# ANALYSE 1
# TD
# 2023-2024
# Chapitre 5
# Intégrales à paramètres

941

**Exercice 1** *(Banque CCP MP)*

On considère la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-2t}}{x+t}\,\mathrm{d}t$.

1. Prouver que $F$ est définie et continue sur $]0;+\infty[$.
2. Prouver que $x \longmapsto xF(x)$ admet une limite en $+\infty$ et déterminer la valeur de cette limite.
3. Déterminer un équivalent, au voisinage de $+\infty$, de $F(x)$.

**Exercice 2** *(Banque CCP MP)*

1. Démontrer que la fonction $f : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(xt)\,\mathrm{d}t$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$.
2. (a) Trouver une équation différentielle linéaire $(E)$ d'ordre 1 dont $f$ est solution.
   (b) Résoudre $(E)$.

**Exercice 3** *(Mines 2015)*

$f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(tx)}{t}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$

1. Trouver le domaine de définition.
2. Montrer que que $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$.
3. Calculer $f'$ et en déduire $f$.

**Exercice 4** *(Mines 2019)*

$$f(x) = \int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)}t^x\,\mathrm{d}t$$

1. Domaine de définition ?
2. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ?
3. Calcul de $f(x)$ ?

**Exercice 5** *(Centrale 2017)*

On étudie la fonction :
$$f(x) = \int_0^{\pi} \ln\left(1 - 2x\cos t + x^2\right) \mathrm{d}t$$

1. Montrer que $f$ est définie sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est paire.
2. Montrer :
   $\forall x \in \mathbb{R}\ f(x^2) = 2f(x)$.
3. ?

La suite naturelle de l'exercice est d'obtenir une expression simple de $f(x)$.

**Exercice 6** *(Mines 2016)*

Etude de $f(x) = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\ln\left(1 + x\cos t\right)}{\cos t} \mathrm{d}t$.

**Variante**

**Exercice 7** *(X 2021)*

$f(a) = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\ln\left(1 + a\cos t\right)}{\cos t} \mathrm{d}t$

1. $f(a)$ est-elle définie pour tout $a \in [0;1[$ ?
2. Exprimer $f(a)$ en fonction de $a$.

**Exercice 8** *(Mines 2015)*

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)} \mathrm{d}t$$

1. Montrer que $f$ est continue.
2. Montrer que $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$.
3. Exprimer $f(x)$ en fonction de $x$.

**Remarque**
Cet exercice a été posé à l'X en 2019 avec une seule question : calcul de $f(x)$.

**Exercice 9** *(Mines 2022)*

Soit $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \sin(tx) \mathrm{d}t$.

1. Soit $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{2n+1} \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t$.
   Montrer que $I_n$ est bien définie et déterminer sa valeur.
2. Développer $F$ en série entière.
3. Trouver une équation différentielle dont $F$ est solution et en déduire une expression simplifiée de $F$.