
On peut supposer sans perte de généralité que $p_{n-1} = 0$.
Le coefficient de X^{n+m-1} est $p_{n-1}q_m + p_n q_{m-1} = p_n q_m$ donc $q_{m-1} = q_m$.
$p_{n-2}q_3 = 0$ donc $p_{n-2} = 0$ ou $q_3 = 0$.
Si $p_{n-2} = 0$ alors $q_{m-2} = q_m$
On aboutit donc à $P = p_1 X + p_l X^l + ? + p_{n+1-l}X^{n+1-l} + p_n X^n$ et $Q = q_1 X + \cdots + q_1 X^{l-1} + 0X^l + ? + 0X^{m+1-l} + q_1 X^{m+2-l} \cdots + q_m X^m$
Quand on fait le produit PQ, $p_1 XQ$ contribue pour $\dfrac{1}{n+m-1}(X^2 + \cdots + X^l + 0X^{l+1} + ? + 0X^{m+2-l} + q_1 X^{m+1-l} + \dots)$
La seule contribution à X^{l+1} vient de $p_l X^l$ donc $p_l = p_1$.
Comme il ne doit pas y avoir de chevauchement entre p_1XQ, $p_l X^l Q$ et les autres on a :
$Q = q_1(X + \cdots + X^m) = q_1 X\dfrac{X^{m-1}-1}{X-1}$
et $P = p_1 X(1 + X^m + X^{2m} + \cdots + X^{n-1})$
Il apparaît donc nécessaire que $n-1$ soit un multiple de m (si $m \leq n-1$).
On retrouve l'exclusion du cas n et m pairs.
Réciproquement, si $n - 1 = km$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n+m-1}\sum_{k=2}^{n+m} X^k &= \frac{1}{n+m-1}X^2\frac{X^{n+m-1}-1}{X-1}\\
&= \frac{1}{(k+1)m}X^2\frac{X^{(k+1)m}-1}{X-1}\\
&= \frac{1}{(k+1)m}X^2\frac{X^{(k+1)m}-1}{X^m-1}\frac{X^m-1}{X-1}\\
&= \left(\frac{1}{k+1}(X + X^{m+1} + \cdots + X^{km+1=n})\right) \times \left(\frac{1}{m}(X + X^2 + \cdots + X^m)\right)
\end{aligned}$$

La réponse est donc :
oui si et seulement si m divise $n-1$ (en supposant sans perte de généralité $m \leq n$)

Exercice 3 *(Mines 2023)*

1. Soit Y une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres n et p.
   Déterminer sa série génératrice.
2. Soient Y et Z deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que $U = Y + Z$ suive la loi binomiale de paramètres n et p.
   Montrer que Y et Z suivent également des lois binomiales.

3. Soit U une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres n et p.
   Soient l et m deux entiers tels que $P(U=l)>0$, $P(U=m)>0$ et $m \geq l+3$.
   Soient $Y = \left\lfloor \dfrac{U}{2} \right\rfloor$ et $Z = \left\lfloor \dfrac{U+1}{2} \right\rfloor$.
   (a) Montrer que Y et Z ne sont pas indépendantes.
   (b) ?

