TD 2025-2026
Analyse 2
Chapitre 4
Fonctions de plusieurs variables : calcul différentiel

941

1 Algèbre linéaire, algèbre bilinéaire et topologie

Exercice 1 *(X 2021)*

Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in]0;1[^3$.
Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} a_{n+1} = \gamma a_n + \alpha b_n + \beta c_n \\ b_{n+1} = \alpha a_n + \beta b_n + \gamma c_n \\ c_{n+1} = \beta a_n + \gamma b_n + \alpha c_n \end{cases}.$$

Que dire du comportement asymptotique de chacune des suites ?

Correction

Soit $A = \begin{pmatrix} \gamma & \alpha & \beta \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & \gamma & \alpha \end{pmatrix}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$ donc :
$\forall n \in \mathbb{N}\ X_n = A^n X_0$
A est symétrique réelle, l'examinateur a reproché au candidat de ne pas l'avoir vu rapidement.
On en déduit que A est diagonalisable.
La somme des coefficients vaut $\alpha + \beta + \gamma$ sur chaque ligne donc $\alpha + \beta + \gamma$ est valeur propre de A avec comme vecteur propre associé $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
$\alpha + \beta + \gamma$ est aussi la trace de A donc les deux valeurs propres de A qui nous manquent sont de

la forme λ et $-\lambda$ avec $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

$$\begin{aligned}
-\lambda^2(\alpha+\beta+\gamma) &= \det(A) = \begin{vmatrix} \gamma & \alpha & \beta \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & \gamma & \alpha \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \alpha+\beta+\gamma & \alpha & \beta \\ \alpha+\beta+\gamma & \beta & \gamma \\ \alpha+\beta+\gamma & \gamma & \alpha \end{vmatrix} \\
&= (\alpha+\beta+\gamma) \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 1 & \beta & \gamma \\ 1 & \gamma & \alpha \end{vmatrix} \\
&= (\alpha+\beta+\gamma) \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & \beta-\alpha & \gamma-\beta \\ 0 & \gamma-\alpha & \alpha-\beta \end{vmatrix} \\
&= -(\alpha+\beta+\gamma)\left(\gamma^2-\alpha\gamma-\beta\gamma+\alpha\beta+\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\right)
\end{aligned}$$

On en déduit, après simplification par $\alpha+\beta+\gamma > 0$:
$\lambda^2 = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\alpha\gamma-\beta\gamma = \dfrac{1}{2}\left((\alpha-\beta)^2+(\alpha-\gamma)^2+(\beta-\gamma)^2\right)$
Dans la matrice initiale, α, β et γ ne jouent pas le même rôle mais dans cette formule si.

Soit $f \begin{cases} [0;1]^3 \to \mathbb{R} \\ (x,y,z) \mapsto x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz \end{cases}$
f est continue sur $[0;1]^3$ qui est fermé et borné donc f possède un minimum et un maximum.
Le minimum est facile à déterminer :
$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ f(x,y,z) = \dfrac{1}{2}\left((x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right) \geq 0$ avec égalité pour $x=y=z$.
Le maximum est plus difficile à déterminer :
L'expression $\dfrac{1}{2}\left((x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right)$ fait jouer le même rôle à x, y et z donc on peut supposer $0 \leq x \leq y \leq z \leq 1$

$$\begin{aligned}
f(x,y,z) \leq \frac{1}{2}\left(y^2+(1-y)^2+1\right) &= y^2-y+1 \\
&= \left(y-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4} \leq \frac{1}{4}+\frac{3}{4} = 1
\end{aligned}$$

avec égalité si, et seulement si deux des trois nombres sont égaux à 0 et le troisième à 1 ou deux des trois nombres sont égaux à 1 et le troisième à 0.
On peut également utiliser la théorie des fonctions de plusieurs variables :
Le maximum de f est atteint en un point où ∇f est nul situé à l'intérieur ou sur la frontière.

$\nabla f(x,y,z) = (2x-y-z, 2y-x-z, 2z-x-y)$ donc :

$$\begin{aligned}
\nabla f(x,y,z) = (0,0,0) &\iff \begin{cases} 2x-y-z=0 \\ 2y-x-z=0 \\ 2z-x-y=0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 2x-y-z=0 \\ 2y-x-z=0 \\ 0=0 \end{cases} \quad L_3 \leftarrow L_3+L_1+L_2 \\
&\iff \begin{cases} 2x-y-z=0 \\ x=y \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2-L_1 \\
&\iff x=y=z
\end{aligned}$$

$f(x,x,x)=0$ donc le maximum de f est atteint sur le bord : une des trois variables vaut 0 ou 1.
Compte tenu de la symétrie des rôles, on peut supposer $z=0$ ou 1.
Mais $f(x,y,z) = f(1-x, 1-y, 1-z)$ donc on peut supposer $z=0$.
Il faut donc chercher le maximum de $g \begin{cases} [0;1]^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto x^2+y^2-xy \end{cases}$.
$\forall (x,y) \in [0;1]^2\ \nabla g(x,y) = (2x-y, 2y-x)$
∇g ne s'annule qu'en $(0,0)$ qui est sur le bord.
Donc le maximum de g est atteint sur le bord ie $x=0$ ou $x=1$ ou $y=0$ ou $y=1$.
Si $x=0$, alors $g(x,y)=g(0,y)$ croît de 0 à 1.
Si $x=1$ alors $g(1,y) = y^2-y+1$ a été étudié précédemment.
$g(x,y)=g(y,x)$ donc il est inutile de traiter les deux cas restants.
Le maximum de g est 1.
Le maximum de f est 1, atteint sur le bord.
Par conséquent, $\pm\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\alpha\gamma-\beta\gamma} \in]-1;1[$.

$A = PDP^T$ avec $P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & ? & ? \\ 1/\sqrt{3} & ? & ? \\ 1/\sqrt{3} & ? & ? \end{pmatrix} \in O(3)$ et $D = \mathrm{Diag}(\alpha+\beta+\gamma, \lambda, -\lambda)$.

On sait que pour une matrice diagonalisable :
$(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si, et seulement si,le spectre de A est contenu dans $D(0;1) \cup \{1\}$.
Ici $\alpha+\beta+\gamma \in]0;3[$ et on ne peut rien dire de plus.
Si $\alpha+\beta+\gamma < 1$ alors $A^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$: les trois suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers 0.
Si $\alpha+\beta+\gamma = 1$ alors $A^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} P\mathrm{Diag}(1,0,0)P^T = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{pmatrix} = \dfrac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
Les trois suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers $\dfrac{a_0+b_0+c_0}{3}$.
Si $\alpha+\beta+\gamma > 1$ alors on pose $B = \dfrac{1}{\alpha+\beta+\gamma} A$. C'est une matrice du même type que A mais cette fois la somme des paramètres vaut 1.

Donc $\dfrac{1}{(\alpha+\beta+\gamma)^n}A^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$

Si $a_0+b_0+c_0>0$, les trois suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent vers $+\infty$.
Si $a_0+b_0+c_0<0$, les trois suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent vers $-\infty$.
Reste le cas où $a_0+b_0+c_0=0$.
Si on revient à l'énoncé, on voit que $a_{n+1}+b_{n+1}+c_{n+1}=a_n+b_n+c_n$ donc :
$\forall n\in\mathbb{N}\ a_n+b_n+c_n=0$
On en déduit :

$$\begin{aligned}
X_n &= A^nX_0=PD^NP^TX_0=PD^n\begin{pmatrix}1/\sqrt{3}&1/\sqrt{3}&1/\sqrt{3}\\?&?&?\\?&?&?\end{pmatrix}X_0\\
&= P\begin{pmatrix}(\alpha+\beta+\gamma)^n&0&0\\0&\lambda^n&0\\0&0&(-1)^n\lambda^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\?\\?\end{pmatrix}\\
&= P\begin{pmatrix}0\\?\times\lambda^n\\?\times(-1)^n\lambda^n\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Donc les trois suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers 0.

Exercice 2 *(X 2021)*

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
$\left\{(x,y,z)\in(\mathbb{R}^n)^3 \text{ tq } (x,y,z) \text{ est liée}\right\}$ est-elle une partie fermée de $(\mathbb{R}^n)^3$?
L'examinateur a demandé de traiter les cas $n=3$, $n=2$ et $n=4$ avant de passer au cas général.

Correction

- **Cas** $n=3$.
  $\left\{(x,y,z)\in(\mathbb{R}^3)^3 \text{ tq } (x,y,z) \text{ est liée}\right\}=\left\{(x,y,z)\in(\mathbb{R}^3)^3 \text{ tq } \det_{Can}(x,y,z)=0\right\}$.
  $\det_{Can}$ est une application continue de $(\mathbb{R}^3)^3$ dans $\mathbb{R}$ donc $\left\{(x,y,z)\in(\mathbb{R}^3)^3 \text{ tq } (x,y,z) \text{ est liée}\right\}$ est une partie fermée de $(\mathbb{R}^3)^3$.
- **Cas** $n=2$.
  $\left\{(x,y,z)\in(\mathbb{R}^2)^3 \text{ tq } (x,y,z) \text{ est liée}\right\}=(\mathbb{R}^2)^3$ donc $\left\{(x,y,z)\in(\mathbb{R}^2)^3 \text{ tq } (x,y,z) \text{ est liée}\right\}$ est une partie fermée de $(\mathbb{R}^2)^3$
- **Cas** $n=4$.
  Cette question n'est pas dans l'esprit du programme et de ce fait difficile à traiter avec les outils du programme.
  Si la famille (x,y,z) est liée alors pour tout $t\in\mathbb{R}^4$, la famille (x,y,z,t) est liée.
  Si la famille (x,y,z) est libre alors d'après le théorème de la base incomplète, il existe $t\in\mathbb{R}^4$ tel que la famille (x,y,z,t) soit libre.
  Donc :

$$\begin{aligned}
(x,y,z) \text{ liée} &\iff \forall t\in\mathbb{R}^4\ (x,y,z,t) \text{ liée}\\
&\iff \forall t\in\mathbb{R}^4\ \det_{Can}(x,y,z,t)=0
\end{aligned}$$

Donc $\left\{(x,y,z)\in\left(\mathbb{R}^4\right)^3 \text{ tq } (x,y,z) \text{ est liée}\right\} = \bigcap_{t\in\mathbb{R}^4}\left\{(x,y,z)\in\left(\mathbb{R}^4\right)^3 \text{ tq } \det_{Can}(x,y,z,t)=0\right\}$
est une intersection de fermés donc un fermé.

