

TD 2025-2026
Analyse 2
Chapitre 4
Fonctions de plusieurs variables : calcul différentiel

941

1 Algèbre linéaire, algèbre bilinéaire et topologie

Exercice 1 (*X 2021*)

Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in]0; 1[^3$.

Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} a_{n+1} = \gamma a_n + \alpha b_n + \beta c_n \\ b_{n+1} = \alpha a_n + \beta b_n + \gamma c_n \\ c_{n+1} = \beta a_n + \gamma b_n + \alpha c_n \end{cases}.$$

Que dire du comportement asymptotique de chacune des suites ?

Exercice 2 (*X 2021*)

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

$\{(x, y, z) \in (\mathbb{R}^n)^3 \text{ tq } (x, y, z) \text{ est liée}\}$ est-elle une partie fermée de $(\mathbb{R}^n)^3$?

L'examineur a demandé de traiter les cas $n = 3$, $n = 2$ et $n = 4$ avant de passer au cas général.

2 Points intérieurs et ouverts

Exercice 3

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

Soient U un ouvert non vide de E et a un élément de E .

1. Montrer que $a + U = \{a + x, x \in U\}$ est un ouvert de E .
2. Soit A une partie non vide de E .
Montrer que $A + U = \{a + x, (a, x) \in A \times U\}$ est un ouvert de E .
3. Donner un exemple où $A + B$ est un ouvert de E mais où ni A ni B ne sont des ouverts de E .

Exercice 4

Soit E un espace vectoriel de dimension finie non nulle.

1. Soit F un sous-espace vectoriel de E . On suppose que 0 est point intérieur à F .
Montrer que $F = E$.
2. Soit G un sous-espace vectoriel de E .
Que peut-on dire de l'intérieur de G ?

3 Dérivées partielles, fonctions de classe $\mathcal{C}^1$...

Exercice 5 (Banque CCP MP)

On pose : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, $f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ et $f(0, 0) = 0$.

1. Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Démontrer que f admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$.
3. f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$? Justifier.

Exercice 6 (Banque CCP MP)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

On considère l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^4}{x^2 + y^2 - xy} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ \alpha & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

1. Prouver que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $x^2 + y^2 - xy \geq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.
2. (a) Justifier que le domaine de définition de f est bien $\mathbb{R}^2$.
(b) Déterminer α pour que f soit continue sur $\mathbb{R}^2$.
3. Dans cette question, on suppose que $\alpha = 0$.
(a) Justifier l'existence de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et les calculer.
(b) Justifier l'existence de $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ et donner leur valeur.
(c) f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 7 (Banque CCP MP)

On considère l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 8 (Centrale 99)

On définit la fonction de deux variables sur $\mathbb{R}^2$:

$$f(x, y) = x^2 \sin\left(\frac{y}{x}\right) \text{ pour } (x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$$

1. Montrer que f se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. f admet-elle des dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2$?
3. f est-elle $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?
4. Calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$.

Exercice 9 (*Centrale 2017, Mines 2023*)

Soit f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

On dit que f est α -positive homogène si, et seulement si :

$$\forall \lambda > 0 \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^\alpha f(x, y, z)$$

Montrer que cela équivaut à :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) + z \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = \alpha f(x, y, z)$$

4 Equations aux dérivées partielles**Exercice 10** (*Centrale 2014*)

$$y \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - x \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2(y^2 - x^2) f(x, y) \quad (1)$$

Soit $\Phi \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (u, v) = (x^2 + y^2, x + y) \end{cases}$

1. Montrer que $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } x > y\}$ et $\Delta = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } v^2 < 2u\}$ sont des ouverts de $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que Φ réalise une bijection de Ω sur Δ .
Montrer que Φ et sa bijection réciproque sont de classe $\mathcal{C}^1$.
3. On définit g telle que $f = g \circ \Phi$.
Si f vérifie (1), trouver l'équation aux dérivées partielles vérifiée par g .
4. Résoudre cette équation aux dérivées partielles.
5. En déduire l'ensemble des solutions de (1).

Exercice 11 (*Centrale 2017*)

Résoudre $\frac{\partial f}{\partial x} - xy \frac{\partial f}{\partial y} = 0$.

Indication :

On posera $(u, v) = (x, y e^{x^2/2})$.

Exercice 12 (*Centrale 2014*)

On considère l'équation aux dérivées partielles $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - 4 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$, l'inconnue étant une fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$.

1. On effectue le changement de variables : $(u, v) = (x + 2y, x - 2y)$:
 - Montrer que $\Phi \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (u, v) = (x + 2y, x - 2y) \end{cases}$ est une bijection, de classe $\mathcal{C}^2$ ainsi que sa bijection réciproque.
 - Montrer qu'il existe une fonction g telle que $g(u, v) = f(x, y)$ ie $g \circ \Phi = f$ et former l'équation aux dérivées partielles vérifiée par g .
 - Résoudre.

