ANALYSE 1
TD
2023-2024
Chapitre 5
Intégrales à paramètres
Corrigé

941

Exercice 1 *(Banque CCP MP)*

On considère la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-2t}}{x+t}\,\mathrm{d}t$.

1. Prouver que F est définie et continue sur $]0;+\infty[$.
2. Prouver que $x \longmapsto xF(x)$ admet une limite en $+\infty$ et déterminer la valeur de cette limite.
3. Déterminer un équivalent, au voisinage de $+\infty$, de $F(x)$.

Correction

1. Notons $f : \begin{cases}]0;+\infty[\times[0;+\infty[\mapsto \mathbb{R} \\ (x,t) \mapsto \dfrac{e^{-2t}}{x+t} \end{cases}$

(a) $\forall x \in]0;+\infty[, t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur $[0;+\infty[$.

(b) $\forall t \in \left[0;+\infty\right[, x \mapsto f(x,t) = \dfrac{\mathrm{e}^{-2t}}{x+t}$ est continue sur $]0;+\infty[$.

(c) Soit $[a,b]$ un segment de $]0;+\infty[$.

$\forall x \in [a,b], \forall t \in \left[0;+\infty\right[, |f(x,t)| \leq \dfrac{1}{a}\mathrm{e}^{-2t}$ et $\varphi : t \mapsto \dfrac{1}{a}\mathrm{e}^{-2t}$ est continue par morceaux, positive et intégrable sur $[0;+\infty[$.

En effet, $\lim_{t\to+\infty} t^2\varphi(t) = 0$, donc $\varphi(t) = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.

Donc φ est intégrable sur $[1,+\infty[$, donc sur $[0;+\infty[$.

On en déduit que, d'après le théorème de continuité des intégrales à paramètres, $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-2t}}{x+t}\,\mathrm{d}t$ est définie et continue sur $]0;+\infty[$.

2. $\forall x \in]0;+\infty\left[, xF(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{x+t}\mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t\right.$.

Posons $\forall x \in]0;+\infty\left[, \forall t \in \left[0;+\infty\right[, h_x(t) = \dfrac{x}{x+t}\mathrm{e}^{-2t}\right.$.

i) $\forall x \in]0;+\infty[, t \longmapsto h_x(t)$ est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$.

ii) $\forall t \in [0;+\infty[, \lim_{x\to+\infty} h_x(t) = e^{-2t}$.

La fonction $h : t \mapsto e^{-2t}$ est continue par morceaux sur $[0;+\infty[$.

iii) $\forall x \in]0;+\infty[, \forall t \in [0;+\infty[, |h_x(t)| \leq e^{-2t}$ et $t \mapsto e^{-2t}$ est continue par morceaux, positive et intégrable sur$[0;+\infty[$.

Donc, d'après l'extension du théorème de convergence dominée à $(h_x)_{x\in]0;+\infty[}$,

$\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^{+\infty} h_x(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} h(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-2t}\ \mathrm{d}t = \dfrac{1}{2}$.

Conclusion : $\lim_{x\to+\infty} xF(x) = \dfrac{1}{2}$.

3. D'après 2., $\lim_{x\to+\infty} xF(x) = \dfrac{1}{2}$, donc $F(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2x}$.

Exercice 2 *(Banque CCP MP)*

1. Démontrer que la fonction $f : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(xt)\,\mathrm{d}t$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
2. (a) Trouver une équation différentielle linéaire (E) d'ordre 1 dont f est solution.
   (b) Résoudre (E).

Correction

1. On pose $\forall\,(x,t) \in \mathbb{R}\times[0,+\infty[$, $u(x,t) = \mathrm{e}^{-t^2}\cos(xt)$.
   i) $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $t \longmapsto u(x,t)$ est continue sur $[0,+\infty[$.
   De plus, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $|u(x,t)| \leq \mathrm{e}^{-t^2}$.
   Or $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2\mathrm{e}^{-t^2} = 0$, donc, au voisinage de $+\infty$, $\mathrm{e}^{-t^2} = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.
   Donc, $t \longmapsto u(x,t)$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.
   ii) $\forall\,(x,t) \in \mathbb{R}\times[0,+\infty[$, $\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t) = -t\mathrm{e}^{-t^2}\sin(xt)$.
   - $\forall x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$. .
   - $\forall t \in [0,+\infty]$, $x \mapsto \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
   -iii) $\forall\,(x,t) \in \mathbb{R}\times[0,+\infty[$,$\left|\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right| \leq t\mathrm{e}^{-t^2} = \varphi(t)$ avec φ continue par morceaux, positive et intégrable sur $[0,+\infty[$.
   En effet, $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2\varphi(t) = 0$ donc, au voisinage de $+\infty$, $\varphi(t) = o(\dfrac{1}{t^2})$.
   On en déduit que φ est intégrable sur $[1,+\infty[$ et comme elle est continue sur $[0,1[$, alors φ est bien intégrable sur $[0,+\infty[$.
   Donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et :
   $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} -t\mathrm{e}^{-t^2}\sin(xt)\mathrm{d}t$
2. (a) On a, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} -t\mathrm{e}^{-t^2}\sin(xt)\,\mathrm{d}t$.
   Procédons à une intégration par parties. Soit $A \geq 0$.
   $$\int_0^A -t\mathrm{e}^{-t^2}\sin(xt)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t^2}\sin(xt)\right]_0^A - \int_0^A \frac{x}{2}\mathrm{e}^{-t^2}\cos(xt)\,\mathrm{d}t$$
   En passant à la limite quand $A \to +\infty$, on obtient $f'(x) + \dfrac{x}{2}f(x) = 0$.
   Donc f est solution de l'équation différentielle (E) : $y' + \dfrac{x}{2}y = 0$.