- **Cas général**
$\left\{(x,y,z)\in(\mathbb{R}^n)^3 \text{ tq } (x,y,z) \text{ est liée}\right\} = \bigcap_{(t_1,\dots,t_{n-3})\in(\mathbb{R}^n)^{n-3}}\left\{(x,y,z)\in(\mathbb{R}^n)^3 \text{ tq } \det_{Can}(x,y,z,t_1,\dots,t_{n-3}) =$
est une intersection de fermés donc un fermé.

Remarque
La méthode précédente s'applique si on remplace $\mathbb{R}^n$ par $\mathbb{C}^n$.
Dans $\mathbb{R}^n$, une méthode complètement différente est possible.
On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique et on considère la matrice $M = \begin{pmatrix}(x\mid x) & (x\mid y) & (x\mid z)\\(y\mid x) & (y\mid y) & (y\mid z)\\(z\mid x) & (z\mid y) & (z\mid z)\end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
&\forall(a,b,c)\in\mathbb{R}^3 \ \begin{pmatrix}a & b & c\end{pmatrix} M \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\\
= &\begin{pmatrix}a & b & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a(x\mid x)+b(x\mid y)+c(x\mid z)\\a(y\mid x)+b(y\mid y)+c(y\mid z)\\a(z\mid x)+b(z\mid y)+c(z\mid z)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a & b & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(x\mid ax+by+cz)\\(y\mid ax+by+cz)\\(z\mid ax+by+cz)\end{pmatrix}\\
= &\ a(x\mid ax+by+cz)+b(y\mid ax+by+cz)+c(z\mid ax+by+cz) = (ax+by+cz\mid ax+by+cz)\\
= &\ \|ax+by+cz\|^2
\end{aligned}$$

Supposons (x,y,z) libre.
Soit $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\in\operatorname{Ker}(M)$.
On a $\|ax+by+cz\|^2=0$ donc $ax+by+cz=0$.
(x,y,z) est libre donc $(a,b,c)=(0,0,0)$.
$\operatorname{Ker}(M)$ est réduit à la colonne nulle donc M est inversible.
Supposons (x,y,z) liée.
Il existe $(a,b,c)\neq(0,0,0)$ tel que $ax+by+cz=0$.
$M\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(x\mid ax+by+cz)\\(y\mid ax+by+cz)\\(z\mid ax+by+cz)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ donc le noyau de M contient une colonne non nulle et M n'est pas inversible.
On a donc :
(x,y,z) liée $\Longleftrightarrow \begin{vmatrix}(x\mid x) & (x\mid y) & (x\mid z)\\(y\mid x) & (y\mid y) & (y\mid z)\\(z\mid x) & (z\mid y) & (z\mid z)\end{vmatrix}=0$

et la fonction $\begin{cases}(\mathbb{R}^n)^3 \to \mathbb{R}\\ (x,y,z)\mapsto \begin{vmatrix}(x\mid x) & (x\mid y) & (x\mid z)\\(y\mid x) & (y\mid y) & (y\mid z)\\(z\mid x) & (z\mid y) & (z\mid z)\end{vmatrix}\end{cases}$ est continue.

2 Points intérieurs et ouverts

Exercice 3

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.
Soient U un ouvert non vide de E et a un élément de E.

1. Montrer que $a + U = \{a + x, x \in U\}$ est un ouvert de E.
2. Soit A une partie non vide de E.
   Montrer que $A + U = \{a + x, (a, x) \in A \times U\}$ est un ouvert de E.
3. Donner un exemple où $A + B$ est un ouvert de E mais où ni A ni B ne sont des ouverts de E.

Correction
On munit E d'une norme notée $\|.\|$.

1. Soit $b \in a + U$: il existe $x_0 \in U$ tel que $b = a + x_0$.
   $x_0 \in U$ ouvert de E donc il existe $r > 0$ tel que $\mathcal{B}(x_0, r) \subset U$.
   On va montrer : $\mathcal{B}(b, r) \subset a + U$.
   Soit $c \in \mathcal{B}(b, r)$.
   On pose $x = c - a \in E$.
   $\|x - x_0\| = \|c - a - x_0\| = \|c - b\| < r$ donc $x \in \mathcal{B}(x_0, r) \subset U$ et $x \in U$.
   On en déduit $c = x + a \in a + U$.
2. $A + U = \bigcup_{a \in A} (a + U)$ est une réunion d'ouverts. C'est donc un ouvert.
3. $A = \mathbb{R}_+$, $B = \mathbb{R}_-$, $A + B = \mathbb{R}$.

Exercice 4

Soit E un espace vectoriel de dimension finie non nulle.

1. Soit F un sous-espace vectoriel de E. On suppose que 0 est point intérieur à F.
   Montrer que $F = E$.
2. Soit G un sous-espace vectoriel de E.
   Que peut-on dire de l'intérieur de G ?

Correction

1. On munit E d'une norme notée $\|.\|$.
   $\exists r > 0$ tq $\mathcal{B}(0, r, \|.\|) \subset F$
   Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E.
   $\frac{r}{2} e_i \in \mathcal{B}(0, r, \|.\|) \subset F$
   Donc $e_i = \frac{2}{r} \frac{r}{2} e_i \in F$
   Donc $E = Vect(e_1, \dots, e_n) \subset F$
2. Si $G = E$ alors l'intérieur de G est égal à E.
   On suppose désormais que G est strictement contenu dans E.
   Soit x un point intérieur à G.
   En particulier $x \in G$.
   $\exists r > 0$ tq $\mathcal{B}(x, r, \|.\|) \subset G$
   Soit $y \in \mathcal{B}(0, r, \|.\|)$
   Soit $z = x + y$

$\|z-x\| = \|y\| < r$ donc $z \in \mathcal{B}(x,r,\|.\|) \subset G$ et $z \in G$
D'où $y = (z \in G) - (x \in G) \in G$
Donc $\mathcal{B}(0,r,\|.\|) \subset G$ et 0 est point intérieur à G.
D'où $G = E$: absurde.
Donc l'intérieur de G est vide.

3 Dérivées partielles, fonctions de classe $\mathcal{C}^1$...

Exercice 5 *(Banque CCP MP)*

On pose : $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $f\,(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ et $f\,(0,0) = 0$.

1. Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Démontrer que f admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$.
3. f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$? Justifier.

Correction

1. Par opérations sur les fonctions continues, f est continue sur l'ouvert $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

   On considère la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^2$ définie par $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $||(x,y)||_2 = \sqrt{x^2+y^2}$.
   On a $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $|x| \leqslant ||(x,y)||_2$ et $|y| \leqslant ||(x,y)||_2$.
   On en déduit que $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $|f(x,y) - f(0,0)| = \dfrac{|x||y|}{||(x,y)||_2} \leqslant \dfrac{(||(x,y)||_2)^2}{||(x,y)||_2} = ||(x,y)||_2 \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$.
   On en déduit que f est continue en $(0,0)$.

   Ainsi f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

2. Par opérations sur les fonctions admettant des dérivées partielles, f admet des dérivées partielles en tout point de l'ouvert $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
   En $(0,0)$:
   $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{1}{t}\,(f(t,0) - f(0,0)) = 0$, donc f admet une dérivée partielle en $(0,0)$ par rapport à sa première variable et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$.
   De même, $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{1}{t}\,(f(0,t) - f(0,0)) = 0$. Donc f admet une dérivée partielle en $(0,0)$ par rapport à sa seconde variable et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

3. D'après le cours, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ si et seulement si $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ existent et sont continues sur $\mathbb{R}^2$.
   Or, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{y^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$.
   On remarque que $\forall\,x > 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,x) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

Donc, $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,x) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \neq \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$.
On en déduit que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ n'est pas continue en $(0,0)$.
Donc f n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 6 *(Banque CCP MP)*

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

On considère l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^4}{x^2+y^2-xy} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ \alpha & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

1. Prouver que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $x^2+y^2-xy \geqslant \dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$.
2. (a) Justifier que le domaine de définition de f est bien $\mathbb{R}^2$.
   (b) Déterminer α pour que f soit continue sur $\mathbb{R}^2$.
3. Dans cette question, on suppose que $\alpha = 0$.
   (a) Justifier l'existence de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et les calculer.
   (b) Justifier l'existence de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ et donner leur valeur.
   (c) f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

Correction

1. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. $x^2+y^2-xy-\dfrac{1}{2}(x^2+y^2) = \dfrac{1}{2}(x^2+y^2-2xy) = \dfrac{1}{2}(x-y)^2 \geqslant 0$.
   Donc $x^2+y^2-xy \geqslant \dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$.
2. (a) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
   D'après 1., $x^2+y^2-xy = 0 \iff x^2+y^2 = 0 \iff x = y = 0$.
   Ainsi, f est définie sur $\mathbb{R}^2$.
   (b) D'après les théorèmes généraux, f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
   D'après **1.**, pour $(x,y) \neq (0,0)$, $0 \leqslant f(x,y) \leqslant \dfrac{2y^4}{x^2+y^2} \leqslant \dfrac{2(x^2+y^2)^2}{x^2+y^2}$.
   Ainsi, $0 \leqslant f(x,y) \leqslant 2(x^2+y^2) \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$.
   Or : f est continue en $(0,0) \iff f(x,y) \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} f(0,0) = \alpha$.
   Donc : f est continue en $(0,0) \iff \alpha = 0$.
   Conclusion : f est continue sur $\mathbb{R}^2 \iff \alpha = 0$.
3. (a) D'après les théorèmes généraux, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
   $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{-y^4(2x-y)}{(x^2+y^2-xy)^2}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{2y^5-3xy^4+4x^2y^3}{(x^2+y^2-xy)^2}$.
   (b) Pour tout $x \neq 0$, $\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = 0 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ existe et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$.

