

ANALYSE 2
PC*1
2025 - 2026
Chapitre 4 :
Calcul différentiel

Fabrice Monfront
Lycée du Parc

1 Dérivation des fonctions à valeurs vectorielles

1.1 Dérivée en un point

1.1.1 Définition

Soient I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$.

On dit que f est dérivable en un point $t_0 \in I$ si et seulement si $\lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t \neq t_0}} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$ existe.

Si c'est le cas, cette limite est appelée dérivée de f en t_0 et se note $f'(t_0)$.

Remarques

- $\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$ s'appelle taux d'accroissement de f entre t_0 et t .
- Le programme se limite à des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ mais il est clair que rien ne nous empêche de remplacer $\mathbb{R}^n$ par E espace vectoriel de dimension finie.
On peut également remarquer que la définition ne fait pas appel aux coordonnées de $f(t)$ dans la base canonique ie à l'écriture de $f(t)$ sous la forme $f(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$.
-

$$\begin{aligned} f \text{ est dérivable en } t_0 \text{ de dérivée } a \in \mathbb{R}^n &\iff \frac{f(t) - f(t_0) - (t - t_0).a}{t - t_0} \xrightarrow[\substack{t \rightarrow t_0 \\ t \neq t_0}]{} 0 \\ &\iff f(t) - f(t_0) - (t - t_0).a = o_{t_0}(t - t_0) \\ &\iff f(t) = f(t_0) + (t - t_0).a + o_{t_0}(t - t_0) \\ &\iff f(t_0 + h) = f(t_0) + h.a + o_0(h) \end{aligned}$$

1.1.2 Interprétation cinématique

On considère le mouvement d'un point. Sa position est donnée par une fonction $F \begin{cases} I \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ ou } \mathbb{R}^3 \\ t \mapsto F(t) \end{cases}$.

Soit $t_0 \in I$.

$\frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0}$ est le vecteur vitesse moyen entre les instants t_0 et t .

Si F est dérivable en t_0 , ce vecteur a une limite qu'on appelle vecteur vitesse instantané en t_0 .

1.1.3 Lien avec la continuité

Soient I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $t_0 \in I$.
Si f est dérivable en t_0 alors f est continue en t_0 .

En effet $f(t) = f(t_0) + (t - t_0).f'(t_0) + o_{t_0}(t - t_0) \xrightarrow{t \rightarrow t_0} f(t_0)$.

La réciproque est fautive : cf les fonctions $\begin{cases} \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto (\sqrt{t}, \sqrt{t}) \end{cases}$ et $\begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t \mapsto (|t|, 0, 0) \end{cases}$

1.2 Application dérivée

1.2.1 Définition

Soient I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$.
On dit que f est dérivable sur I si et seulement si elle l'est en tout point de I .
Dans ce cas l'application $\begin{cases} I \rightarrow \mathbb{R}^n \\ t \mapsto f'(t) \end{cases}$ s'appelle application dérivée de f et se note f' .

1.2.2 Applications de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle

Définition

Soient I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$.
On dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I si et seulement si :
 $\begin{cases} f \text{ est dérivable sur } I \\ f' \text{ est continue sur } I \end{cases}$
On note $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$ l'ensemble des applications de I dans $\mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur I .

1.2.3 A propos des restrictions

Soient $J \subset I$ deux intervalles non triviaux de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$.
Si f est dérivable (resp $\mathcal{C}^1$) sur I alors $f|_J$ est dérivable (resp $\mathcal{C}^1$) sur J .
En pratique, au lieu d'écrire $f|_J$ est dérivable (resp $\mathcal{C}^1$) sur J , on écrit que la fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ est dérivable (resp $\mathcal{C}^1$) sur J mais il faut se méfier.

Par exemple soit $f : \begin{cases} [0, 2] \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto t \text{ si } t \in [0, 1] \\ t \mapsto 2 - t \text{ si } t \in [1, 2] \end{cases}$.

$f|_{[0,1]} : \begin{cases} [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto t \end{cases}$ donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$.

De même f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, 2]$.
Mais f n'est pas dérivable en 1.

En pratique, on va rencontrer des fonctions de la forme :

$f : \begin{cases} [a; c] \rightarrow E \\ t \mapsto f_1(t) \text{ si } t \in [a; b] \\ t \mapsto f_2(t) \text{ si } t \in [b; c] \end{cases}$ (avec $a < b < c$ bien sûr).