(b) Les solutions de (E) sont les fonctions y définies par $y(x) = A\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4}}$, avec $A \in \mathbb{R}$.

Exercice 3 *(Mines 2015)*

$f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(tx)}{t}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$

1. Trouver le domaine de définition.
2. Montrer que que f est de classe $\mathcal{C}^1$.
3. Calculer f' et en déduire f.

Correction

1. On fixe $x \in \mathbb{R}$.
   Soit $f_x \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \dfrac{\sin(tx)}{t}\,\mathrm{e}^{-t} \end{cases}$.
   - f_x est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
   - $f_x(t) \xrightarrow[t\to 0]{} x$: f_x est prolongeable par continuité en 0.
   - $f_x(t) = o_{+\infty}(\mathrm{e}^{-t})$

   Donc f_x est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
   $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$
2. Soit $g \begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ (x,t) \mapsto \dfrac{\sin(tx)}{t}\,\mathrm{e}^{-t} \end{cases}$.
   - g est de classe $\mathcal{C}^1$ par rapport à x et :
     $\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*\ \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t) = \cos(tx)\,\mathrm{e}^{-t}$
   - Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x,.)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
   - Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,.)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
   - **Hypothèse de domination**
     $\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*\ \left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leq \mathrm{e}^{-t}$
     avec $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$ continue, positive et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

   On en déduit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ avec :
   $\forall x \in \mathbb{R}\ f'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(tx)\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}\ f'(x) &= \Re e\left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{(-1+ix)t}\,\mathrm{d}t\right) \\ &= \Re e\left(\frac{1}{1-ix}\right) = \frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

   $f(0) = 0$ donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) = \arctan(x)$$

Exercice 4 *(Mines 2019)*

$$f(x) = \int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)} t^x\,\mathrm{d}t$$

1. Domaine de définition ?
2. $\lim_{x \to +\infty} f(x)$?
3. Calcul de $f(x)$?

Correction

1. Soit $x \in \mathbb{R}$.
   Soit $g_x \begin{cases}]0;1[\to \mathbb{R} \\ t \mapsto \dfrac{t-1}{\ln(t)} t^x \end{cases}$.
   g_x est continue sur $]0;1[$.
   g_x est prolongeable par continuité en 1, par $g_x(1) = 1$
   En effet, si on pose $h = 1 - t$ alors :
   $g_x(t) = \dfrac{-h}{\ln(1-h)}(1-h)^x \sim \dfrac{-h}{-h} = 1$
   $g_x(t) \sim_0 -\dfrac{1}{t^{-x}\ln(t)}$
   Si $x > -1$ alors $g_x(t) = o_0\left(\dfrac{1}{t^{-x}}\right)$ avec $-x < 1$ donc g_x est intégrable sur $]0;1[$ ou $]0;1]$.
   Si $x = -1$ alors $g_x(t) \sim_0 -\dfrac{1}{t\ln(t)}$
   $\forall \epsilon \in]0;1/2[\int_\epsilon^{1/2} \dfrac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)} = [\ln(|\ln(t)|)]_\epsilon^{1/2} = \ln(\ln(2)) - \ln(|\ln(\epsilon)|) \xrightarrow[\epsilon \to 0]{} -\infty$
   Donc la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t\ln(t)}$ n'est pas intégrable sur $\left]0;\dfrac{1}{2}\right]$.
   Donc g_{-1} n'est pas intégrable sur $\left]0;\dfrac{1}{2}\right]$.
   g_{-1} étant positive sur $]0;1[$, il ne peut pas y avoir semi-convergence de l'intégrale.
   Si $x < -1$ alors :
   $\dfrac{g_{-1}(t)}{g_x(t)} = \dfrac{t^{-1}}{t^x} = t^{-(x+1)} \xrightarrow[t \to 0]{} 0$ car $-(x+1) > 0$
   Donc $g_{-1}(t) = o_0(g_x(t))$.
   Or g_{-1} n'est pas intégrable sur $\left]0;\dfrac{1}{2}\right]$ donc g_x n'est pas intégrable sur $\left]0;\dfrac{1}{2}\right]$.
   g_x étant positive sur $]0;1[$, il ne peut pas y avoir semi-convergence de l'intégrale.
   Finalement :
   $$\mathcal{D}(f) =]-1;+\infty[$$

2. - **Première méthode**
     La fonction g_0 est prolongeable en une fonction continue sur $[0;1]$. Elle est donc bornée :
     $\exists M \in \mathbb{R}_+$ tq $\forall t \in]0;1[\; |g_0(t)| = \dfrac{t-1}{\ln(t)} \leq M$
     On a alors :
     $\forall x > 0 \; 0 \leq f(x) \leq M \int_0^1 t^x \,\mathrm{d}t = \dfrac{M}{x+1}$
     Et : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$
   - **Deuxième méthode**
     Soit $g \begin{cases}]-1;+\infty[\times]0;1[\to \mathbb{R} \\ (x,t) \mapsto \dfrac{t-1}{\ln(t)} t^x \end{cases}$.