   Pour tout $y \neq 0$, $\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = y \underset{y\to 0}{\longrightarrow} 0$, donc $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existe et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

(c) Pour montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, montrons que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$.
Pour cela, il suffit de montrer qu'elles sont continues en $(0,0)$.
$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, on note $r = \sqrt{x^2+y^2}$. On a alors $|x| \leqslant r$ et $|y| \leqslant r$.
De plus, $(x,y) \to (0,0) \iff r \to 0$.

D'après **1.** et l'inégalité triangulaire,
$\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right| \leqslant 4\,\dfrac{|y^4(2x-y)|}{(x^2+y^2)^2} \leqslant 4\,\dfrac{r^4(2r+r)}{r^4} = 12r \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0.$
$\left|\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right| \leqslant 4\,\dfrac{|2y^5-3xy^4+4x^2y^3|}{(x^2+y^2)^2} \leqslant 4\,\dfrac{2r^5+3r^5+4r^5}{r^4} = 36r \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0.$
Donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont continues en $(0,0)$ et par suite sur $\mathbb{R}^2$.
Ainsi, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 7 *(Banque CCP MP)*

On considère l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Correction

1. $(x,y) \mapsto x^2+y^2$ et $(x,y) \mapsto xy(x^2-y^2)$ sont continues sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ et $(x,y) \mapsto x^2+y^2$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ donc, f est continue sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$.
   Continuité en (0,0) :

   On a, en utilisant $ab \leq \frac{a^2+b^2}{2} \leq a^2+b^2$ et l'inégalité triangulaire, $|f(x,y) - f(0,0)| = \left|xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right| \leqslant |x|.|y| \leqslant \|(x,y)\|^2$.
   Donc f est continue en $(0,0)$.
2. f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ si et seulement si $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent sur $\mathbb{R}^2$ et sont continues sur $\mathbb{R}^2$.
   f admet des dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ et elles sont continues sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$.
   De plus, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{x^4y+4x^2y^3-y^5}{(x^2+y^2)^2}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{x^5-4x^3y^2-xy^4}{(x^2+y^2)^2}$. (**)
   Existence des dérivées partielles en $(0,0)$:

   $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = 0$; donc $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ existe et $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$.
   De même, $\forall\, y \in \mathbb{R}^*$, $\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = 0$, donc $\lim\limits_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = 0$; donc $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existe et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.
   Continuité des dérivées partielles en $(0,0)$:

   En passant en polaires, on montre : $\forall\, (x,y) \in \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$,
   $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| \leqslant \dfrac{6\|(x,y)\|^5}{\|(x,y)\|^4} = 6\|(x,y)\|$ et $\left|\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| \leqslant \dfrac{6\|(x,y)\|^5}{\|(x,y)\|^4} = 6\|(x,y)\|$.

Donc $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.
Donc $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues en $(0,0)$.
Conclusion : $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent et sont continues sur $\mathbb{R}^2$, donc f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 8 *(Centrale 99)*

On définit la fonction de deux variables sur $\mathbb{R}^2$:

$$f(x,y) = x^2 \sin\left(\frac{y}{x}\right) \text{ pour } (x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$$

1. Montrer que f se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. f admet-elle des dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2$?
3. f est-elle $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?
4. Calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

Correction

1. On note $U = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.
   U est l'image réciproque de $\mathbb{R}^*$, ouvert de $\mathbb{R}$, par $\begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto x \end{cases}$ polynômiale donc continue.
   On en déduit que U est un ouvert de $\mathbb{R}$.
   La fonction $\begin{cases} U \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto \dfrac{y}{x} \end{cases}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur U car rationnelle.
   sin étant $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, la fonction $\begin{cases} U \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto \sin\left(\dfrac{y}{x}\right) \end{cases}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur U.
   D'où f $\mathcal{C}^\infty$ sur U.

   Soit $(x_0,y_0) \in \{0\} \times \mathbb{R}$.
   $f(x,y) \xrightarrow[\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\(x,y)\in U}]{} 0$.
   En effet : $x^2 \xrightarrow[\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\(x,y)\in U}]{} 0$ et $\begin{cases} U \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto \sin\left(\dfrac{y}{x}\right) \end{cases}$ est bornée sur U.
   On pose donc :
   $$\boxed{\forall y \in \mathbb{R}\ f(0,y) = 0}$$
   (et c'est la seule façon de faire pour avoir f continue sur $\mathbb{R}^2$)
   $f(x,y) \xrightarrow[\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\(x,y)\in U}]{} 0 = f(x_0,y_0)$ et $f(x,y) = 0 \xrightarrow[\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\(x,y)\in \{0\}\times\mathbb{R}}]{} 0 = f(x_0,y_0)$.
   Donc f est continue en (x_0,y_0).
   D'où f continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. f étant $\mathcal{C}^\infty$ sur U, elle a des dérivées de tout ordre en tout point de U.
   Soit $(x_0,y_0) \in \{0\} \times \mathbb{R}$.
   $\forall y \in \mathbb{R}\ f(x_0,y) = f(0,y) = 0$

Cette fonction est dérivable en $y = y_0$ de dérivée 0.
Donc $\partial_2 f(0, y_0)$ existe et vaut 0.

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_0\}\ \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} = \frac{x^2 \sin\left(\dfrac{y}{x}\right) - 0}{x - 0} = x \sin\left(\frac{y}{x}\right) \xrightarrow[\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}]{} 0$$

Donc $\partial_1 f(0, y_0)$ existe et vaut 0.
Donc les fonctions $\partial_1 f$ et $\partial_2 f$ sont définies sur $\mathbb{R}^2$.

3. f est $\mathcal{C}^1$ sur U.

$$\begin{aligned}\forall (x, y) \in U\ \partial_1 f(x, y) &= 2x \sin\left(\frac{y}{x}\right) + x^2 \times \left(-\frac{y}{x^2}\right) \cos\left(\frac{y}{x}\right) \\ &= 2x \sin\left(\frac{y}{x}\right) - y \cos\left(\frac{y}{x}\right)\end{aligned}$$

Soit $y_0 \in \mathbb{R}^*$.
$2x \sin\left(\dfrac{y}{x}\right) \xrightarrow[\substack{(x,y) \to (0,y_0) \\ x \neq 0}]{} 0$ mais $y \cos\left(\dfrac{y}{x}\right)$ n'a pas de limite.
Donc $\partial_1 f$ n'est pas continue en $(0, y_0)$.
Déjà f n'est pas $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
On peut tout de même aller plus loin :
Si $y_0 = 0$, alors $\partial_1 f(x, y) \xrightarrow[\substack{(x,y) \to (x_0,y_0) \\ (x,y) \in U}]{} 0 = \partial_1 f(0, 0)$ et $\partial_1 f(x, y) \xrightarrow[\substack{(x,y) \to (x_0,y_0) \\ x = 0}]{} 0 = \partial_1 f(0, 0)$.
Donc $\partial_1 f$ est continue en $(0, 0)$.
$\forall (x, y) \in U\ \partial_2 f(x, y) = x \cos\left(\dfrac{y}{x}\right)$
En raisonnant comme pour f, on peut en déduire que $\partial_2 f$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.
Le plus grand ouvert sur lequel f est $\mathcal{C}^1$ est U.

4. $\forall (x, y) \in U\ \partial_2 f(x, 0) = x \cos\left(\dfrac{0}{x}\right) = x$ valable également si $x = 0$.
Donc $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 1$ (et existe bien sûr).
$\forall y \in \mathbb{R}\ \partial_1 f(0, y) = 0$
Donc $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = 0$
Il n'y a pas de contradiction car f n'est pas $\mathcal{C}^2$ au voisinage de 0 (elle n'y est même pas $\mathcal{C}^1$).

Exercice 9 *(Centrale 2017, Mines 2023)*

Soit f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.
On dit que f est α-positive homogène si, et seulement si :
$\forall \lambda > 0\ \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\ f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^\alpha f(x, y, z)$
Montrer que cela équivaut à :
$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\ x \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) + y \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) + z \dfrac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = \alpha f(x, y, z)$

Correction
On suppose que f est α-positive homogène.

$\forall \lambda > 0\ \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^\alpha f(x,y,z)$
On fixe x, y et z et on dérive par rapport à λ :
$\forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*\ \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ x\,\partial_1 f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) + y\,\partial_2 f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) + z\,\partial_3 f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \alpha \lambda^{\alpha-1}\, f(x,y,z)$
Il ne reste plus qu'à évaluer en $\lambda = 1$.

Réciproquement, on suppose :
$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ x\,\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) + y\,\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) + z\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \alpha\, f(x,y,z)$
On fixe x, y et z.
Soit $g : \lambda \mapsto f(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$.
g est $\mathcal{C}^1$ et
$\forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*\ g'(t) = x\,\partial_1 f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) + y\,\partial_2 f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) + z\,\partial_3 f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \dfrac{\alpha}{\lambda}\, g(\lambda)$
La résolution de l'équation différentielle est triviale et :
$\exists C \in \mathbb{R}$ tq $\forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*\ g(\lambda) = C\,\lambda^\alpha$.
$\lambda = 1$ donne $C = f(x,y,z)$ et on a :
$\forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*\ f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = g(\lambda) = f(x,y,z)\,\lambda^\alpha$

4 Equations aux dérivées partielles

Exercice 10 *(Centrale 2014)*

$$y\,\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - x\,\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2\,(y^2 - x^2)\,f(x,y) \tag{1}$$

Soit $\Phi \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto (u,v) = (x^2+y^2, x+y) \end{cases}$

1. Montrer que $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } x > y\}$ et $\Delta = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } v^2 < 2\,u\}$ sont des ouverts de $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que Φ réalise une bijection de Ω sur Δ.
   Montrer que Φ et sa bijection réciproque sont de classe $\mathcal{C}^1$.
3. On définit g telle que $f = g \circ \Phi$.
   Si f vérifie (1), trouver l'équation aux dérivées partielles vérifiée par g.
4. Résoudre cette équation aux dérivées partielles.
5. En déduire l'ensemble des solutions de (1).