Correction

1. C'est du cours.
   $\forall t \in \mathbb{R}\ G_Y(t) = (1-p+py)^n$
2. $U(\Omega) = [\![0;n]\!]$ et Y et Z sont à valeurs dans $\mathbb{N}$ donc $Y(\Omega)$ et $Z(\Omega)$ sont inclus dans $[\![0;n]\!]$.
   On en déduit que G_Y et G_Z sont polynômiales.
   Y et Z sont indépendantes donc $G_U = G_Y \times G_Z$ (l'examinatrice a demandé de démonter cette formule, c'est du cours).
   Si z est une racine complexe de G_Y alors z est racine de G_U donc $z = \dfrac{p-1}{p}$.
   D'après le théorème de d'Alembert-Gauss, il existe $k \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{C}^*$ tels que :
   $\forall t \in \mathbb{R}\ G_Y(t) = a\left(t - \dfrac{p-1}{p}\right)^k$
   Mais $G_Y(1) = 1$ donc $a = \dfrac{1}{\left(1-\dfrac{p-1}{p}\right)^k} = p^k$
   On en déduit :
   $\forall t \in \mathbb{R}\ G_Y(t) = (pt+1-p)^k$
   Donc Y suit la loi binomiale de paramètres k et p (si $k=0$ alors Y est presque sûrement constante égale à 0).
   Y et Z jouant des rôles symétriques, Z suit la loi binomiale de paramètres l et p.
   $E(U) = E(Y) + E(Z)$ donne $np = kp + lp$ donc $l = n-k$.
3. (a) Supposons Y et Z indépendantes.
   $Y + Z = \dfrac{U}{2} + \dfrac{U}{2} = U$ si U est pair.
   $Y + Z = \dfrac{U-1}{2} + \dfrac{U+1}{2} = U$ si U est impair.
   Donc $Y \sim \mathcal{B}(k,p)$ et $Z \sim \mathcal{B}(n-k,p)$ avec $k \in [\![1;n]\!]$.
   Or $Y \leq Z$ donc $P\left((Y=1)\cap(Z=0)\right) = 0$.
   Donc $P(Y=1)P(Z=0) = 0$.
   Mais $P(Z=0) = (1-p)^{n-k} > 0$ (on suppose $p \in]0;1[$) donc $P(Y=1) = 0$.
   Donc $k=0$ et $Y=0$ ps.
   Donc $U \in \{0;1\}$ ps.
   Donc $n=1$.
   Réciproquement si $n=1$, U suit en fait une loi de Bernoulli de paramètre p.
   $Y=0$ ps et $Z=U$.
   Z et Y sont bien indépendantes dans ce cas :
   $$\begin{aligned}\forall (y,z) \in Y(\Omega)\times Z(\Omega) = \{0\}\times\{0;1\}\ P(Y=y, Z=z) &= P(Z=z)\\ &= P(Y=y)P(Z=z)\end{aligned}$$
   (b)

Exercice 4 *(D'après Centrale 2017 Maths 2)*

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi :

(i) $X_1(\Omega) = \{-1; 1\}$

(ii) $P(X_1 = 1) = p$

(iii) $P(X_1 = -1) = 1 - p$ noté q

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $Y_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.

1. Quelle est la loi de $\dfrac{Y_n + n}{2}$?
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}$, on pose $g_n(t) = E\left(\mathrm{e}^{-tY_n}\right)$.
   Montrer que $g_n(t) = \left(p\,\mathrm{e}^{-t} + q\,\mathrm{e}^{t}\right)^n$.
3. En utilisant l'inégalité de Markov, montrer :
   $\forall (n,t) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+ \; P(Y_n \leq 0) \leq g_n(t)$
4. On suppose $p > \dfrac{1}{2}$.
   Montrer que $P(Y_n \leq 0) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
5. On suppose $p < \dfrac{1}{2}$.
   Montrer que $P(Y_n \leq 0) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

Correction

1. $\dfrac{Y_n + n}{2} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1 + X_k}{2}$
   Les variables aléatoires $\dfrac{1+X_k}{2}$ sont indépendantes et suivent $\mathcal{B}(p)$.
   $B_n = \dfrac{Y_n + n}{2} \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$.
   On peut en déduire la loi de $Y_n = 2B_n - n$:
   - $Y_n(\Omega) = \{2k - n, k \in [\![0; n]\!]\}$.
   - $\forall k \in [\![0; n]\!] \; P(Y_n = 2k - n) = P\left(\dfrac{Y_n + n}{2} = k\right) = \dbinom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$
2. Plusieurs méthodes sont possibles :
   - Par le théorème de transfert :

$$\begin{aligned}
E\left(\mathrm{e}^{-tY_n}\right) &= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{-t(2k-n)} P(Y_n = 2k-n) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{-t(2k-n)} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{nt}\,\mathrm{e}^{-2kt} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \mathrm{e}^{nt} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(p\,\mathrm{e}^{-2t}\right)^k q^{n-k} = \mathrm{e}^{nt}\left(p\,\mathrm{e}^{-2t} + q\right)^n \\
&= \left(p\,\mathrm{e}^{-t} + q\,\mathrm{e}^{t}\right)^n
\end{aligned}$$

   - En utilisant la série génératrice d'une variable aléatoire qui suit une loi binomiale :
     La série génératrice d'une loi de Bernoulli de paramètre p est $q + pt$.