— $\forall t \in]0;1[\ g(x,t) \xrightarrow[x\to+\infty]{} l(t) = 0$
— Pour tout $x \in]-1;+\infty[$, la fonction $g(x,.)$ est continue (par morceaux).
— La fonction l est continue par morceaux.
— **Domination**
$\forall (x,t) \in \mathbb{R}_+ \times]0;1[\ |g(x,t)| = \dfrac{t-1}{\ln(t)} t^x \leq \dfrac{t-1}{\ln(t)} = |g(0,t)|$
avec $g(0,.)$ continue, positive et intégrable sur $]0;1[$.

D'après le théorème de la limite aux bornes, $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \displaystyle\int_0^1 l(t)\,\mathrm{d}t = 1$

3. Soit $g \begin{cases}]-1;+\infty[\times]0;1[\to \mathbb{R} \\ (x,t) \mapsto \dfrac{t-1}{\ln(t)} t^x \end{cases}$.
   - g est $\mathcal{C}^1$ par rapport à x avec :
     $\forall (x,t) \in]-1;+\infty[\times]0;1[\ \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t) = (t-1)t^x$
   - Pour tout $x > -1$, la fonction $g(x,.)$ est continue et intégrable sur $]0;1[$.
   - Pour tout $x > -1$, la fonction $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,.)$ est continue sur $]0;1[$.
   - L'hypothèse de domination relative à $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ est vérifiée sur tout segment de $]-1;+\infty[$: soit $[a;b]$ un tel segment.
     $\forall (x,t) \in [a;b]\times]0;1[\ \left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leq 2t^a$
     avec $t \mapsto 2t^a$ continue, positive et intégrable sur $]0;1[$.
     Donc f est $\mathcal{C}^1$ et :

$$\begin{aligned} \forall x > -1\ f'(x) &= \int_0^1 (t-1)t^x\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \left(t^{x+1} - t^x\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+1} \\ f(x) &= \ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right) + Cte \end{aligned}$$

La constante est nulle à cause de la question précédente.

Exercice 5 *(Centrale 2017)*

On étudie la fonction :

$$f(x) = \int_0^\pi \ln(1 - 2x\cos t + x^2)\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est paire.
2. Montrer :
   $\forall x \in \mathbb{R}\ f(x^2) = 2f(x)$.
3. ?

La suite naturelle de l'exercice est d'obtenir une expression simple de $f(x)$.

Correction

1. $1 - 2x\cos t + x^2 = (x - \cos t)^2 + \sin^2 t = \left|x - \mathrm{e}^{it}\right|^2$
   Donc si $x \neq \pm 1$, il n'y a pas de problème : la fonction $t \mapsto \ln(1 - 2x\cos t + x^2)$ est continue sur $[0;\pi]$.
   Si $x = 1$:

$1-2x\cos t+x^2=2(1-\cos t)$
L'intégrale est impropre à gauche et :
$2(1-\cos t)\sim_0 t^2$ puis $\ln(1-2x\cos t+x^2)\sim 2\ln t$ (logarithme de deux infiniment petits équivalents)
Si $x=-1$:
$1-2x\cos t+x^2=2(1+\cos t)$
L'intégrale est impropre à droite et :
$2(1+\cos(\pi-h))=2(1-\cos h)\sim_0 h^2$ puis
$\ln(1-2x\cos t+x^2)\sim_\pi 2\ln(\pi-t)=o\left(\dfrac{1}{\sqrt{\pi-t}}\right)$
On montre que f est paire au moyen du changement de variable $s=\pi-t$:

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R}\ f(-x) &= \int_0^\pi \ln(1+2x\cos t+x^2)\,\mathrm{d}t=\int_\pi^0 \ln(1-2x\cos(s)+x^2)(-\mathrm{d}s)\\ &= \int_0^\pi \ln(1-2x\cos s+x^2)\mathrm{d}s=f(x)\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}f(x^2) &= 2\int_0^\pi \ln\left(\left|x^2-\mathrm{e}^{it}\right|\right)\mathrm{d}t=2\int_0^\pi \ln\left(\left|(x-\mathrm{e}^{it/2})(x+\mathrm{e}^{it/2})\right|\right)\mathrm{d}t\\ &= 2\int_0^\pi\left(\ln\left(\left|x-\mathrm{e}^{it/2}\right|\right)+\ln\left(\left|x+\mathrm{e}^{it/2}\right|\right)\right)\mathrm{d}t\\ &= 2\int_0^\pi \ln\left(\left|x-\mathrm{e}^{it/2}\right|\right)\mathrm{d}t+2\int_0^\pi \ln\left(\left|x+\mathrm{e}^{it/2}\right|\right)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