Pour prouver que f est $\mathcal{C}^1$ sur $[a; c]$, on montre :

- $f_1(b) = f_2(b)$ (ie : on vérifie que f est bien définie)
- f_1 est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a; b]$.
- f_2 est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[b; c]$.
- $f'_1(b) = f'_2(b)$

1.3 Utilisation des coordonnées

Soient I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, $t_0 \in I$ et $f \begin{cases} I \rightarrow \mathbb{R}^n \\ t \mapsto (f_1(t), \dots, f_n(t)) \end{cases}$

1. f est dérivable en $t_0 \iff \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ f_i est dérivable en t_0
On a alors : $f'(t_0) = (f'_1(t_0), \dots, f'_n(t_0))$.
2. f est dérivable sur $I \iff \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ f_i est dérivable sur I
On a alors : $f' = (f'_1, \dots, f'_n)$.
3. f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I \iff \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ f_i est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I

Démonstration

On note $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, de sorte que $f = \sum_{i=1}^n f_i e_i$.

On a alors :

$$\forall t \in I \setminus \{t_0\} \quad \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = \sum_{i=1}^n \frac{f_i(t) - f_i(t_0)}{t - t_0} e_i$$

Donc, d'après les chapitres précédents :

$$\lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t \neq t_0}} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \text{ existe (dans } \mathbb{R}^n) \iff \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad \lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t \neq t_0}} \frac{f_i(t) - f_i(t_0)}{t - t_0} \text{ existe}$$

En d'autres termes :

f dérivable en $t_0 \iff \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ f_i dérivable en t_0

et on a alors :

$$\lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t \neq t_0}} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = \sum_{i=1}^n \left(\lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t \neq t_0}} \frac{f_i(t) - f_i(t_0)}{t - t_0} \right) e_i$$

$$\text{ie } f'(t_0) = \sum_{i=1}^n f'_i(t_0) e_i = (f'_1(t_0), \dots, f'_n(t_0))$$

Le reste de la proposition en découle immédiatement.

Remarque

Dans le programme, on se limite aux coordonnées de f dans la base canonique mais ce qui précède est en fait valable dans n'importe quelle base.

1.4 Linéarité de la dérivation

1.4.1 Combinaisons linéaires de fonctions dérivables

Soient I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et f et $g : I \rightarrow \mathbb{R}^n$.

1. Si f et g sont dérivables en $t_0 \in I$ alors pour tous λ et $\mu \in \mathbb{K}$, $\lambda f + \mu g$ est dérivable en t_0 et $(\lambda f + \mu g)'(t_0) = \lambda f'(t_0) + \mu g'(t_0)$.

On en déduit :

2. Si f et g sont dérivables sur I alors pour tous λ et $\mu \in \mathbb{K}$, $\lambda f + \mu g$ est dérivable sur I et $(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$.

Démonstration (de 1)

$$\forall t \in I \setminus \{t_0\} \quad \frac{(\lambda f + \mu g)(t) - (\lambda f + \mu g)(t_0)}{t - t_0} = \lambda \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} + \mu \frac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0} \xrightarrow[t \neq t_0]{t \rightarrow t_0} \lambda f'(t_0) + \mu g'(t_0)$$

Compte tenu des propriétés des applications continues on en déduit que $\mathcal{C}^1(I, E)$ est un sev de $\mathcal{F}(I, E)$.

En particulier $\mathcal{C}^1(I, E)$ est un $\mathbb{K}$ ev.

De plus l'application $\begin{cases} \mathcal{C}^1(I, E) \rightarrow \mathcal{C}^0(I, E) \\ f \mapsto f' \end{cases}$ est linéaire.

1.4.2 Dérivée d'une application de la forme $L \circ f$ avec L linéaire

Proposition

Soit $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

Soient I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$.

1. Si f est dérivable en $t_0 \in I$ alors $L \circ f$ est dérivable en t_0 et $(L \circ f)'(t_0) = L(f'(t_0))$.
2. Si f est dérivable sur I alors $L \circ f$ est dérivable sur I et $(L \circ f)' = L \circ (f')$.

Démonstration de 1. (2. en découle immédiatement)

$$\begin{aligned} \forall t \in I \setminus \{t_0\} \quad \frac{(L \circ f)(t) - (L \circ f)(t_0)}{t - t_0} &= \frac{L(f(t)) - L(f(t_0))}{t - t_0} \\ &= L\left(\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}\right) \text{ car } L \text{ est linéaire} \end{aligned}$$

$\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \xrightarrow[t \neq t_0]{t \rightarrow t_0} f'(t_0)$ et L est continue (car L est linéaire avec $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ de dimension finie)

donc : $L\left(\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}\right) \xrightarrow[t \neq t_0]{t \rightarrow t_0} L(f'(t_0))$ (limite d'une fonction composée)

Exemples

- Soient $n \in \mathbb{N}^*$, I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et $A : I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dérivable sur I .