Correction

1. La fonction $F \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto x - y \end{cases}$ est continue car polynomiale.
   Donc $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } F(x,y) > 0\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
   La fonction $G \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (u,v) \mapsto 2u - v^2 \end{cases}$ est continue car polynomiale.
   Donc $\Delta = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } G(u,v) > 0\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
   Il est recommandé de faire deux dessins pour représenter ces deux parties.

2. $(x+y)^2 - 2\,(x^2+y^2) = -(x-y)^2$ donc $\Phi(\Omega) \subset \Delta$.
   Réciproquement, soit $(u,v) \in \Delta$.

$$\begin{aligned}
\Phi(x,y) = (u,v) &\iff \begin{cases} x^2+y^2 = u \\ x+y = v \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} (x+y)^2 - 2\,x\,y = u \\ x+y = v \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x\,y = \dfrac{v^2-u}{2} \\ x+y = v \end{cases}
\end{aligned}$$

   On considère alors le polynôme $P(X) = X^2 - v\,X + \dfrac{v^2-u}{2}$ dont le discriminant est :
   $\Delta = v^2 - 2\,(v^2-u) = 2\,u - v^2 > 0$.
   Compte tenu de $x > y$, (u,v) a un antécédent et un seul dans Ω défini par :
   $x = \dfrac{v+\sqrt{2\,u-v^2}}{2}$ et $y = \dfrac{v-\sqrt{2\,u-v^2}}{2}$.
   Au vu des expressions le caractère $\mathcal{C}^1$ de Φ et de sa bijection réciproque est immédiat.
3. En fait, il s'agit de poser $g = f \circ \Phi^{-1}$.

$$\begin{aligned}
\forall (x,y) \in \Omega\ f(x,y) &= g(x^2+y^2, x+y) \\
\forall (x,y) \in \Omega\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 2\,x\,\frac{\partial g}{\partial u}(x^2+y^2,x+y) + \frac{\partial g}{\partial v}(x^2+y^2,x+y) \\
\forall (x,y) \in \Omega\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 2\,y\,\frac{\partial g}{\partial u}(x^2+y^2,x+y) + \frac{\partial g}{\partial v}(x^2+y^2,x+y) \\
\forall (x,y) \in \Omega\ y\,\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - x\,\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= (y-x)\,\frac{\partial g}{\partial v}(x^2+y^2,x+y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f \text{ solution de (1) sur } \Omega &\iff \forall (x,y) \in \Omega\ (y-x)\,\frac{\partial g}{\partial v}(x^2+y^2,x+y) = 2\,(y^2-x^2)\,f(x,y) \\
&\iff \forall (x,y) \in \Omega\ \frac{\partial g}{\partial v} \circ \Phi(x,y) = 2\,(x+y)\,g \circ \Phi(x,y) \\
&\iff \forall (u,v) \in \Delta\ \frac{\partial g}{\partial v}(u,v) = 2\,v\,g(u,v) \\
&\iff \exists \psi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}) \text{ tq } \forall (u,v) \in \Delta\ g(u,v) = \psi(u)\ \mathrm{e}^{v^2} \\
&\iff \exists \psi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}) \text{ tq } \forall (x,y) \in \Omega\ f(x,y) = \psi(x^2+y^2)\ \mathrm{e}^{(x+y)^2}
\end{aligned}$$

Exercice 11 *(Centrale 2017)*

Résoudre $\dfrac{\partial f}{\partial x} - xy\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$.
Indication :
On posera $(u,v) = \left(x, y\,\mathrm{e}^{x^2/2}\right)$.

Correction
Soit $\Phi \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto (u,v) = \left(x, y\,\mathrm{e}^{x^2/2}\right) \end{cases}$.

Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
Soit $(u,v) \in \mathbb{R}^2$.

$$\Phi(x,y) = (u,v) \iff \begin{cases} x = u \\ y\,\mathrm{e}^{x^2/2} = v \end{cases} \iff \begin{cases} x = u \\ y\,\mathrm{e}^{u^2/2} = v \end{cases} \iff \begin{cases} x = u \\ y = v\,\mathrm{e}^{-u^2/2} \end{cases}$$

Donc Φ est une bijection de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et $\Phi^{-1} \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (u,v) \mapsto (x,y) = \left(u, v\,\mathrm{e}^{-u^2/2}\right) \end{cases}$ est de classe $\mathcal{C}^1$.
Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.
On pose $g = f \circ \Phi^{-1}$.
On a alors $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et $f = g \circ \Phi$.
On a donc :

$$\begin{aligned} \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\ f(x,y) &= g\left(x, y\,\mathrm{e}^{x^2/2}\right) \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial g}{\partial u}\left(x, y\,\mathrm{e}^{x^2/2}\right) + xy\,\mathrm{e}^{x^2/2}\frac{\partial g}{\partial v}\left(x, y\,\mathrm{e}^{x^2/2}\right) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \mathrm{e}^{x^2/2}\frac{\partial g}{\partial v}\left(x, y\,\mathrm{e}^{x^2/2}\right) \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - xy\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{\partial g}{\partial u}\left(x, y\,\mathrm{e}^{x^2/2}\right) \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} f \text{ solution sur } \mathbb{R}^2 &\iff \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - xy\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \\ &\iff \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\ \frac{\partial g}{\partial u} \circ \Phi(x,y) = 0 \\ &\iff \forall (u,v) \in \mathbb{R}^2\ \frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = 0 \text{ car } \Phi(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2 \\ &\iff \exists \psi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \text{ tq } \forall (u,v) \in \mathbb{R}^2\ g(u,v) = \psi(v) \\ &\iff \exists \psi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \text{ tq } \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\ f(x,y) = \psi\left(y\,\mathrm{e}^{x^2/2}\right) \end{aligned}$$

Exercice 12 *(Centrale 2014)*

On considère l'équation aux dérivées partielles $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} - 4\,\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$, l'inconnue étant une fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$.

1. On effectue le changement de variables : $(u,v) = (x + 2\,y, x - 2\,y)$:

- Montrer que $\Phi \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto (u,v) = (x+2\,y, x-2\,y) \end{cases}$ est une bijection, de classe $\mathcal{C}^2$ ainsi que sa bijection réciproque.
- Montrer qu'il existe une fonction g telle que $g(u,v) = f(x,y)$ ie $g \circ \Phi = f$ et former l'équation aux dérivées partielles vérifiée par g.
- Résoudre.

2. Existe-t-il une solution telle que :

   * $\forall y \in \mathbb{R}\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y) = 0$
   * $\forall x \in \mathbb{R}\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,0) = 0$

Correction

1. - On trouve sans problème $\Phi^{-1} \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (u,v) \mapsto \left(\dfrac{u+v}{2}, \dfrac{u-v}{4}\right) \end{cases}$

     Le caractère $\mathcal{C}^2$ de Φ et de Φ^{-1} est clair.
   - Il suffit de poser $g = f \circ \Phi^{-1}$.

$$\begin{array}{rcl}
\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\ f(x,y) & = & g(x+2\,y, x-2\,y) \\
\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) & = & \dfrac{\partial g}{\partial u}(x+2\,y, x-2\,y) + \dfrac{\partial g}{\partial v}(x+2\,y, x-2\,y) \\
\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & = & \dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2}(x+2\,y, x-2\,y) + \dfrac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}(x+2\,y, x-2\,y) \\
 & & +\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(x+2\,y, x-2\,y) + \dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2}(x+2\,y, x-2\,y) \\
 & = & \dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2}(x+2\,y, x-2\,y) + 2\,\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(x+2\,y, x-2\,y) \\
 & & +\dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2}(x+2\,y, x-2\,y) \\
\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) & = & 2\,\dfrac{\partial g}{\partial u}(x+2\,y, x-2\,y) - 2\,\dfrac{\partial g}{\partial v}(x+2\,y, x-2\,y) \\
\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) & = & 2\left(2\,\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2}(x+2\,y, x-2\,y) - 2\,\dfrac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}(x+2\,y, x-2\,y)\right) \\
 & & -2\left(2\,\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(x+2\,y, x-2\,y) - 2\,\dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2}(x+2\,y, x-2\,y)\right) \\
 & = & 4\,\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2}(x+2\,y, x-2\,y) - 8\,\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(x+2\,y, x-2\,y) \\
 & & +4\,\dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2}(x+2\,y, x-2\,y) \\
\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) - 4\,\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & = & -16\,\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(x+2\,y, x-2\,y)
\end{array}$$

ie : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} - 4\,\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -16\,\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} \circ \Phi$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
f \text{ solution} &\iff \forall (u,v)\in\mathbb{R}^2\ \frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}(u,v)=0\\
&\iff \exists b_1\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \text{ tq } \forall (u,v)\in\mathbb{R}^2\ \frac{\partial g}{\partial v}(u,v)=b_1(v)\\
&\iff \exists (a,b)\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})^2 \text{ tq } \forall (u,v)\in\mathbb{R}^2\ g(u,v)=a(u)+b(v)\\
&\iff \exists (a,b)\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})^2 \text{ tq } \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\ f(x,y)=a(x+2\,y)+b(x-2\,y)
\end{aligned}$$

2. On conserve les notations précédentes.

$$\begin{aligned}
\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= a'(x+2\,y)+b'(x-2\,y)\\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 2\,a'(x+2\,y)-2\,b'(x-2\,y)\\
\forall y\in\mathbb{R}\ \frac{\partial f}{\partial x}(0,y) &= a'(2\,y)+b'(-2\,y)\\
\forall x\in\mathbb{R}\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,0) &= 2\ (a'(x)-b'(x))
\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
f \text{ vérifie les conditions} &\iff \begin{cases}\forall y\in\mathbb{R}\ a'(2\,y)+a'(-2\,y)=0\\ a-b=Cte\end{cases}\\
&\iff \begin{cases}a' \text{ est une fonction impaire}\\ b=a+Cte\end{cases}\\
&\iff f(x,y)=a(x+2\,y)+a(x-2\,y)+Cte \text{ avec } a \text{ paire}
\end{aligned}$$

Remarque
Si a est paire, il est facile de montrer que a' est impaire.
Réciproquement, si a'est impaire : $\forall x\in\mathbb{R}\ -a'(-x)=a'(x)$
En intégrant : $\exists C\in\mathbb{R}$ tq $\forall x\in\mathbb{R}\ a(-x)=a(x)+C$
Evalué en 0, cela donne $C=0$.