La série génératrice d'une loi binomiale de paramètres n et p est $(q+pt)^n$.

$$\begin{aligned}
g_n(t) &= E\left(\mathrm{e}^{-tY_n}\right) = E\left(\mathrm{e}^{-t(2B_n-n)}\right) = \mathrm{e}^{nt}E\left(\left(\mathrm{e}^{-2t}\right)^{B_n}\right) \\
&= \mathrm{e}^{nt}G_{B_n}\left(\mathrm{e}^{-2t}\right) = \mathrm{e}^{nt}\left(q+p\,\mathrm{e}^{-2t}\right)^n \\
&= \left(p\,\mathrm{e}^{-t}+q\,\mathrm{e}^{t}\right)^n
\end{aligned}$$

- En utilisant les propriétés de l'espérance :

$$\begin{aligned}
E\left(\mathrm{e}^{-tY_n}\right) &= E\left(\mathrm{e}^{-t\sum\limits_{i=1}^{n}X_i}\right) = E\left(\prod_{i=1}^{n}\mathrm{e}^{-tX_i}\right) \\
&= \prod_{i=1}^{n}E\left(\mathrm{e}^{-tX_i}\right) \text{ par indépendance} \\
&= \prod_{i=1}^{n}\left(\mathrm{e}^{-t}P(X_i=1)+\mathrm{e}^{t}P(X_i=-1)\right) \\
&= \prod_{i=1}^{n}\left(p\,\mathrm{e}^{-t}+q\,\mathrm{e}^{t}\right) \\
&= \left(p\,\mathrm{e}^{-t}+q\,\mathrm{e}^{t}\right)^n
\end{aligned}$$

On peut aussi s'en sortir avec $\mathrm{e}^{-tY_n}=\prod\limits_{k=1}^{n}\mathrm{e}^{-tX_k}$ et l'indépendance.

3. L'inégalité est triviale pour $t=0$: $P(Y_n\leq 0)\leq 1$.
Pour $t>0$:

$$\begin{aligned}
P(Y_n\leq 0) &= P(tY_n\leq 0) \text{ car } t>0 \\
&= P\left(\mathrm{e}^{-tY_n}\geq 1\right) \\
&\leq \frac{E\left(\mathrm{e}^{-tY_n}\right)}{1} \text{ par Markov} \\
&\leq g_n(t)
\end{aligned}$$

On peut aussi, sur le modèle de la démonstration de l'inégalité de Markov, commencer par prouver que pour $t>0$, $\mathrm{e}^{-tY_n}\geq 1_{Y_n\leq 0}$. On conclut ensuite avec la croissance de l'espérance.

4. Comme $g_n=g_1^n$, on étudie les variations de g_1.

$$\begin{aligned}
\forall t\in\mathbb{R}\ g_1(t) &= p\,\mathrm{e}^{-t}+q\,\mathrm{e}^{t} \\
g'(t) &= -p\,\mathrm{e}^{-t}+q\,\mathrm{e}^{t} = q\,\mathrm{e}^{-t}\left(\mathrm{e}^{2t}-\frac{p}{q}\right)
\end{aligned}$$

Soit $t_m=\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{p}{q}\right)>0$ car $p>\dfrac{1}{2}$.
$\forall t<t_m\ g_1'(t)<0$: g_1 décroît strictement sur $]-\infty;t_m]$
$\forall t>t_m\ g_1'(t)>0$: g_1 croît strictement sur $[t_m;+\infty[$.
On en déduit que g_1 est minimale en t_m.

Le minimum de g_1 est alors :
$g_1(t_m) = p\sqrt{\frac{q}{p}} + q\sqrt{\frac{p}{q}} = 2\sqrt{pq} = 2\sqrt{p(1-p)}$
On en déduit en étudiant les variations de $p \mapsto p(1-p)$:
$A = \min_{t\in\mathbb{R}_+} g_1(t) < 1$.
On conclut facilement :
$P(Y_n \leq 0) \leq A^n$
Remarque
On peut traiter cette question en utilisant la loi faible des grands nombres :

$$\begin{aligned}(Y_n \leq 0) &= \left(\frac{Y_n}{n} \leq 0\right)\\ &= \left(\frac{Y_n}{n} \leq p - q - \epsilon\right) \text{ avec } \epsilon = p - q > 0\\ &= \left(\frac{Y_n}{n} - E(X_1) \leq -\epsilon\right)\\ &\subset \left(\left|\frac{Y_n}{n} - E(X_1)\right| \geq \epsilon\right)\end{aligned}$$