Alors la fonction $f \begin{cases} I \rightarrow \mathbb{K} \\ t \mapsto \text{tr}(A(t)) \end{cases}$ est dérivable sur I et :

$$\forall t \in I \quad f'(t) = \text{tr}(A'(t))$$

- Soient $n \in \mathbb{N}^*$, I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $X \begin{cases} I \rightarrow \mathbb{K}^n \\ t \mapsto X(t) \end{cases}$ dérivable sur I .

Alors la fonction $Z \begin{cases} I \rightarrow \mathbb{K}^n \\ t \mapsto M.X(t) \end{cases}$ est dérivable sur I et :

$$\forall t \in I \quad Z'(t) = M.X'(t)$$

1.5 Dérivation d'un produit

1.5.1 Proposition

Soit $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ bilinéaire.

Soient I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $g : I \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Soit $h = B(f, g) \begin{cases} I \rightarrow \mathbb{R}^p \\ t \mapsto B(f(t), g(t)) \end{cases}$.

1. Si f et g sont dérivables en $t_0 \in I$ alors h est dérivable en t_0 et $h'(t_0) = B(f'(t_0), g(t_0)) + B(f(t_0), g'(t_0))$.
2. Si f et g sont dérivables sur I alors h est dérivable sur I et $h' = (B(f, g))' = B(f', g) + B(f, g')$.

Démonstration de 1. (2. en découle immédiatement)

$$\begin{aligned} \forall t \in I \quad h(t) &= B(f(t), g(t)) = B(f(t) - f(t_0) + f(t_0), g(t)) \\ &= B(f(t) - f(t_0), g(t)) + B(f(t_0), g(t)) \\ &= B(f(t) - f(t_0), g(t)) + B(f(t_0), g(t) - g(t_0) + g(t_0)) \\ &= B(f(t) - f(t_0), g(t)) + B(f(t_0), g(t) - g(t_0)) + h(t_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall t \in I \setminus \{t_0\} \quad \frac{h(t) - h(t_0)}{t - t_0} &= B\left(\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}, g(t)\right) + B\left(f(t_0), \frac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0}\right) \\ \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} &\xrightarrow[t \neq t_0]{t \rightarrow t_0} f'(t_0) \quad \text{et} \quad \frac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0} \xrightarrow[t \neq t_0]{t \rightarrow t_0} g'(t_0) \end{aligned}$$

$g(t) \xrightarrow[t \neq t_0]{t \rightarrow t_0} g(t_0) : g$ est dérivable en t_0 donc g est continue en t_0

De plus B est bilinéaire et $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p$ sont de dimensions finies donc B est continue.

D'où le résultat en utilisant les théorèmes sur les limites des fonctions composées.

1.5.2 Exemple 1

Cette application n'est pas mentionnée dans le programme mais elle est indispensable et sans surprise.

L'application $B \begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \\ (\lambda, x) \mapsto \lambda x \end{cases}$ est bilinéaire d'où :

Proposition

Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$.

1. Si f et φ sont dérivables en $t_0 \in I$ alors $\varphi f \left(\begin{cases} I \rightarrow \mathbb{R}^n \\ t \mapsto \varphi(t)f(t) \end{cases} \right)$ est dérivable en t_0 et $(\varphi f)'(t_0) = \varphi'(t_0)f(t_0) + \varphi(t_0)f'(t_0)$.
2. Si f et φ sont dérivables sur I alors φf est dérivable sur I et $(\varphi f)' = \varphi' \cdot f + \varphi \cdot f'$.

1.5.3 Cas du produit scalaire

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure canonique d'espace euclidien.

L'application $B \begin{cases} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto (x|y) \end{cases}$ est bilinéaire d'où :

Proposition

Soient I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Soit $h = (f|g) \begin{cases} I \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto (f(t)|g(t)) \end{cases}$.

1. Si f et g sont dérivables en $t_0 \in I$ alors h est dérivable en t_0 et $h'(t_0) = (f'(t_0)|g(t_0)) + (f(t_0)|g'(t_0))$.
2. Si f et g sont dérivables sur I alors h est dérivable sur I et $h' = (f|g)' = (f'|g) + (f|g')$.