5 Extrema

Exercice 13 *(Centrale 2012)*

Soit $f:(x,y)\mapsto (x^2-y)(3x^2-y)$.

1. Si D est une droite passant par $(0,0)$, montrer que f restreinte à D possède un minimum local en $(0,0)$.
2. Montrer que f ne possède pas de minimum local en $(0,0)$.

Correction

1. • **Premier cas :** $D: x=0$
   $\forall y\in\mathbb{R}\ f(0,y)=y^2\geq 0=f(0,0)$
   f restreinte à D présente un minimum local (et aussi un minimum global) en $(0,0)$.

- **Deuxième cas :** $D \neq Oy$
  L'équation de D est de la forme $y = tx$ avec $t \in \mathbb{R}$ fixé.

$$\begin{aligned} f(x,tx) &= (x^2 - tx)(3x^2 - tx) = x^2(x-t)(3x-t) \\ &= x^2(t^2 - 4xt + 9x^2) \end{aligned}$$

  Si $t \neq 0$, $f(x,tx) \sim_{x\to 0} t^2x^2 \geq 0$
  Donc :
  $\exists \eta > 0$ tq $\forall x \in [-\eta;\eta]$ $f(x,tx) \geq 0 = f(0,0)$
  f restreinte à D présente un minimum local en $(0,0)$.
  Si $t = 0$ $f(x,0) = 3x^4 \geq 0 = f(0,0)$
  f restreinte à D présente un minimum local (et aussi un minimum global) en $(0,0)$.

2. $\forall x \in \mathbb{R}^*$ $f(x, 2x^2) = -x^4 < 0$
   De plus $(x, 2x^2) \xrightarrow[\substack{x\to 0 \\ x\neq 0}]{} (0,0)$ donc f ne possède pas de minimum local en $(0,0)$.

Exercice 14 *(Centrale 2017)*

Soient a, b et c trois réels avec $a \neq 0$.

Chercher les extrema de la fonction $f \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto ax^2 + bxy + cy^2 \end{cases}$.

Correction
Cherche-t-on les extrema locaux ou les extrema globaux ?
Par ailleurs, le recours aux formes quadratiques me paraît exclus par le programme.
Ma solution repose plutôt sur la mise sous forme canonique d'un trinôme du second degré.

- **Extrema globaux**
  $a \neq 0$. On va supposer $a > 0$.
  Si $a < 0$, on introduit $-f$. Bien sûr, maxima et minima s'échangent.
  $a > 0$ donc $f(x,0) = ax^2 \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$: f n'est pas majorée donc f n'a pas de maximum global.

$$f(x,y) = \left(\sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}}y\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}y^2$$

  Si $4ac - b^2 > 0$, on a :
  $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ $f(x,y) \geq 0$ avec égalité si, et seulement si, $(x,y) = (0,0)$.
  f présente un minimum global strict en $(0,0)$.
  Si $4ac - b^2 = 0$, on a :
  $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ $f(x,y) = \left(\sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}}y\right)^2 \geq 0$ avec égalité si, et seulement si, $x = -\frac{b}{2a}y$.
  f présente un minimum global en $(0,0)$
  Si $4ac - b^2 < 0$, $f\left(-\frac{b}{2a}y, y\right) \xrightarrow[y\to+\infty]{} -\infty$.
  f n'est pas minorée donc f n'a pas de minimum global.
- **Extrema locaux**
  Les points critiques sont donnés par le système $\begin{cases} 2ax + by = 0 \\ bx + 2cy = 0 \end{cases}$ de déterminant $4ac - b^2$.
  Si $4ac - b^2 \neq 0$, $(0,0)$ est le seul point critique.

Si $4ac - b^2 > 0$, f présente un minimum global (strict) sur (l'ouvert) $\mathbb{R}^2$ en $(0,0)$ donc un minimum local strict en $(0,0)$.
Si $4ac - b^2 < 0$ alors :
$\forall x \in \mathbb{R}^* \; f(x,0) = ax^2 > 0$
$\forall t \in \mathbb{R}^* \; f\left(bt, -2t\sqrt{a}\right) = (4ac - b^2)t^2 < 0$
Donc f ne présente pas d'extremum local en $(0,0)$.
Si $4ac - b^2 = 0$, les points critiques sont les points $(x,y) = \left(-\dfrac{b}{2a}y, y\right)$
Mais dans le cas où $4ac - b^2 = 0$, on a :
$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \; f(x,y) = \left(\sqrt{a}x + \dfrac{b}{2\sqrt{a}}y\right)^2$
En particulier :
$\forall y \in \mathbb{R} \; f\left(-\dfrac{b}{2a}y, y\right) = 0$
En tous ses points critiques, f présente un minimum global sur $\mathbb{R}^2$ donc un minimum local.

Exercice 15 *(Centrale 2017)*

Soit $f \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto \dfrac{x+y+1}{3} - \sqrt[3]{xy} \end{cases}$.
Extrema locaux et globaux.

Correction
Première solution
Dans un tel contexte, il est naturel de regarder les cas "limite", ici x ou y tend vers 0 ou $+\infty$.
On obtient facilement un premier résultat :
$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \; f(x,x) = \dfrac{2x+1}{3} - x^{2/3} \sim \dfrac{2x}{3} \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$
f n'est pas majorée : il n'y a pas de maximum global.
Au vu de l'énoncé, on cherche ensuite les extrema locaux. Comme on est sur un ouvert, en cas d'existence ce sont des points critiques (f est $\mathcal{C}^1$).
On cherche donc les points critiques de f :

$$\begin{array}{rcl} \forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \; \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) & = & \dfrac{1}{3}\left(1 - x^{-2/3}y^{1/3}\right) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) & = & \dfrac{1}{3}\left(1 - y^{-2/3}x^{1/3}\right) \end{array}$$

$$\begin{aligned}
(x,y) \text{ point critique} \quad &\iff \begin{cases} x^{-2/3}y^{1/3} = 1 \\ y^{-2/3}x^{1/3} = 1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x^{-2/3}y^{1/3} = 1 \\ y^{-2/3}x^{1/3} = x^{-2/3}y^{1/3} \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x^{-2/3}y^{1/3} = 1 \\ x = y \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x^{-1/3} = 1 \\ x = y \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

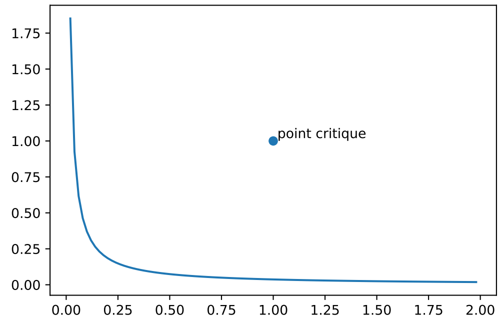
On cherche ensuite si f présente un extremum local en $(1,1)$.

$$\begin{aligned}
\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= \frac{2}{9}x^{-5/3}y^{1/3} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= \frac{2}{9}y^{-5/3}x^{1/3} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) &= -\frac{1}{9}x^{-2/3}y^{-2/3}
\end{aligned}$$

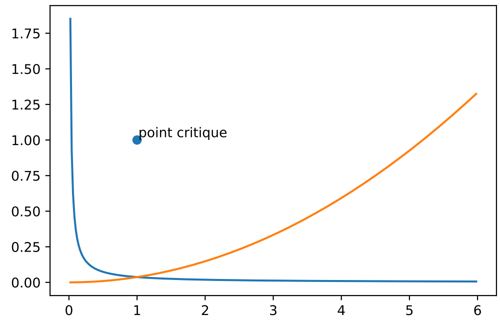
On en déduit :
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1) = \dfrac{2}{9}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1) = -\dfrac{1}{9}$
$d = \dfrac{5}{81} > 0$ et $t = \dfrac{4}{81} > 0$ donc f présente un minimum local en $(1,1)$.
Reste à savoir si ce minimum est global (on est sur un ouvert, un extremum global est forcément local).
Il s'agit donc de comparer $\left(1 + \dfrac{h_1 + h_2}{3}\right)^3$ et $(1+h_1)(1+h_2)$.

$$\begin{aligned}
\left(1 + \frac{h_1 + h_2}{3}\right)^3 - (1+h_1)(1+h_2) &= \frac{(h_1+h_2)^2}{3} + \left(\frac{h_1+h_2}{3}\right)^3 - h_1h_2 \\
&= \frac{h_1^2 - h_1h_2 + h_2^2}{3} + \left(\frac{h_1+h_2}{3}\right)^3
\end{aligned}$$

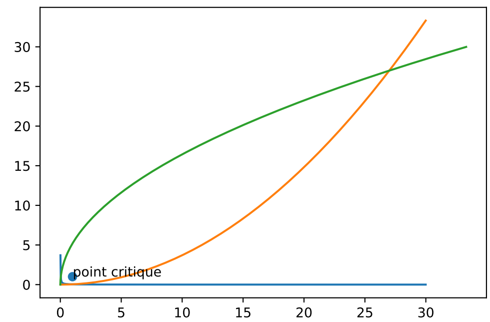
mais la suite des calculs est peu engageante.
Essayons une autre technique.
$f(1,1) = 0$
Il s'agit de montrer que f est positive sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.
C'est immédiat si $\sqrt[3]{xy} \leq \dfrac{1}{3}$ soit si $xy \leq \dfrac{1}{27}$.