5. On pose $X'_n = -X_n$.
$(X'_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi :
(i) $X'_1(\Omega) = \{-1; 1\}$
(ii) $P(X'_1 = 1) = q$
(iii) $P(X'_1 = -1) = p$
$q > \frac{1}{2}$ donc d'après ce qui précède :
$P\left(\sum_{k=1}^{n} X'_k \leq 0\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
On en déduit : $P\left(\sum_{k=1}^{n} X'_k < 0\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
Mais $P\left(\sum_{k=1}^{n} X'_k < 0\right) = P\left(\sum_{k=1}^{n} X_k > 0\right) = 1 - P(Y_n \leq 0)$ donc :
$P(Y_n \leq 0) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

Exercice 5 *(D'après Centrale Maths 2 2017)*

Soit $(U_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant toutes la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.
Pour $n \geq 1$, on pose $Y_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{U_k}{2^k}$, $Z_n = 2^n Y_n$ et $F_{Y_n}(x) = P(Y_n \leq x)$ $(x \in \mathbb{R})$.

1. Montrer que $P(Y_n \in [0; 1]) = 1$.
2. Donner $E(Y_n)$ et $\lim_{n\to+\infty} E(Y_n)$.
3. Soit $x \in \mathbb{R}$.
Etudier la monotonie de la suite $(F_{Y_n}(x))_{n\in\mathbb{N}}$.
En déduire que la suite de fonctions $(F_{Y_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

4. Montrer que : $G_{Z_n}(t) = \dfrac{1}{2^n} \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + t^{2^{n-k}}\right)$
5. En déduire que Z_n suit une loi uniforme.
6. Déterminer la limite simple de la suite de fonctions $(F_{Y_n})_{n\in\mathbb{N}}$.

Correction

1. $0 \leq Y_n \leq \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = 1$
   $(Y_n \in [0;1])$ est l'évènement certain donc $P(Y_n \in [0;1]) = 1$.
2. $E(Y_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{E(U_k)}{2^k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{4} \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$
   $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} E(Y_n) = \frac{1}{2}$
3. $Y_n \leq Y_{n+1}$ donc $(Y_{n+1} \leq x) \subset (Y_n \leq x)$ et $P(Y_{n+1} \leq x) \leq P(Y_n \leq x)$.
   La suite $(F_{Y_n}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée (par 0) donc elle converge.
   On en déduit que la suite de fonctions $(F_{Y_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.
   On note F sa limite.
   Remarques
   - $\forall x < 0\ F_{Y_n}(x) = 0$ donc $F(x) = 0$
   - $\forall x \geq 1\ F_{Y_n}(x) = 1$ donc $F(x) = 1$
   - Par continuité décroissante :
     $\forall x \in \mathbb{R}\ F(x) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} P(Y_n \leq x) = P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} (Y_n \leq x)\right) = P\left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{U_k}{2^k} \leq x\right)$
4. $Z_n = 2^n Y_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2^{n-k} U_k$ prend ses valeurs dans $[\![0; 2^n - 1]\!]$ donc G_{Z_n} est définie sur $\mathbb{R}$.
   Les variables aléatoires $2^{n-k}U_k$ étant indépendantes (et à valeurs dans $\mathbb{N}$) :
   $$\begin{aligned} G_{Z_n}(t) &= \prod_{k=1}^{n} G_{2^{n-k}U_k}(t) = \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} t^{2^{n-k}}\right) = \frac{1}{2^n} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + t^{2^{n-k}}\right) \\ &= \frac{1}{2^n} \prod_{l=0}^{n-1} \left(1 + t^{2^l}\right) \end{aligned}$$
5. Il s'agit de montrer que Z_n suit la loi uniforme sur $[\![0; 2^n - 1]\!]$, ou ce qui revient au même :
   $\forall t \in \mathbb{R}\ G_{Z_n}(t) = \dfrac{1}{2^n} \displaystyle\sum_{k=0}^{2^n-1} t^k$
   On raisonne par récurrence sur n.
   C'est trivial pour $n = 1$.

On suppose que c'est vrai au rang n.

$$\begin{aligned}
G_{Z_{n+1}}(t) &= \frac{1}{2^{n+1}}\prod_{l=0}^{n}\left(1+t^{2^l}\right) = G_{Z_n}(t)\times\frac{1}{2}\left(1+t^{2^n}\right)\\
&= \frac{1}{2^{n+1}}\left(1+t^{2^n}\right)\sum_{k=0}^{2^n-1}t^k = \frac{1}{2^{n+1}}\left(\sum_{k=0}^{2^n-1}t^k+\sum_{k=0}^{2^n-1}t^{2^n+k}\right)\\
&= \frac{1}{2^{n+1}}\left(\sum_{k=0}^{2^n-1}t^k+\sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1}t^k\right)\\
&= \frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=0}^{2^{n+1}-1}t^k
\end{aligned}$$

et la propriété est vraie au rang $n+1$.

