lundi 19 janvier 2026

941

Exercice 1 *(X 2025)*

Démontrer qu'il existe un développement en série entière de

$$F(x) = \frac{1}{1-2x-x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Calculer les coefficients a_n. Quel est le rayon de convergence de la série entière ?

Correction

- **Première méthode :** décomposition en éléments simples.
  $X^2+2X-1 = (X+1)^2-2 = (X+1-\sqrt{2})(X+1+\sqrt{2})$
  Donc F est définie sur $\mathbb{R}$ privé de $\sqrt{2}-1$ et de $-1-\sqrt{2}$
  On notera $\left|\sqrt{2}-1\right| = \sqrt{2}-1 < 1+\sqrt{2} = \left|-1-\sqrt{2}\right|$
  $\dfrac{1}{X^2-2X+1} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\left(\dfrac{1}{X+1-\sqrt{2}} - \dfrac{1}{X+1+\sqrt{2}}\right)$
  Donc pour tout $x \in]1-\sqrt{2};\sqrt{2}-1[$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x^2-2x+1} &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{1-\sqrt{2}}\frac{1}{1-\frac{x}{\sqrt{2}-1}} - \frac{1}{1+\sqrt{2}}\frac{1}{1+\frac{x}{\sqrt{2}+1}}\right)\\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{1-\sqrt{2}}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{(\sqrt{2}-1)^n} - \frac{1}{1+\sqrt{2}}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^n}{(\sqrt{2}+1)^n}\right)\\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{(1+\sqrt{2})^{n+1}} - \frac{1}{(\sqrt{2}-1)^{n+1}}\right)x^n\\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\sum_{n=0}^{+\infty}\left((1-\sqrt{2})^{n+1} - (\sqrt{2}+1)^{n+1}\right)x^n\\
&= \frac{-1}{2\sqrt{2}}\sum_{n=0}^{+\infty}\left((1+\sqrt{2})^{n+1} - (1-\sqrt{2})^{n+1}\right)x^n
\end{aligned}$$

  On en déduit :

$$\forall x \in]1-\sqrt{2};\sqrt{2}-1[\ F(x) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\sum_{n=0}^{+\infty}\left((1+\sqrt{2})^{n+1} - (1-\sqrt{2})^{n+1}\right)x^n$$

  Le rayon de convergence est $\sqrt{2}-1$: rayon de convergence de la somme de deux séries entières de rayons de convergence différents.

- **Deuxième méthode** : c'est la méthode évoquée par les examinateurs, modifiée pour raisonner par équivalence et ne pas faire deux fois les mêmes calculs.

  Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R strictement positif et S sa somme.

  Pour tout $x \in]-R;R[$:

$$\begin{aligned}
(1-2x-x^2)S(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n - 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n - 2\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n \\
&= a_0 + (a_1 - 2a_0)x + \sum_{n=2}^{+\infty} \left(a_n - 2a_{n+1} - a_{n-2}\right) x^n
\end{aligned}$$

  Donc :

$$\Big(\forall x \in]-R;R[\ (1-2x-x^2)S(x) = 1\Big) \iff \begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 2a_0 = 2 \\ \forall n \geq 2 \ a_n - 2a_{n+1} - 1 = 0 \end{cases}$$

  L'équation caractéristique de la récurrence est $r^2 - 2r - 1 = 0$

  Mais $r^2 - 2r - 1 = (r-1)^2 - 2 = (r - 1 - \sqrt{2})(r - 1 + \sqrt{2})$

  Donc la solution générale est $r = A(1-\sqrt{2})^n + B(1+\sqrt{2})^n$.

  Les conditions initiales donnent

$$\begin{aligned}
A + B = 1 & \\
A(1-\sqrt{2}) + B(1+\sqrt{2}) = 2 &\iff \begin{cases} A + B = 1 \\ \sqrt{2}(B-A) = 1 \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} A + B = 1 \\ B - A = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} A = \dfrac{2-\sqrt{2}}{4} = \dfrac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} \\ B = \dfrac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}} \end{cases}
\end{aligned}$$

  On retrouve l'expression de a_n de la première méthode mais il faut calculer le rayon de convergence et vérifier qu'il est strictement positif.

  $|a_n| \sim \dfrac{(1+\sqrt{2})^{n+1}}{2\sqrt{2}}$

  Donc $R = R_{CV}\left(\sum_{n\geq 0} \dfrac{(1+\sqrt{2})^{n+1}}{2\sqrt{2}} x^n\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2} - 1$