Idem si $\sqrt[3]{xy} \leq \dfrac{x}{3}$ soit si $y \leq \dfrac{x^2}{27}$



Idem si $\sqrt[3]{xy} \leq \dfrac{y}{3}$ soit si $x \leq \dfrac{y^2}{27}$



f est donc positive en dehors d'une partie fermée et bornée K.
K est bien borné :
On a $x \geq \dfrac{y^2}{27}$ et $y \geq \dfrac{x^2}{27}$, ce qui impose $x \leq 27$. Idem pour y.
Sur K, f a un minimum global. Comme cette partie contient $(1,1)$, le minimum sur K est négatif et c'est donc un minimum global sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.
On a donc prouvé que f présente un minimum global sur l'ouvert $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$. Il ne peut être atteint qu'en $(1,1)$ qui est le seul point critique.

Deuxième solution
On commence par chercher les extrema globaux par une technique élémentaire :
On fixe $y > 0$ et on étudie la fonction de x. Sa dérivée est :

$\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3}y^{1/3}x^{-2/3} = \dfrac{x^{-2/3}}{3}\left(x^{2/3} - y^{1/3}\right)$
Elle est strictement négative entre 0 et $\sqrt{y}$, nulle en $\sqrt{y}$ puis strictement positive.
Elle décroît donc de $\dfrac{y+1}{3}$ à $f(\sqrt{y},y) = \dfrac{\sqrt{y}+y+1}{3} - \sqrt{y} = \dfrac{y+1-2\sqrt{y}}{3} = \dfrac{(\sqrt{y}-1)^2}{3}$ puis croît de $\dfrac{(\sqrt{y}-1)^2}{3}$ à $+\infty$.
On constate que f n'est pas majorée donc n'a pas de maximum global.
On constate également :
$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*\ f(x,y) \geq 0$ avec égalité si, et seulement si, $(x,y) = (1,1)$.
Il y a donc un minimum global atteint une fois et une seule en $(1,1)$.
Reste à déterminer les extrema locaux.
$\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ est un ouvert donc f présente un minimum local en $(1,1)$.
Y en a-t-il d'autres ?
On cherche alors les poins critiques comme dans la première méthode : il n'y a pas d'autre point critique donc pas d'autre extremum local.

Exercice 16 *(Centrale 2009)*

1. Soit φ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
   Soit $a \in \mathbb{R}$ un point où φ admet un maximum local.
   Montrer que $\varphi''(a) \leq 0$.
2. Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ qui vérifie les propriétés suivantes :
   i f est nulle sur $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } x^2 + y^2 = 1\}$.
   ii $\forall (x,y) \in D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } x^2+y^2 < 1\}\ \Delta f(x,y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) > 0$
   (a) Soient a, b et $h \in \mathbb{R}$.
   Soit $\psi : t \mapsto f(a + t\,h, b)$
   Calculer $\psi''(0)$.
   (b) Montrer que : $\forall (x,y) \in D\ f(x,y) < 0$
3. Montrer que :
   $\forall (x,y) \in D\ f(x,y) \leq 0$
   si on remplace (ii) par
   ii' $\forall (x,y) \in D\ \Delta f(x,y) \geq 0$
   On pourra utiliser, pour $\epsilon > 0$, la fonction $f_\epsilon : (x,y) \mapsto f(x,y) + \epsilon\,(x^2 + y^2 - 1)$.
4. Que dire de f si f est nulle sur Γ et si :
   $\forall (x,y) \in D\ \Delta f(x,y) = 0$

Correction

1. On sait que $\varphi'(a) = 0$.
   $\varphi(a+h) = \varphi(a) + h\varphi'(a) + \dfrac{h^2}{2}\varphi''(a) + o(h^2) = \varphi(a) + \dfrac{h^2}{2}\varphi''(a) + o(h^2)$
   Donc $\varphi(a+h) - \varphi(a) = \dfrac{h^2}{2}\varphi''(a) + o(h^2)$
   $\varphi''(a) = 2\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\varphi(a+h) - \varphi(a) \leq 0}{h^2} \leq 0$

2. (a) ψ est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}\ \psi'(t) &= h\frac{\partial f}{\partial x}(a+th,b) \\ \psi''(t) &= h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a+th,b) \end{aligned}$$

$\psi''(0) = h^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)$

(b) $D_f = \Gamma \cup D$ est une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^2$ donc :
$\exists (x_0,y_0) \in D_f$ tq $\forall (x,y) \in D_f\ f(x,y) \leq f(x_0,y_0)$
Supposons $(x_0,y_0) \in D$.
f a alors un maximum local en (x_0,y_0).
Donc ψ a un maximum local en 0 (en prenant $(a,b) = (x_0,y_0)$ et $h = 1$)
Donc $\psi''(0) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) \leq 0$
De même $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) \leq 0$
Donc $\Delta f(x_0,y_0) \leq 0$: absurde.
Donc $(x_0,y_0) \in \Gamma$ et $f(x_0,y_0) = 0$
Donc :
$\forall (x,y) \in D\ f(x,y) \leq 0$
Si $f(x_0,y_0) = 0$ avec $(x_0,y_0) \in D$, on a à nouveau un maximum local et la même contradiction.

3. $\forall (x,y) \in D\ \dfrac{\partial f_\epsilon}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + 2x\epsilon$
$\forall (x,y) \in D\ \dfrac{\partial^2 f_\epsilon}{\partial x^2}(x,y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + 2\epsilon$
$\forall (x,y) \in D\ \Delta f_\epsilon(x,y) = (\Delta f(x,y) \geq 0) + 4\epsilon > 0$
On en déduit :
$\forall (x,y) \in D\ f_\epsilon(x,y) < 0$
En faisant tendre ϵ vers 0, on en déduit :
$\forall (x,y) \in D\ f(x,y) \leq 0$

4. $\Delta f \geq 0$ sur D et f est nulle sur Γ donc f est négative sur D.
$\Delta(-f) = -\Delta f = 0 \geq 0$ et $-f$ est nulle sur Γ donc $-f$ est négative sur D.
On en déduit que f est positive sur D puis que f est nulle sur D.

Exercice 17 *(CCP)*

On pose pour tous réels x et y : $f(x,y) = \begin{cases} y(x-y) \text{ si } x \geq y \\ x(y-x) \text{ si } x < y \end{cases}$

1. Etudier la continuité de f.
2. f est-elle $\mathcal{C}^1$?
3. Existence et calcul du maximum de f sur $[0,1]^2$.

Correction

1. Soit $U_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } x > y\}$.
   Soit $U_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } x < y\}$.
   U_1 et U_2 sont des ouverts de $\mathbb{R}^2$.
   f est continue sur U_1 et U_2 car polynomiale sur ces ouverts.
   Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.
   $f(x,y) = y(x-y) \xrightarrow[\substack{(x,y)\to(x_0,x_0)\\(x,y)\in U_1}]{} 0 = f(x_0,x_0)$
   $f(x,y) = x(y-x) \xrightarrow[\substack{(x,y)\to(x_0,x_0)\\(x,y)\in U_2}]{} 0 = f(x_0,x_0)$
   $f(x,y) = 0 \xrightarrow[\substack{(x,y)\to(x_0,x_0)\\(x,y)\in \Delta}]{} 0 = f(x_0,x_0)$
   Donc f est continue en (x_0,x_0).
   On en déduit que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. f est $\mathcal{C}^1$ sur U_1 et U_2 car polynomiale sur ces ouverts.
   Etudions les dérivées partielles en (x_0,x_0).
   Soit $g : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x,x_0) \end{cases}$.
   $\forall x \geq x_0\ f(x,x_0) = x_0(x-x_0)$
   $\forall x \leq x_0\ f(x,x_0) = x(x_0-x)$
   Donc $g'_d(x_0) = x_0$ et $g'_g(x_0) = -x_0$.
   Donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ n'existe pas en (x_0,x_0) si $x_0 \neq 0$.
   f n'est pas $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
   (Les dérivées partielles de f existent et sont continues en $(0,0)$ mais $U_1 \cup U_2 \cup \{(0,0)\}$ n'est pas un ouvert, le plus grand ouvert sur lequel f est $\mathcal{C}^1$ est $U_1 \cup U_2$)
3. $[0,1]^2$ est une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^2$ donc il existe $(x_0,y_0) \in [0,1]^2$ tel que $\forall (x,y) \in [0,1]^2\ f(x,y) \leq f(x_0,y_0)$
   Si (x_0,y_0) n'est ni sur les bords ni sur Δ on a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 0$ d'où :
   $\begin{cases} y = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} y - 2x = 0 \\ x = 0 \end{cases}$ suivant les cas mais de toute façon cela donne $(0,0)$ qui ne convient pas.
   Si $x = 0$ et $0 \leq y \leq 1$ on a $f(x,y) = 0$.
   Si $x = 1$ et $0 \leq y \leq 1$ on a $f(x,y) = y(1-y)$ qui est maximal pour $y = \dfrac{1}{2}$.
   Si $y = 0$ et $0 \leq x \leq 1$ on a $f(x,y) = 0$.
   Si $y = 1$ et $0 \leq x \leq 1$ on a $f(x,y) = x(1-x)$ qui est maximal pour $x = \dfrac{1}{2}$.
   Si $x = y$ on a $f(x,y) = 0$.
   D'où $(x_0,y_0) = \left(1, \dfrac{1}{2}\right)$ ou $\left(\dfrac{1}{2}, 1\right)$ et $f(x_0,y_0) = \dfrac{1}{4}$.

Exercice 18 *(Mines)*

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que l'application de $(\mathbb{R}_+^*)^2$ dans $\mathbb{R}$ qui à (x,y) associe $\dfrac{a}{x} + \dfrac{a}{y} + \dfrac{xy}{a^2}$ admet un minimum global. Le calculer.