La séparation doit être justifiée dans le cas où $x=\pm 1$.
Si $x=1$, seule la première intégrale est impropre et la situation est la suivante :
$g=g_1+g_2$ avec $\int_0^\pi g(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_0^\pi g_2(t)\,\mathrm{d}t$ qui convergent.
Donc $\int_0^\pi g_1(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
On raisonne de manière similaire lorsque $x=-1$.
On fait les changements de variables $\mathcal{C}^1$ strictement monotones $s=\dfrac{t}{2}$ et $s=\pi-\dfrac{t}{2}$.

$$\begin{aligned}f(x^2) &= 4\int_0^{\pi/2}\ln\left(\left|x-\mathrm{e}^{is}\right|\right)\mathrm{d}s+4\int_\pi^{\pi/2}\ln\left(\left|x-\mathrm{e}^{-is}\right|\right)(-\mathrm{d}s)\\ &= 4\int_0^{\pi/2}\ln\left(\left|x-\mathrm{e}^{is}\right|\right)\mathrm{d}s+4\int_{\pi/2}^{\pi}\ln\left(\left|\overline{x-\mathrm{e}^{+is}}\right|\right)\mathrm{d}s\\ &= 4\int_0^{\pi/2}\ln\left(\left|x-\mathrm{e}^{is}\right|\right)\mathrm{d}s+4\int_{\pi/2}^{\pi}\ln\left(\left|x-\mathrm{e}^{is}\right|\right)\mathrm{d}s\\ &= 4\int_0^{\pi}\ln\left(\left|x-\mathrm{e}^{is}\right|\right)\mathrm{d}s=2f(x)\end{aligned}$$

3. $f(0)=0$ est trivial sur la définition.
On déduit de ce qui précède $f(1)=0$ puis $f(-1)=0$ par parité.
Si $x\in]-1;1[$, $f\left(x^{2^n}\right)=2^n f(x)$ (récurrence)
On montre la continuité de f en 0 :
soit $g\begin{cases}\left[-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right]\times[0;\pi]\to\mathbb{R}\\ (x,t)\mapsto \ln(1-2x\cos t+x^2)=2\ln\left(\left|x-\mathrm{e}^{it}\right|\right)\end{cases}$.

g est continue par rapport à x.
g est continue par rapport à t.
Domination
$\forall (x,t) \in \left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right] \times [0;\pi]$ $1 = |\,\mathrm{e}^{it}| \leq |\,\mathrm{e}^{it} - x| + |x| \leq |x - \mathrm{e}^{it}| + \frac{1}{2}$
Donc :
$\forall (x,t) \in \left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right] \times [0;\pi]$ $\frac{1}{2} \leq |x - \mathrm{e}^{it}| \leq |x| + |\,\mathrm{e}^{it}| \leq \frac{3}{2} \leq 2$
Donc :
$\forall (x,t) \in \left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right] \times [0;\pi]$ $-\ln(2) \leq \ln\left(|x - \mathrm{e}^{it}|\right) \leq \ln(2)$
et finalement :
$\forall (x,t) \in \left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right] \times [0;\pi]$ $|f(x,t)| \leq 2\ln(2)$
avec $t \mapsto 2\ln(2)$ continue, positive et intégrable sur $[0;\pi]$.
f est donc continue sur $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$.

On revient à $x \in]-1;1[$.
La suite $(2^n f(x))$ converge vers $f(0) = 0$ et $f(x) = 0$.
Si $|x| > 1$:

$$\begin{aligned} 0 &= f\left(\frac{1}{x}\right) = \int_0^\pi \ln\left(1 - 2\frac{1}{x}\cos t + \frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^\pi \ln\left(x^2 - 2x\cos t + 1\right)\mathrm{d}t - \pi\ln\left(x^2\right) \end{aligned}$$

On en déduit $f(x) = 2\pi\ln(|x|)$.

Autre méthode pour le calcul de $f(x)$

Soit $g \begin{cases}]1;+\infty[\times[0;\pi] \to \mathbb{R} \\ (x,t) \mapsto \ln\left(1 - 2x\cos(t) + x^2\right) \end{cases}$.

On commence par remarquer :
$\forall (x,t) \in]1;+\infty[\times[0;\pi]$ $1 - 2x\cos(t) + x^2 = (x - \cos(t))^2 + \sin^2(t) \geq (x - \cos(t))^2 > 0$

- g est de classe $\mathcal{C}^1$ par rapport à x avec :
  $\forall (x,t) \in]1;+\infty[\times[0;\pi]$ $\frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = \frac{2(x - \cos(t))}{1 - 2x\cos(t) + x^2}$
- Pour tout $x > 1$, la fonction $g(x,.)$ est continue et intégrable sur $[0;\pi]$ (intégrable car continue quand on travaille sur un segment).
- Pour tout $x > 1$, la fonction $\frac{\partial g}{\partial x}(x,.)$ est continue sur $[0;\pi]$.
- L'hypothèse de domination est vérifiée sur tout intervalle $[a;+\infty[$ avec $a > 1$:
  $\forall (x,t) \in [a;+\infty[\times[0;\pi]$ $\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leq \frac{2\,|x - \cos(t)|}{(x - \cos(t))^2} = \frac{2}{x - \cos(t)} \leq \frac{2}{a-1}$
  avec $t \mapsto \frac{2}{a-1}$ continue, positive et intégrable sur $[0;\pi]$.

Donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1;+\infty[$ et :

$$\begin{aligned}
\forall x>1\ f'(x) &= \int_0^\pi \frac{2(x-\cos(t))}{1-2x\cos(t)+x^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^\pi \frac{2x-\mathrm{e}^{it}-\mathrm{e}^{-it}}{(x-\mathrm{e}^{it})(x-\mathrm{e}^{-it})}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\pi \left(\frac{1}{x-\mathrm{e}^{it}}+\frac{1}{x-\mathrm{e}^{-it}}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\int_0^\pi \left(\frac{1}{1-\mathrm{e}^{it}/x}+\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-it}/x}\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{x}\int_0^\pi \left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{\mathrm{e}^{it}}{x}\right)^n+\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{\mathrm{e}^{-it}}{x}\right)^n\right)\mathrm{d}t \text{ car } \left|\frac{\mathrm{e}^{it}}{x}\right| = \left|\frac{\mathrm{e}^{-it}}{x}\right| = \frac{1}{x}<1 \\
&= \frac{1}{x}\int_0^\pi \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{int}+\mathrm{e}^{-int}}{x^n}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{x}\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^\pi \frac{\cos(nt)}{x^n}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

On fixe $x>1$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, soit $f_n \begin{cases}[0;\pi]\to\mathbb{R}\\ t\mapsto \dfrac{\cos(nt)}{x^n}\end{cases}$.

- Pour tout $n\in\mathbb{N}$, f_n est continue sur $[0;\pi]$.
- La série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge uniformément sur $[0;\pi]$.

  En effet :

  $\forall n\in\mathbb{N}\ \forall t\in[0;\pi]\ \ |f_n(t)|\leq \dfrac{1}{x^n}$ indépendant de t et terme général d'une série convergente

  Donc la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge normalement sur $[0;\pi]$.

  Donc la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge uniformément sur $[0;\pi]$.

On a donc :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{2}{x}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{x^n}\int_0^\pi \cos(nt)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{x}\left(\int_0^\pi \mathrm{d}t + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{x^n}\left[\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^\pi\right) \\
&= \frac{2\pi}{x}
\end{aligned}$$

On en déduit qu'il existe une constante C telle que :
$\forall x>1\ f(x)=2\pi\ln(x)+C$

Mais :
$\forall x>1\ f(x)-2\pi\ln(x) = \int_0^\pi \ln(1-2x\cos(t)+x^2)\,\mathrm{d}t - \int_0^\pi \ln(x^2)\,\mathrm{d}t = \int_0^\pi \ln\left(1-\frac{2}{x}\cos(t)+\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}t$

On applique ensuite le théorème de la limite au bord.

Soit $g \begin{cases}[0;\pi]\to\mathbb{R}\\ (x,t)\mapsto \ln\left(1-\dfrac{2}{x}\cos(t)+\dfrac{1}{x^2}\right)\end{cases}$.

- $\forall t\in[0;\pi]\ g(x,t)\xrightarrow[x\to+\infty]{} l(t)=0$
- Pour tout $x>1$, la fonction $g(x,.)$ est continue sur $[0;\pi]$.
- La fonction l est continue sur $[0;\pi]$.
- **Domination**

  $\forall(x,t)\in]1;+\infty[\times[0;\pi]\ 1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2} = \left(1-\dfrac{1}{x}\right)^2 \leq 1-\dfrac{2}{x}\cos(t)+\dfrac{1}{x^2} \leq 1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2} =$

$\left(1+\frac{1}{x}\right)^2$

$\forall (x,t) \in [2;+\infty[\times[0;\pi] \ \left(1-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \leq 1 - \frac{2}{x}\cos(t) + \frac{1}{x^2} \leq \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$

Donc :

$\forall (x,t) \in [2;+\infty[\times[0;\pi] \ -2\ln(2) \leq g(x,t) \leq 2\ln(3) - 2\ln(2)$

Donc :

$\forall (x,t) \in [2;+\infty[\times[0;\pi] \ |g(x,t)| \leq \max(2\ln(2), 2\ln(3)-2\ln(2)) = M$ une constante.

avec $t \mapsto M$ continue, positive et intégrable sur $[0;\pi]$.

Donc $f(x) - 2\pi\ln(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ et $C = 0$.

On a donc prouvé :

$\forall x > 1 \ \displaystyle\int_0^\pi \ln(1-2x\cos(t)+x^2)\,\mathrm{d}t = 2\pi\ln(x)$

Exercice 6 *(Mines 2016)*

Etude de $f(x) = \displaystyle\int_0^\pi \frac{\ln(1+x\cos t)}{\cos t}\,\mathrm{d}t$.