Remarque
Le recours aux séries génératrices n'est pas utile mais fournit aux examinateurs l'occasion d'interroger sur ce sujet.
On peut utiliser la décomposition en base 2 et son unicité.
Soit x un entier compris entre 0 et 2^n-1.
x s'écrit de manière unique $x=\sum_{k=0}^{n-1}c_k2^k$ avec $c_k=0$ ou 1.
$(Z_n=x)=\left(\sum_{k=1}^{n}2^{n-k}U_k=x\right)=\left(\sum_{l=0}^{n-1}2^lU_{n-l}=\sum_{k=0}^{n-1}c_k2^k\right)=\bigcap_{k=0}^{n-1}(U_{n-k}=c_k)$ de probabilité $\frac{1}{2^n}$ par indépendance.

6. Soit $x\in]0;1[$.

$$\begin{aligned}
F_{Y_n}(x) &= P(Y_n\leq x)=P(Z_n\leq 2^nx)=\sum_{l=0}^{\lfloor 2^nx\rfloor}P(Z_n=l)\\
&= \frac{\lfloor 2^nx\rfloor+1}{2^n}\sim\frac{2^nx}{2^n}=x
\end{aligned}$$

Le même calcul donne $F_{Y_n}(0)=\frac{\lfloor 2^n0\rfloor+1}{2^n}=\frac{1}{2^n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0=x$ (l'équivalent du numérateur diffère car 2^nx ne tend pas vers l'infini).

Exercice 6 *(X 2019)*

On lance n dés à six faces (non pipés).
Quelle est la probabilité que la somme des dés soit un multiple de 5 ?

Correction
Soit X_i le résultat du ième dé.
Les X_i sont mutuellement indépendantes et suivent la loi uniforme sur $[\![1;6]\!]$.
$G_{X_i}(1)=1$ et :

$$\forall t\neq 1\ G_{X_i}(t) = \sum_{k=1}^{6}\frac{1}{6}t^k=\frac{t}{6}\sum_{l=0}^{5}t^l=\frac{t}{6}\frac{1-t^6}{1-t}$$

La somme est dés est $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.
$\forall z \in \mathbb{C}\ G_{S_n}(z) = (G_{X_1}(z))^n$.
On cherche :
$P(5 \text{ divise } S_n) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(S_n = 5k)$.
Soit $\omega = \mathrm{e}^{2i\pi/5}$.

$$\begin{aligned} \forall N \in \mathbb{N}\ \sum_{k=0}^{4} \left(\omega^k\right)^N &= \sum_{k=0}^{4} \omega^{kN} = \sum_{k=0}^{4} \left(\omega^N\right)^k \\ &= 5 \text{ si } N \text{ est un multiple de } 5 \\ &= \frac{1-\omega^{5N}}{1-\omega^N} = 0 \text{ sinon} \end{aligned}$$

On en déduit :
$\sum_{k=0}^{4} G_{S_n}(\omega^k) = 5P(5 \text{ divise } S_n)$
Mais :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{4} G_{S_n}(\omega^k) &= 1 + \sum_{k=1}^{4} \left(\frac{\omega^k}{6} \frac{1-\omega^{6k}}{1-\omega^k}\right)^n \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{4} \left(\frac{\omega^k}{6} \frac{1-\omega^{k}}{1-\omega^k}\right)^n \text{ car } \omega^{5k} = 1 \\ &= 1 + \frac{1}{6^n} \sum_{k=1}^{4} \omega^{nk} \end{aligned}$$

Dans un premier temps, on suppose que n n'est pas un multiple de 5.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{4} G_{S_n}(\omega^k) &= 1 + \frac{1}{6^n} \omega^n \frac{1-\omega^{4n}}{1-\omega^n} \\ &= 1 + \frac{1}{6^n} \frac{\omega^n - \omega^{5n}}{1-\omega^n} = 1 + \frac{1}{6^n} \frac{\omega^n - 1}{1-\omega^n} \\ &= 1 - \frac{1}{6^n} \end{aligned}$$

Par contre, si n est un multiple de 5 :

$$\sum_{k=0}^{4} G_{S_n}(\omega^k) = 1 + \frac{1}{6^n} \times 4$$

La probabilité cherchée est donc $\frac{1}{5}\left(1 - \frac{1}{6^n}\right)$ si n n'est pas un multiple de 5 et $\frac{1}{5}\left(1 + \frac{4}{6^n}\right)$ si n est un multiple de 5.
La probabilité cherchée converge donc rapidement vers $\frac{1}{5}$, ce qui est assez naturel.