Correction

Recherche des points critiques dans $U = (\mathbb{R}_+^*)^2$.
Soit $(x,y) \in U$.

$$(x,y) \text{ point critique} \iff \begin{cases} -\dfrac{a}{x^2} + \dfrac{y}{a^2} = 0 \\ -\dfrac{a}{y^2} + \dfrac{x}{a^2} = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} y = \dfrac{a^3}{x^2} \\ x = \dfrac{a^3}{y^2} = a^3 \dfrac{x^3}{a^6} = \dfrac{x^4}{a^3} \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} y = \dfrac{a^3}{x^2} \\ \dfrac{x^3}{a^3} = 1 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x = a \\ y = a \end{cases}$$

$f(a,a) = 3$

Soit $U_1 =]0; \dfrac{a}{4}[\times\mathbb{R}_+^* \subset U$.
$\forall (x,y) \in U_1 \; f(x,y) \geq \dfrac{a}{x} \geq a\,\dfrac{4}{a} = 4$
Soit $U_2 = \mathbb{R}_+^* \times]0; \dfrac{a}{4}[\subset U$.
$\forall (x,y) \in U_2 \; f(x,y) \geq \dfrac{a}{y} \geq a\,\dfrac{4}{a} = 4$
Soit $U_3 = \{(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \text{ tq } xy > 4a^2\}$.
$\forall (x,y) \in U_3 \; f(x,y) \geq 4$
Soit $U_4 = (\mathbb{R}_+^*)^2 \setminus (U_1 \cup U_2 \cup U_3)$.
On a : $\inf\limits_{(\mathbb{R}_+^*)^2} f = \inf\limits_{U_4} f$ car :
$\exists (x,y) \in U_4$ tq $f(x,y) < 4$ et :
$\forall (x,y) \in U_1 \cup U_2 \cup U_3 \; f(x,y) \geq 4$
(L'inf existe car f est minorée par 0)
Or U_4 est fermé et borné donc :
$\inf\limits_{(\mathbb{R}_+^*)^2} f = \inf\limits_{U_4} f = \min\limits_{U_4} f$
Le minimum ne peut être atteint sur les bords de U_4 ($f \geq 4$ alors que $f(a,a) = 3$) donc le minimum est atteint en un point critique de f. D'où :

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \; f(x,y) \geq f(a,a) = 3$$

Exercice 19 *(Mines 2015)*

Soit $f \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto x^2y^2 + x^2 + y^2 - 2axy \end{cases}$, $a \in \mathbb{R}$.
Extrema.

Correction
La question posée n'est pas claire : s'agit–il des extrema locaux ou des extrema globaux. Les deux questions ne sont pas sans lien mais ne sont pas identiques.
Dans les deux cas, il faut commencer par déterminer les points critiques.

$$\begin{array}{rcl} \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\ \partial_1 f(x,y) & = & 2xy^2+2x-2ay \\ & = & 2(xy^2+x-ay) \\ \partial_2 f(x,y) & = & 2(x^2y+y-ax) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} (x,y)\text{ point critique} & \iff & \begin{cases} xy^2+x-ay=0 \\ x^2y+y-ax=0 \end{cases} \\ & \iff & \begin{cases} x\left(\dfrac{ax}{x^2+1}\right)^2+x-\dfrac{a^2x}{x^2+1}=0 \\ y=\dfrac{ax}{x^2+1} \end{cases} \\ & \iff & \begin{cases} x=0 \text{ ou } a^2x^2+(x^2+1)^2-a^2(x^2+1)=0 \\ y=\dfrac{ax}{x^2+1} \end{cases} \\ & \iff & \begin{cases} x=0 \text{ ou } a^2x^2+x^4+2x^2+1-a^2x^2-a^2=0 \\ y=\dfrac{ax}{x^2+1} \end{cases} \\ & \iff & \begin{cases} x=0 \text{ ou } x^4+2x^2+1-a^2=0 \\ y=\dfrac{ax}{x^2+1} \end{cases} \\ & \iff & \begin{cases} x=0 \text{ ou } (x^2+1)^2=a^2 \\ y=\dfrac{ax}{x^2+1} \end{cases} \\ & \iff & \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x^2=a-1 \\ y=\dfrac{ax}{x^2+1} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x^2=-a-1 \\ y=\dfrac{ax}{x^2+1} \end{cases} \end{array}$$

On voit qu'il va falloir faire une discussion sur a.

Commençons par le point de vue local

- **Premier cas :** $a>1$
  Il y a trois points critiques : $(0,0)$, $(\sqrt{a-1},\sqrt{a-1})$ et $(-\sqrt{a-1},-\sqrt{a-1})$.

  $$\begin{array}{rcl} \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & = & 2(y^2+1) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) & = & 2(x^2+1) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) & = & 2(2xy-a) \end{array}$$

  En $(0,0)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)=2$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=-2a$
  $d=4-4a^2<0$ donc f ne présente pas d'extremum local en $(0,0)$.

En $(\sqrt{a-1}, \sqrt{a-1})$ et en $(-\sqrt{a-1}, -\sqrt{a-1})$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ valent $2a$ tandis que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ vaut $2(a-2)$.
$d = 4a^2 - 4(a-2)^2 = 4(a-(a-2))(a+a-2) = 16(a-1) > 0$
$t = 4a > 0$
Donc f présente également un minimum local en $(\sqrt{a-1}, \sqrt{a-1})$ et en $(-\sqrt{a-1}, -\sqrt{a-1})$.

- **Deuxième cas :** $a = 1$
  Il y a un seul point critique : $(0,0)$
  $d = 0$ et $t = 4$: la matrice Hessienne est symétrique positive. D'après le cours, il est possible qu'il y ait un minimum local en $(0,0)$ mais ce n'est pas sûr.
  $f(x,y) = x^2y^2 + (x-y)^2$.
  f présente un minimum local et même global en $(0,0)$.

- **Troisième cas :** $-1 < a < 1$
  Il y a un seul point critique : $(0,0)$
  $d = 4 - 4a^2 > 0$ et $t = 4 > 0$ donc f présente un minimum local et même global en $(0,0)$.

- **Quatrième cas :** $a = -1$
  Il y a un seul point critique : $(0,0)$
  $d = 0$ et $t = 4$: la matrice Hessienne est symétrique positive. D'après le cours, il est possible qu'il y ait un minimum local en $(0,0)$ mais ce n'est pas sûr.
  $f(x,y) = x^2y^2 + (x+y)^2$.
  f présente un minimum local et même global en $(0,0)$.

- **Cinquième cas :** $a < -1$
  Il y a trois points critiques : $(0,0)$, $(\sqrt{-a-1}, -\sqrt{-a-1})$ et $(-\sqrt{-a-1}, \sqrt{-a-1})$. En $(0,0)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 2$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = -2a$
  $d = 4 - 4a^2 < 0$ donc f ne présente pas d'extremum local en $(0,0)$.
  En $(\sqrt{-a-1}, \sqrt{-a-1})$ et en $(-\sqrt{-a-1}, -\sqrt{-a-1})$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ valent $-2a$ tandis que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ vaut $2(a+2)$.
  $d = 4a^2 - 4(a+2)^2 = 4(a-(a+2))(a+a+2) = -16(a+1) > 0$
  $t = -4a > 0$
  Donc f présente également un minimum local en $(\sqrt{a-1}, -\sqrt{a-1})$ et en $(-\sqrt{a-1}, \sqrt{a-1})$.

Passons au point de vue global
$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ f(x,y) = x^2y^2 - 2axy + x^2 + y^2 = (xy-a)^2 - a^2 + x^2 + y^2 \geq x^2 + y^2 - a^2$
On en déduit :
$f(x,y) \xrightarrow[\|(x,y)\|_2 \to +\infty]{} +\infty$.
Classiquement, il en résulte que f présente un minimum global atteint en un point critique.

- **Premier cas :** $a > 1$
  Il y a trois points critiques : $(0,0)$, $(\sqrt{a-1}, \sqrt{a-1})$ et $(-\sqrt{a-1}, -\sqrt{a-1})$.
  $f(0,0) = 0$ et $f(\sqrt{a-1}, \sqrt{a-1}) = f(-\sqrt{a-1}, -\sqrt{a-1}) = -(a-1)^2 < 0$
  Le minimum global est atteint en $(\sqrt{a-1}, \sqrt{a-1})$ et en $(-\sqrt{a-1}, -\sqrt{a-1})$.

On traite de même les autres cas.

Exercice 20 *(Centrale 2019)*

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique.
Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

1. Dans cette question, $n = 1$.
   On suppose :
   $\forall x \in \mathbb{R}\ |x| \geq 1 \Longrightarrow xf'(x) \geq 0$
   Etudier l'existence d'un minimum global.
2. Dans cette question, $n \geq 2$.
   On suppose :
   $\forall x \in \mathbb{R}^n\ \ \|x\| \geq 1 \Longrightarrow (x|\nabla f(x)) \geq 0$
   Etudier l'existence d'un minimum global.