Correction

La fonction $t \mapsto \frac{1}{\cos t}$ n'est pas défini en $\frac{\pi}{2}$: c'est un problème inhabituel.

A x fixé : $\ln(1+x\cos t) \sim_{\pi/2} x\cos t$ donc la fonction $t \mapsto \frac{\ln(1+x\cos t)}{\cos t}$ est prolongeable en une fonction continue au voisinage de $\frac{\pi}{2}$.

$f(0) = 0$ ne pose pas de problème de définition.

Soit $x \in \mathbb{R}^*$.

Lorsque t décrit $]0;\pi[$, $1+x\cos t$ décrit $]1-|x|\,;1+|x|\,[$.

Si $|x| > 1$, $f(x)$ n'est pas défini : la question de l'intégrabilité ne se pose même pas.

Supposons $|x| < 1$.

La fonction $t \mapsto \frac{\ln(1+x\cos t)}{\cos t}$ est continue sur $[0;\pi]$ (après le prolongement en $\pi/2$ bien sûr) donc $f(x)$ est bien défini.

Supposons $x = -1$.

$f(-1)$ est défini par une intégrale impropre à gauche.

En 0, $1-\cos t \sim \frac{t^2}{2}$ et c'est un infiniment petit donc :

$\frac{\ln(1-\cos t)}{\cos t} \sim_0 2\ln t$

On en déduit que $t \mapsto \frac{\ln(1-\cos t)}{\cos t}$ est intégrable sur $]0;\pi]$.

Le changement de variable $y = \pi - t$ $\mathcal{C}^1$ strictement décroissant transforme $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\ln(1+x\cos t)}{\cos t}\,\mathrm{d}t$ en $-\displaystyle\int_0^\pi \frac{\ln(1-x\cos y)}{\cos y}\,\mathrm{d}y$.

Finalement, f est définie sur $[-1;1]$ et c'est une fonction impaire.

Appliquer les théorèmes du cours va poser problème à cause de $\frac{\pi}{2}$.

La relation de Chasles et le changement de variable $y = \pi - t$ permettent d'établir :

$\forall x \in [-1;1] \ f(x) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\ln(1+x\cos t)}{\cos t}\,\mathrm{d}t - \int_0^{\pi/2} \frac{\ln(1-x\cos t)}{\cos t}\,\mathrm{d}t = g(x) - g(-x)$

Soit $h \begin{cases} [-1;1]\times]0;\pi/2[\to \mathbb{R} \\ (x,t)\mapsto \dfrac{\ln(1+x\cos t)}{\cos t} \end{cases}$.

- h est continue par rapport à x.
- h est continue par rapport à t.
- L'hypothèse de domination est vérifiée :
  $\forall (x,t) \in [-1;1]\times]0;\pi/2[\ 0 < 1-\cos t \leq 1 + x\cos t \leq 1+\cos t$ ($\cos t$ est positif sur l'intervalle considéré)
  D'où :
  $$\begin{aligned} \forall (x,t) \in [-1;1]\times]0;\pi/2[\ |h(t)| &\leq \frac{\max\left(|\ln(1-\cos t)|, \ln(1+\cos t)\right)}{\cos t} \\ &\leq \frac{|\ln(1-\cos t)| + \ln(1+\cos t)}{\cos t} \end{aligned}$$
  D'après le début de l'exercice, $t \mapsto \dfrac{\ln(1-\cos t)}{\cos t}$ est intégrable sur $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[$ et $t\mapsto \dfrac{\ln(1+\cos t)}{\cos t}$ est prolongeable en une fonction continue sur $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.
  Donc $t \mapsto \dfrac{|\ln(1-\cos t)| + \ln(1+\cos t)}{\cos t}$ est continue, positive et intégrable sur $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[$.

Donc g est continue sur $[-1;1]$.
De même f par composition et opérations algébriques.

Soit $h \begin{cases}]-1;1[\times[0;\pi/2[\to \mathbb{R} \\ (x,t)\mapsto \dfrac{\ln(1+x\cos t)}{\cos t} \end{cases}$.

- h est $\mathcal{C}^1$ par rapport à x avec :
  $\forall (x,t) \in]-1;1[\times[0;\pi/2[\ \dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t) = \dfrac{1}{1+x\cos t}$
- h est continue et intégrable par rapport à t.
- $\dfrac{\partial h}{\partial x}$ est continue par rapport à t.
- L'hypothèse de domination est vérifiée sur tout segment de $]-1;1[$:
  Soit $[a;b]$ un segment contenu dans $]-1;1[$ ($-1 < a < b < 1$).
  $\forall (x,t) \in [a;b]\times[0;\pi/2[\ \left|\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| = \dfrac{1}{1+x\cos t} \leq \dfrac{1}{1+a\cos t}$
  avec $t\mapsto \dfrac{1}{1+a\cos t}$ continue, positive et intégrable sur $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[$ (car prolongeable en une fonction continue sur le segment)