Exercice 7 *(Centrale 2022, maths 1)*

Le temps est compté en secondes.
Une bactérie se trouve à $t = 0$ dans une enceinte fermée.
A $t = 1$, on effectue un tir de laser et on recommence toutes les secondes.
La bactérie a une probabilité $p \in]0;1[$ d'être touchée.
La bactérie meurt si elle est touchée r fois ($r \in \mathbb{N}^*$).
Soit X la variable aléatoire qui donne la durée de vie de la bactérie.

1. Trouver la loi de X.
2. Prouver que X a une espérance et la calculer.

Correction

1. $X(\Omega) = [\![r;+\infty]\!]$.
   On note $Y_i = 1$ si la bactérie est touchée à l'instant i, 0 sinon.
   $(Y_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes la loi de Bernoulli de paramètre p.

$$
\begin{aligned}
\forall n \in [\![r;+\infty[\![\; P(X=n) &= P\left(\bigcup_{\substack{I\subset[\![1;n-1]\!]\\ \mathrm{Card}(I)=r-1}}\left(\left(\bigcap_{i\in I\cup\{n\}} Y_i=1\right)\bigcap\left(\bigcap_{i\in[\![1;n-1]\!]\setminus U} Y_i=0\right)\right)\right)\\
&= \sum_{\substack{I\subset[\![1;n-1]\!]\\ \mathrm{Card}(I)=r-1}} P\left(\left(\left(\bigcap_{i\in I\cup\{n\}} Y_i=1\right)\bigcap\left(\bigcap_{i\in[\![1;n-1]\!]\setminus U} Y_i=0\right)\right)\right)\\
&\quad \text{par incompatibilité}\\
&= \sum_{\substack{I\subset[\![1;n-1]\!]\\ \mathrm{Card}(I)=r-1}} \left(\prod_{i\in I\cup\{n\}} P(Y_i=1)\right)\times\left(\prod_{i\in[\![1;n-1]\!]\setminus U} P(Y_i=0)\right)\\
&\quad \text{par indépendance}\\
&= \sum_{\substack{I\subset[\![1;n-1]\!]\\ \mathrm{Card}(I)=r-1}} p^r(1-p)^{n-r}\\
&= \binom{n-1}{r-1}p^r(1-p)^{n-r} = \frac{(n-1)!}{(n-r)!(r-1)!}p^r(1-p)^{n-r}
\end{aligned}
$$

$P(X=+\infty) = 1 - \sum_{n=r}^{+\infty} P(X=r)$ mais le calcul de la somme n'est pas facile.

Si on n'intuite pas ce qui se passe, on peut procéder ainsi.

$$\begin{aligned}
\forall n \in [\![r;+\infty[\![\ P(X \geq n) &= P\left(\bigcup_{\substack{I\subset[\![1;n-1]\!]\\ \mathrm{Card}(I)<=r-1}} \left(\left(\bigcap_{i\in I\cup\{n\}} Y_i = 1\right) \bigcap \left(\bigcap_{i\in[\![1;n-1]\!]\setminus U} Y_i = 0\right)\right)\right)\\
&= \sum_{k=0}^{r-1} \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-1-k}\\
&= \sum_{k=0}^{r-1} \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!k!} p^k (1-p)^{n-1-k}\\
&= \sum_{k=0}^{r-1} \frac{(n-1)(n-2)\dots(n-k)}{k!} p^k (1-p)^{n-1-k}
\end{aligned}$$

$1-p \in]0;1[$ donc par croissance comparée :
$\forall k \in [\![0;r-1]\!]\ \dfrac{(n-1)(n-2)\dots(n-k)}{k!} p^k (1-p)^{n-1-k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
r étant fixe, $\displaystyle\sum_{k=0}^{r-1} \frac{(n-1)(n-2)\dots(n-k)}{k!} p^k (1-p)^{n-1-k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
Par continuité décroissante, $P(X = +\infty) = 0$.