2. Existe-t-il une solution telle que :

$$* \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0, y) = 0$$

$$* \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) = 0$$

5 Extrema

Exercice 13 (*Centrale 2012*)

Soit $f : (x, y) \mapsto (x^2 - y)(3x^2 - y)$.

1. Si D est une droite passant par $(0, 0)$, montrer que f restreinte à D possède un minimum local en $(0, 0)$.
2. Montrer que f ne possède pas de minimum local en $(0, 0)$.

Exercice 14 (*Centrale 2017*)

Soient a, b et c trois réels avec $a \neq 0$.

Chercher les extrema de la fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto ax^2 + bxy + cy^2 \end{cases}$.

Exercice 15 (*Centrale 2017*)

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto \frac{x + y + 1}{3} - \sqrt[3]{xy} \end{cases}$.

Extrema locaux et globaux.

Exercice 16 (*Centrale 2009*)

1. Soit φ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Soit $a \in \mathbb{R}$ un point où φ admet un maximum local.
Montrer que $\varphi''(a) \leq 0$.
2. Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ qui vérifie les propriétés suivantes :
 - i f est nulle sur $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } x^2 + y^2 = 1\}$.
 - ii $\forall (x, y) \in D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } x^2 + y^2 < 1\} \quad \Delta f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) > 0$
 - (a) Soient a, b et $h \in \mathbb{R}$.
Soit $\psi : t \mapsto f(a + th, b)$
Calculer $\psi''(0)$.
 - (b) Montrer que : $\forall (x, y) \in D \quad f(x, y) < 0$
3. Montrer que :
 $\forall (x, y) \in D \quad f(x, y) \leq 0$
 si on remplace (ii) par
 - ii' $\forall (x, y) \in D \quad \Delta f(x, y) \geq 0$
 On pourra utiliser, pour $\epsilon > 0$, la fonction $f_\epsilon : (x, y) \mapsto f(x, y) + \epsilon(x^2 + y^2 - 1)$.

4. Que dire de f si f est nulle sur Γ et si :
- $$\forall (x, y) \in D \quad \Delta f(x, y) = 0$$

Exercice 17 (CCP)

On pose pour tous réels x et y : $f(x, y) = \begin{cases} y(x - y) & \text{si } x \geq y \\ x(y - x) & \text{si } x < y \end{cases}$

1. Etudier la continuité de f .
2. f est-elle $\mathcal{C}^1$?
3. Existence et calcul du maximum de f sur $[0, 1]^2$.

Exercice 18 (Mines)

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que l'application de $(\mathbb{R}_+^*)^2$ dans $\mathbb{R}$ qui à (x, y) associe $\frac{a}{x} + \frac{a}{y} + \frac{xy}{a^2}$ admet un minimum global. Le calculer.

Exercice 19 (Mines 2015)

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto x^2y^2 + x^2 + y^2 - 2axy \end{cases}, a \in \mathbb{R}.$

Extrema.

Exercice 20 (Centrale 2019)

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique.

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

1. Dans cette question, $n = 1$.
On suppose :
 $\forall x \in \mathbb{R} \quad |x| \geq 1 \implies xf'(x) \geq 0$
Etudier l'existence d'un minimum global.
2. Dans cette question, $n \geq 2$.
On suppose :
 $\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \|x\| \geq 1 \implies (x|\nabla f(x)) \geq 0$
Etudier l'existence d'un minimum global.

Exercice 21 (CCP 2011)

Déterminer les extrema de $f : (x, y) \mapsto (x^2 - 1)^2 + (x^2 - e^y)^2$.

Exercice 22 (Mines 2015)

Soient $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 6\}$.

Soit $f : \begin{cases} \Delta \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto x^2y(x + y - 4) \end{cases}$.

1. Tracer Δ .
2. Trouver les extrema locaux et globaux de f sur Δ .

Exercice 23 (CCP 2018)

1. Soit $g \begin{cases} \mathbb{R}_-^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x \exp\left(\frac{1}{x}\right) + \exp(x) \end{cases}$.

Montrer que g est croissante et calculer $g(-1)$.

2. Soit $f \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto x e^y + y e^x \end{cases}$.

Montrer que si (x_0, y_0) est un point critique, alors $x_0 < 0$, $x_0 y_0 = 1$ et $g(x_0) = 0$.

Déterminer le(s) point(s) critique(s).

3. f admet-elle un extremum local ?

4. Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } |x| \leq 1 \text{ et } |y| \leq 1\}$.

Déterminer le minimum et le maximum de f sur D en justifiant leur existence.