Donc g est $\mathcal{C}^1$ sur $]-1;1[$.
Donc f est $\mathcal{C}^1$ sur $]-1;1[$ avec :

$\forall x \in]-1;1[\ f'(x) = g'(x) + g'(-x)$.

$$\begin{aligned}
\forall x \in]-1;1[\ g'(x) &= \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{1+x\cos t} \\
&= \int_0^1 \frac{1}{1+x\frac{1-y^2}{1+y^2}} \frac{2\,\mathrm{d}y}{1+y^2} \text{ changement de variable } y = \tan(t/2) \\
&= 2\int_0^1 \frac{\mathrm{d}y}{1+y^2+x(1-y^2)} = 2\int_0^1 \frac{\mathrm{d}y}{1+x+(1-x)y^2} \\
&= \frac{2}{1-x}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}y}{y^2+\frac{1+x}{1-x}} = \frac{2}{1-x}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\left[\arctan\left(y\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)\right]_0^1 \\
&= \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)
\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
\forall x \in]-1;1[\ f'(x) &= g'(x)+g'(-x) = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right) + \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right) \\
&= \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\left(\arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)+\arctan\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)\right) = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\frac{\pi}{2} \\
&= \frac{\pi}{\sqrt{1-x^2}}
\end{aligned}$$

Compte tenu de $f(0)=0$ et de la continuité de f sur le segment :

$$\forall x \in [-1;1]\ \int_0^\pi \frac{\ln(1+x\cos t)}{\cos t}\,\mathrm{d}t = \pi\arcsin(x)$$

Variante

Exercice 7 *(X 2021)*

$f(a) = \displaystyle\int_0^\pi \frac{\ln(1+a\cos t)}{\cos t}\,\mathrm{d}t$

1. $f(a)$ est-elle définie pour tout $a \in [0;1[$?
2. Exprimer $f(a)$ en fonction de a.

Exercice 8 *(Mines 2015)*

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que f est continue.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$.
3. Exprimer $f(x)$ en fonction de x.

Remarque
Cet exercice a été posé à l'X en 2019 avec une seule question : calcul de $f(x)$.
Correction

1. Soit $g \begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ (x,t) \mapsto \dfrac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)} \end{cases}$
   - g est continue par rapport à x.
   - g est continue par rapport à t.
   - **Hypothèse de domination**
     On remarque que :
     $\forall y \in \mathbb{R}\ |\arctan y| \leq |y|$ (A.F.)
     L'hypothèse de domination est donc vérifiée sur tout segment $[-a;a]$ avec $a \in \mathbb{R}_+^*$:
     $\forall (x,t) \in [-a;a] \times \mathbb{R}_+^*\ |g(x,t)| \leq \dfrac{t\,|x|}{t(1+t^2)} = \dfrac{|x|}{1+t^2} \leq \dfrac{a}{1+t^2} = \varphi(t)$
     avec φ continue, positive et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

   On en déduit que f est continue sur $[-a;a]$ pour tout $a > 0$.
   On en déduit que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $g \begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ (x,t) \mapsto \dfrac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)} \end{cases}$
   - g est de classe $\mathcal{C}^1$ par rapport à x.
     $\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*\ \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t) = \dfrac{1}{(1+t^2)(1+x^2t^2)}$
   - Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x,.)$ est continue et intégrale sur $\mathbb{R}_+^*$ (cf la domination dans la question précédente).
   - Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,.)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
   - **Hypothèse de domination**
     $\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*\ \left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leq \dfrac{1}{1+t^2} = \varphi(t)$
     avec φ continue, positive et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

   On en déduit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec :
   $\forall x \in \mathbb{R}\ f'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)(1+x^2t^2)}$
3. Pour $x \neq -1, 0, 1$, on a :
   $\dfrac{1}{(1+t^2)(1+x^2t^2)} = \dfrac{at+b}{1+t^2} + \dfrac{ct+d}{1+x^2t^2}$
   La parité donne : $a = c = 0$.
   On multiplie par $1+t^2$ et on remplace t par i : $b = \dfrac{1}{1-x^2}$.
   On multiplie par $1+t^2x^2$ et on remplace t par $\dfrac{i}{x}$: $d = \dfrac{x^2}{x^2-1}$.

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}\ f'(x) &= \frac{1}{1-x^2} \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{x^2}{1+x^2t^2} \right) \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{1-x^2} \left[\arctan t - x \arctan(xt)\right]_0^{+\infty} \end{aligned}$$

   $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}\ f'(x) = \dfrac{\pi}{2} \dfrac{1-x}{1-x^2} = \dfrac{\pi}{2(1+x)}$
   Par continuité de f' et parité :

$$\forall x \in \mathbb{R}\ f'(x) = \frac{\pi}{2(1+|x|)}$$

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}_+\ f(x) &= f(0) + \int_0^x \frac{\pi}{2(1+t)}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\ln(1+x) \\ \forall x \in \mathbb{R}_-\ f(x) &= -f(-x) = -\frac{\pi}{2}\ln(1-x) \end{aligned}$$

Exercice 9 *(Mines 2022)*

Soit $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \sin(tx)\,\mathrm{d}t$.