2. X étant à valeurs entières positives, montrer que X a une espérance revient à montrer que la série à termes strictement positifs $\displaystyle\sum_{n\geq r} nP(X = n)$ converge.

$$\begin{aligned}
\forall n \geq r\ \frac{(n+1)P(X = n+1)}{nP(X = n)} &= \frac{n+1}{n} \frac{n!(n-r)!(r-1)!}{(n-1)!(n+1-r)!(r-1)!}(1-p)\\
&= \frac{n+1}{n+1-r}(1-p) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1-p < 1
\end{aligned}$$

D'après la règle de d'Alembert, $\displaystyle\sum_{n\geq r} nP(X = n)$ converge.

Pour le calcul de l'espérance de X, il me semble qu'on ne peut pas faire l'économie d'un argument de culture ou d'intuition : le temps d'attente du r-ième succès est la somme de r variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi géométrique de paramètre p.
Soient $Z_1, \dots, Z_r$ variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi géométrique de paramètre p et S_r leur somme.

On pose $q = 1 - p$.

$$\begin{array}{rcl}
\forall x \in \left]-\dfrac{1}{q};\dfrac{1}{q}\right[\quad G_{S_r}(x) & = & (G_{X_1}(x))^r \text{ par indépendance} \\
& = & \left(\dfrac{px}{1-qx}\right)^r = p^r x^r (1-qx)^{-r} \\
& = & p^r x^r \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-r)(-r-1)\dots(-r-n+1)}{n!}(-1)^n q^n x^n \\
& = & p^r x^r \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{r(r+1)\dots(r+n-1)}{n!} q^n x^n \\
& = & p^r x^r \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(r+n-1)!}{(r-1)!n!} q^n x^n = p^r x^r \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{r+n-1}{n} q^n x^n \\
& = & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{r+n-1}{r-1} p^r q^n x^{r+n} \\
& = & \displaystyle\sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n-1}{r-1} p^r (1-p)^{n-r} x^n \\
& = & \displaystyle\sum_{n=r}^{+\infty} P(X=n) x^n = G_X(x)
\end{array}$$

X et S_r ont la même série génératrice donc la même loi.
En en déduit :
$E(X) = E(S_r) = E\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{r} Z_k\right) = \sum_{k=1}^{r} E(Z_k) = rE(Z_1) = \frac{r}{p}$.

Exercice 8 *(D'après Centrale 2015 maths 2)*

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $(U_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes et de même loi uniforme sur $[\![1;N]\!]$. Pour n entier non nul, on note

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} U_i \text{ et } V_n = \frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} \text{ avec } m = E(U_1) \text{ et } \sigma = \sqrt{V(U_1)}$$

Soit X une variable aléatoire avec $X(\Omega)$ fini. On pose :

$$\forall t \in \mathbb{R} \; M_X(t) = E\left(\mathrm{e}^{tX}\right)$$

1. Préciser $E(U_1)$, $V(U_1)$ et une expression de la fonction génératrice G_{U_1}.
2. Exprimer la fonction génératrice G_{S_n} en fonction de G_{U_1}.
3. Montrer :
   $\forall t \in \mathbb{R} \; M_{V_n}(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}^{t^2/2}$

Correction

1. $E(U_1) = \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{k=1}^{N} k = \frac{N+1}{2}$

   $E(U_1^2) = \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{k=1}^{N} k^2 = \frac{(N+1)(2N+1)}{6}$

$V(U_1) = \dfrac{N^2-1}{12}$

$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{1\}\ G_{U_1}(t) = \dfrac{t}{N}\ \dfrac{1-t^N}{1-t}$

2. D'après le cours : $G_{S_n} = (G_{U_1})^n$
3. On fixe $N \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} M_{V_n}(t) &= E\left(\mathrm{e}^{tV_n}\right) = E\left(\mathrm{e}^{t(S_n-nm)/(\sigma\sqrt{n})}\right) = E\left(\mathrm{e}^{tS_n/(\sigma\sqrt{n})}\ \mathrm{e}^{-tnm/(\sigma\sqrt{n})}\right) \\ &= \mathrm{e}^{-tm\sqrt{n}/\sigma} G_{S_n}\left(\mathrm{e}^{t/(\sigma\sqrt{n})}\right) \end{aligned}$$

Si $t=0$ alors $M_{V_n}(0) = 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

Dans la suite $t \neq 0$ et par conséquent $\mathrm{e}^{t/(\sigma\sqrt{n})} \neq 1$.