Correction

1. f' est négative sur $]-\infty; -1]$ donc f est décroissante sur $]-\infty; -1]$ et :
   $\forall x \in]-\infty; -1]\ f(x) \geq f(-1)$
   f' est positive sur $[1; +\infty[$ donc f est croissante sur $[1; +\infty[$ et :
   $\forall x \in [1; +\infty[\ f(x) \geq f(1)$
   f est continue sur le **segment** $[-1; 1]$ donc :
   $\exists x_0 \in [-1; 1]$ tq $\forall x \in [-1; 1]\ f(x) \geq f(x_0)$
   En particulier, $f(1)$ et $f(-1) \geq f(x_0)$.
   Finalement :
   $\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) \geq f(x_0)$
2. f est continue donc possède un minimum global sur $\mathcal{B}_f(0; 1)$:
   $\exists x_0 \in \mathcal{B}_f(0; 1)$ tq $\forall x \in \mathcal{B}_f(0; 1)\ f(x) \geq f(x_0)$
   Soit x tel que $\|x\| > 1$.
   Soit $\varphi \begin{cases} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ t \mapsto f(tx) \end{cases}$.
   φ est $\mathcal{C}^1$.
   $\forall t \in \mathbb{R}_+^*\ \varphi'(t) = (\nabla f(tx)|x) = \dfrac{1}{t}(\nabla f(tx)|tx)$
   $\|tx\| \geq 1 \Longleftrightarrow t \geq \dfrac{1}{\|x\|}$
   $\forall t \geq \dfrac{1}{\|x\|}\ \varphi'(t) \geq 0$
   $\forall t \geq \dfrac{1}{\|x\|}\ \varphi(t) \geq \varphi\left(\dfrac{1}{\|x\|}\right)$
   $\dfrac{1}{\|x\|} \leq 1$ car $\|x\| \geq 1$ donc $\varphi(1) \geq \varphi\left(\dfrac{1}{\|x\|}\right)$
   Donc $f(x) \geq f\left(\dfrac{x}{\|x\|}\right)$ et $\dfrac{x}{\|x\|} \in \mathcal{B}_f(0; 1)$
   On a :
   $\forall x \in \mathbb{R}^n\ f(x) \geq f(x_0)$

Exercice 21 *(CCP 2011)*

Déterminer les extrema de $f\colon (x, y) \mapsto (x^2 - 1)^2 + (x^2 - \mathrm{e}^y)^2$.

Correction

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
$\mathbb{R}^2$ est ouvert donc il n'y a pas d'effet de bord.
On commence par chercher les points critiques.
On résout donc

$$\left\{\begin{array}{lclcl} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) & = & 2x[(x^2-1)+(x^2-\mathrm{e}^y)] & = & 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) & = & -2\,\mathrm{e}^y(x^2-\mathrm{e}^y) & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 0 \\ 2\,\mathrm{e}^{2y} & = & 0 \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{lcl} 2x^2-1-\mathrm{e}^y & = & 0 \\ x^2-\mathrm{e}^y & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1 \\ y & = & 0 \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{lcl} x & = & -1 \\ y & = & 0 \end{array}\right.$$

$f(1,0)=f(-1,0)$ et on remarque :
$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\ f(x,y)\geq 0$
Donc f présente un minimum local et un minimum global en $(1,0)$ et en $(-1,0)$.
Il n'y a pas d'autre extremum (local ou global).

Exercice 22 *(Mines 2015)*

Soient $\Delta=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \text{ tq } x\geq 0, y\geq 0, x+y\leq 6\}$.

Soit $f\begin{cases}\Delta\to\mathbb{R}\\(x,y)\mapsto x^2y(x+y-4)\end{cases}$.

1. Tracer Δ.
2. Trouver les extrema locaux et globaux de f sur Δ.

Correction

1. Δ est le triangle de sommets $(0,0)$, $(6,0)$ et $(0,6)$, bords compris.
2. f est continue et Δ est fermée et bornée donc :
   $\exists (x_0,y_0)\in\Delta$ tq $\forall (x,y)\in\Delta\ f(x,y)\leq f(x_0,y_0)$
   $\exists (x_1,y_1)\in\Delta$ tq $\forall (x,y)\in\Delta\ f(x,y)\geq f(x_1,y_1)$
   Si (x_0,y_0) n'est pas situé sur un côté du triangle Δ alors f présente un maximum local en (x_0,y_0) et (x_0,y_0) est un point critique de f.
   On recherche ensuite les points critiques de f.

$$\begin{cases} y\left(2x(x+y-4)+x^2\right)=0\\ x^2\left(x+y-4+y\right)=0\end{cases} \iff \begin{cases} y=0\\ x^2(x-4)=0\end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x(3x+2y-8)=0\\ x^2(x+2y-4)=0\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y=0\\ x^2(x-4)=0\end{cases} \text{ ou } x=0 \text{ou} \begin{cases} 3x+2y-8=0\\ x+2y-4=0\end{cases}$$

Les points $(0,0)$, $(4,0)$, $(0,y)$ sont à écarter car ils ne sont pas points intérieurs à Δ.
Il ne reste donc que le point $(2,1)$.

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=y(2(x+y-4)+2x+2x)=2y(3x+y-4)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2,1)=6$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=2x^2$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2,1)=8$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=2x(x+2y-4)+x^2=x(3x+4y-8)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(2,1)=4$

$d=8*6-16>0$ et $t>0$ donc f a un minimum local strict en $(2,1)$.
$f(2,1)=-4$

On examine ensuite les côtés du triangle :

- $\forall y \in [0;6]\ f(0,y) = 0$
- $\forall x \in [0;6]\ f(x,0) = 0$
- $\forall x \in [0;6]\ f(x,6-x) = 2x^2(6-x) = 12x^2 - 2x^3$
  La dérivée de cette expression est $24x - 6x^2 = 6x(4-x)$
  La fonction est donc croissante sur $[0;4]$ de 0 à 64 puis décroissante sur $[4,6]$ de 64 à 0

f présente donc un minimum global en $(2,1)$ et un maximum global en $(4,2)$.

Exercice 23 *(CCP 2018)*

1. Soit $g \begin{cases} \mathbb{R}_-^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x \exp\left(\dfrac{1}{x}\right) + \exp(x) \end{cases}$.
   Montrer que g est croissante et calculer $g(-1)$.
2. Soit $f \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto x\,\mathrm{e}^y + y\,\mathrm{e}^x \end{cases}$.
   Montrer que si (x_0,y_0) est un point critique, alors $x_0 < 0$, $x_0y_0 = 1$ et $g(x_0) = 0$.
   Déterminer le(s) point(s) critique(s).
3. f admet-elle un extremum local ?
4. Soit $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } |x| \leq 1 \text{ et } |y| \leq 1\right\}$.
   Déterminer le minimum et le maximum de f sur D en justifiant leur existence.

Correction

1. g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_-^*$ et :
   $\forall x \in \mathbb{R}_-^*\ g'(x) = \exp\left(\dfrac{1}{x}\right) + x\dfrac{-1}{x^2}\exp\left(\dfrac{1}{x}\right) + \exp(x) = \dfrac{x-1}{x}\exp\left(\dfrac{1}{x}\right) + \exp(x)$
   $\forall x \in \mathbb{R}_-^*\ x - 1 < 0$ et $x < 0$ donc $\dfrac{x-1}{x} > 0$.
   On en déduit :
   $\forall x \in \mathbb{R}_-^*\ g'(x) > 0$
   g est bien croissante, et même strictement croissante, sur $\mathbb{R}_-^*$.
   $g(-1) = -\mathrm{e}^{-1} + \mathrm{e}^{-1} = 0$
   Compte tenu des variations de g on a pour $x \in \mathbb{R}_-^*$:
   $g(x) = 0 \iff x = -1$
2. f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
   $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \exp(y) + y\exp(x)$
   $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\exp(y) + \exp(x)$
   Soit (x_0,y_0) un point critique de f.
   $x_0 = -\dfrac{\mathrm{e}^{x_0}}{\mathrm{e}^{y_0}} = -\mathrm{e}^{x_0-y_0} < 0$
   $y_0 = -\mathrm{e}^{y_0-x_0}$ donc $x_0y_0 = \mathrm{e}^{x_0-y_0+y_0-x_0} = \mathrm{e}^0 = 1$
   $g(x_0) = x_0\exp\left(\dfrac{1}{x_0}\right) + \exp(x_0) = x_0\exp(y_0) + \exp(x_0) = 0$
   On en déduit $x_0 = -1$ puis $y_0 = -1$.
   f possède donc un et un seule point critique : $(-1,1)$.
3. Si f admet un extremum local en (x_0,y_0) alors (x_0,y_0) est un point critique.
   Il s'agit donc de déterminer si f admet un extremum local en $(-1,-1)$.

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = y \exp(x)$

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = x \exp(y)$

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \exp(y) + \exp(x)$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,-1) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-1,-1) = -\mathrm{e}^{-1}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(-1,-1) = 2\,\mathrm{e}^{-1}$

Donc $d = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,-1)\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-1,-1) - \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(-1,-1)\right)^2 = -3\,\mathrm{e}^{-1} < 0$

D'après les conditions nécessaires du second ordre, f n'a pas d'extremum local en $(-1,-1)$.

4. D est une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^2$ (c'est la boule unité fermée pour $\|.\|_\infty$) et f est continue donc f possède un maximum et un minimum sur D.
   D'après ce qui précède, ils sont atteints sur le bord.
   - $\forall y \in [-1;1] \ f(-1,y) = -\mathrm{e}^y + y\,\mathrm{e}^{-1}$
     $\forall y \in [-1;1] \ \dfrac{\partial f}{\partial y}(-1,y) = -\mathrm{e}^y + \mathrm{e}^{-1} \leq 0$ avec égalité uniquement pour $y = -1$.
     Donc $f(-1,.)$ décroît strictement de $-2\,\mathrm{e}^{-1}$ à $\mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}$.
   - $\forall y \in [-1;1] \ f(1,y) = \mathrm{e}^y + y\,\mathrm{e}$
     $\forall y \in [-1;1] \ \dfrac{\partial f}{\partial y}(1,y) = \mathrm{e}^y + \mathrm{e} > 0$
     Donc $f(1,.)$ croît strictement de $\mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}$ à $2\,\mathrm{e}$.
   - $\forall x \in [-1;1] \ f(x,-1) = f(-1,x)$
     Donc la fonction $f(.,-1)$ décroît strictement de $-2\,\mathrm{e}^{-1}$ à $\mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}$.
   - $\forall x \in [-1;1] \ f(x,1) = f(1,x)$
     Donc la fonction $f(.,1)$ croît strictement de $\mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}$ à $2\,\mathrm{e}$.

   Le maximum de f sur D est donc $2\,\mathrm{e}$ atteint en $(1,1)$.
   Le minimum de f sur D est $\mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}$ atteint en $(-1,1)$ et en $(1,-1)$.