1. Soit $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{2n+1}\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.
   Montrer que I_n est bien définie et déterminer sa valeur.
2. Développer F en série entière.
3. Trouver une équation différentielle dont F est solution et en déduire une expression simplifiée de F.

Correction

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \begin{cases} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ t \mapsto t^{2n+1}\,\mathrm{e}^{-t^2} \end{cases}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et :
   $t^2 f_n(t) = t^{2n+3}\,\mathrm{e}^{-t^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
   Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et I_n est bien définie.

   Soit $n \in \mathbb{N}$.
   $I_{n+1} = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{2n+3}\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} t^{2n+2}\,t\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$
   $u(t) = t^{2n+2}$, $u'(t) = (2n+2)t^{2n+1}$
   $v'(t) = t\,\mathrm{e}^{-t^2}$, $v(t) = -\dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-t^2}$
   u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et $u(t)v(t) = -\dfrac{1}{2}t^{2n+2}\,\mathrm{e}^{-t^2} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$.
   L'intégration par parties est justifiée.
   Comme $u(0)v(0) = 0$, on a directement :
   $I_{n+1} = \dfrac{2n+2}{2}\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{2n+1}\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = (n+1)I_n$
   Une récurrence immédiate donne :
   $\forall n \in \mathbb{N}\ I_n = n!I_1$
   $I_1 = \displaystyle\int_0^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-t^2}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2}$
   On en déduit :
   $\forall n \in \mathbb{N}\ I_n = \dfrac{n!}{2}$
2. $\forall x \in \mathbb{R}\ F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1} t^{2n+1}\,\mathrm{e}^{-t^2}}{(2n+1)!}\,\mathrm{d}t$.
   On fixe $x \in \mathbb{R}$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n \begin{cases} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \dfrac{(-1)^n x^{2n+1} t^{2n+1}\,\mathrm{e}^{-t^2}}{(2n+1)!} \end{cases}$
   - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

- La série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.
- La fonction $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \begin{cases} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}\sin(tx) \end{cases}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$
- La série $\sum_{n\geq 0} \int_0^{+\infty} |f_n(t)| \, \mathrm{d}t$ converge :

  $\forall n \in \mathbb{N} \int_0^{+\infty} |f_n(t)| \, \mathrm{d}t = \dfrac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} \int_0^{+\infty} t^{2n+1} \mathrm{e}^{-t^2} \, \mathrm{d}t = \dfrac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} I_n$ noté u_n

  Le cas $x = 0$ est clair. Dans le cas $x \neq 0$, $u_n > 0$ et :

  $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{|x|^{2n+3} I_{n+1}}{(2n+3)!} \times \dfrac{(2n+1)!}{|x|^{2n+1} I_n} = \dfrac{(n+1)x^2}{(2n+2)(2n+3)} = \dfrac{x^2}{2(2n+3)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 < 1$

  D'après la règle de d'Alembert, la série de terme général $\int_0^{+\infty} |f_n(t)| \, \mathrm{d}t$ converge.

D'après le théorème N1 :

$\forall x \in \mathbb{R} \; F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n+1} \dfrac{I_n}{(2n+1)!}$

La fonction F est donc développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

3. Soit $f \begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \\ (x,t) \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}\sin(tx) \end{cases}$.
   - f est $\mathcal{C}^1$ par rapport à x avec :

     $\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \; \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = t\,\mathrm{e}^{-t^2}\cos(tx)$
   - Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $f(x,.)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ ($f(x,t) = O_{t\to+\infty}\left(\mathrm{e}^{-t^2}\right)$)
   - Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,.)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$
   - **Hypothèse de domination**

     $\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \; \left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = t\,\mathrm{e}^{-t^2}\right| \leq t\,\mathrm{e}^{-t^2} = \phi(t)$

     avec ϕ continue, positive et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ ($t^2\phi(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$)

   Donc F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} \; F'(x) &= \int_0^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-t^2}\cos(tx)\,\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{-\mathrm{e}^{-t^2}}{2}\cos(tx)\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{-\mathrm{e}^{-t^2}}{2}(-x\sin(tx))\,\mathrm{d}t \\ & \quad \text{IPP facile à justifier} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{x}{2}F(x) \end{aligned}$$

   La solution générale de l'équation homogène associée est $y = C\,\mathrm{e}^{-x^2/4}$.

   La variation de la constante donne $C'(x)\,\mathrm{e}^{-x^2/4} = \dfrac{1}{2}$.

   Par conséquent :

   $\exists C \in \mathbb{R}$ tq $\forall x \in \mathbb{R} \; F(x) = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2/4} \int_0^x \mathrm{e}^{t^2/4}\,\mathrm{d}t + C\,\mathrm{e}^{x^2/4}$

   Mais $F(0) = 0$ donc :

   $\forall x \in \mathbb{R} \; F(x) = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2/4} \int_0^x \mathrm{e}^{t^2/4}\,\mathrm{d}t$