Pour $x \neq 1$:

$G_{U_1}(x) = \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{k=1}^{N} x^k = \dfrac{x}{N}\ \dfrac{1-x^N}{1-x}$

$G_{S_n}(x) = \dfrac{x^n}{N^n}\left(\dfrac{1-x^N}{1-x}\right)^n$

On a donc :

$M_{V_n}(t) = \mathrm{e}^{-tm\sqrt{n}/\sigma}\ \dfrac{\mathrm{e}^{t\sqrt{n}/\sigma}}{N^n}\left(\dfrac{1-\ \mathrm{e}^{tN/(\sigma\sqrt{n})}}{1-\ \mathrm{e}^{t/(\sigma\sqrt{n})}}\right)^n = \dfrac{\mathrm{e}^{t(1-m)\sqrt{n}/\sigma}}{N^n}\ \left(\dfrac{1-\ \mathrm{e}^{tN/(\sigma\sqrt{n})}}{1-\ \mathrm{e}^{t/(\sigma\sqrt{n})}}\right)^n$

$1-m = 1-\dfrac{N+1}{2} = \dfrac{1-N}{2}$

Attention à $\dfrac{1-\ \mathrm{e}^{tN/(\sigma\sqrt{n})}}{1-\ \mathrm{e}^{t/(\sigma\sqrt{n})}}$: c'est de la forme $\dfrac{0}{0}$.

$$\begin{aligned} \frac{1-\ \mathrm{e}^{tN/(\sigma\sqrt{n})}}{1-\ \mathrm{e}^{t/(\sigma\sqrt{n})}} &= \frac{\mathrm{e}^{tN/(\sigma\sqrt{n})}-1}{\mathrm{e}^{t/(\sigma\sqrt{n})}-1} \\ &= \frac{Nt/(\sigma\sqrt{n}) + N^2t^2/(2\sigma^2 n) + N^3t^3/(6\sigma^3 n^{3/2}) + o(1/n^{3/2})}{t/(\sigma\sqrt{n}) + t^2/(2\sigma^2 n) + t^3/(6\sigma^3 n^{3/2}) + o(1/n^{3/2})} \\ &= N\frac{t/(\sigma\sqrt{n}) + Nt^2/(2\sigma^2 n) + N^2t^3/(6\sigma^3 n^{3/2}) + o(1/n^{3/2})}{t/(\sigma\sqrt{n}) + t^2/(2\sigma^2 n) + t^3/(6\sigma^3 n^{3/2}) + o(1/n^{3/2})} \\ &= N\frac{1 + Nt/(2\sigma\sqrt{n}) + N^2t^2/(6\sigma^2 n) + o(1/n)}{1 + t/(2\sigma\sqrt{n}) + t^2/(6\sigma^2 n) + o(1/n)} \\ &= N\left(1 + \frac{Nt}{2\sigma\sqrt{n}} + \frac{N^2t^2}{6\sigma^2 n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(1 - \frac{t}{2\sigma\sqrt{n}} + \frac{t^2}{12\sigma^2 n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= N\left(1 + \frac{(N-1)t}{2\sigma\sqrt{n}} + \frac{t^2(2N^2-3N-1)}{12\sigma^2 n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \ln\left(M_{V_n}(t)\right) &= \frac{t(1-m)\sqrt{n}}{\sigma} - n\ln(N) + n\ln(N) + n\ln\left(1 + \frac{(N-1)t}{2\sigma\sqrt{n}} + \frac{t^2(2N^2-3N+1)}{12\sigma^2 n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= \frac{t(1-m)\sqrt{n}}{\sigma} + \frac{t(N-1)\sqrt{n}}{2\sigma} + \frac{t^2(2N^2-3N+1)}{12\sigma^2} - \frac{(N-1)^2t^2}{8\sigma^2} + o(1) \end{aligned}$$

Comme $1-m = \dfrac{1-N}{2}$, les termes en $\sqrt{n}$ s'éliminent.

De plus :

$$\frac{2N^2-3N+1}{12}-\frac{(N-1)^2}{8}=\frac{1}{24}\left(4N^2-6N+2-3N^2+6N-3\right)=\frac{N^2-1}{24}$$

On a vu plus haut $V(U_1)=\dfrac{N^2-1}{12}$.

On en déduit :

$\forall t\in\mathbb{R}\ M_{V_n}(t)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\mathrm{e}^{t^2/2}$