1.5.4 Exemple

Un mobile se déplace de manière rectiligne et uniforme, sa vitesse est $\vec{V}$. A l'instant t_0 , il est au point M_0 .

A quel moment est-il le plus proche d'un point fixe O ?

Cet exemple est inspiré par Centrale IPT 2016.

Soit $F \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \|\vec{OM}(t)\|^2 \end{cases}$.

Calculons la dérivée de F :

• **Première méthode**

$$\begin{aligned} F(t) &= \|\vec{OM}_0 + (t - t_0)\vec{V}\|^2 \\ &= F(t_0) + 2(t - t_0)\vec{OM}_0 \cdot \vec{V} + (t - t_0)^2 \|\vec{V}\|^2 \\ F'(t) &= 2\vec{OM}_0 \cdot \vec{V} + 2(t - t_0) \|\vec{V}\|^2 \end{aligned}$$

• **Deuxième méthode**

$$\begin{aligned} F(t) &= \|\vec{OM}(t)\|^2 \\ F'(t) &= 2 \left(\frac{d\vec{OM}}{dt}(t) \right) \cdot \vec{OM}(t) \\ &= 2\vec{V} \cdot (\vec{OM}_0 + (t - t_0)\vec{V}) \\ &= 2\vec{OM}_0 \cdot \vec{V} + 2(t - t_0) \|\vec{V}\|^2 \end{aligned}$$

La dérivée s'annule en $t_c = t_0 - \frac{\vec{OM}_0 \cdot \vec{V}}{\|\vec{V}\|^2}$.

Le coefficient de t dans $F'(t)$: $\|\vec{V}\|^2$ est strictement positif donc $F'(t) < 0$ pour $t < t_c$ et $F'(t) > 0$ pour $t > t_c$. La fonction F , et donc la distance avec le point fixe O , est minimale en t_c .

1.5.5 Proposition

Soit $M : \mathbb{R}^{n_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{n_p} \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application p -linéaire.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et pour tout $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$ une fonction f_i de I dans $\mathbb{R}_{n_i}$.

Soit $g = M(f_1, \dots, f_p) \begin{cases} I \rightarrow \mathbb{R}^m \\ t \mapsto M(f_1(t), \dots, f_p(t)) \end{cases}$.

1. Si les fonctions f_i sont dérivables en $t_0 \in I$ alors g est dérivable en t_0 et :

$$g'(t_0) = \sum_{i=1}^p M(f_1(t_0), \dots, f_{i-1}(t_0), f'_i(t_0), f_{i+1}(t_0), \dots, f_p(t_0))$$

2. Si les fonctions f_i sont dérivables sur I alors g est dérivable sur I et :

$$g' = \sum_{i=1}^p M(f_1, \dots, f_{i-1}, f'_i, f_{i+1}, \dots, f_p)$$

Démonstration

Elle repose sur le même principe que dans le cas du produit de deux fonctions tout en étant plus fastidieuse.

Elle n'est pas exigible.

1.5.6 Dérivation d'un déterminant

Soit $f_1, \dots, f_n$ n fonctions définies sur I intervalle de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

Soit $g = \det_{\mathcal{B}}(f_1, \dots, f_n) \begin{cases} I \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \det_{\mathcal{B}}(f_1(t), \dots, f_n(t)) \end{cases}$.

1. Si les fonctions f_i sont dérivables en $t_0 \in I$ alors g est dérivable en t_0 et :

$$g'(t_0) = \sum_{i=1}^p \det_{\mathcal{B}}(f_1(t_0), \dots, f_{i-1}(t_0), f'_i(t_0), f_{i+1}(t_0), \dots, f_p(t_0))$$

2. Si les fonctions f_i sont dérivables sur I alors g est dérivable sur I et :

$$g' = \sum_{i=1}^p \det_{\mathcal{B}}(f_1, \dots, f_{i-1}, f'_i, f_{i+1}, \dots, f_p)$$

ce qui donne en version matricielle :

Soit $A \begin{cases} I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ t \mapsto (a_{i,j}(t))_{1 \leq i,j \leq n} \end{cases}$.

Si les fonctions $a_{i,j}$ sont définies sur I alors la fonction $\det(A) \begin{cases} I \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \det(A(t)) \end{cases}$ est dérivable

et pour tout $t \in I$:

$$(\det(A))'(t) = \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} a_{1,1}(t) & \dots & a_{1,i-1}(t) & a'_{1,i}(t) & a_{1,i+1}(t) & \dots & a_{1,n}(t) \\ a_{2,1}(t) & \dots & a_{2,i-1}(t) & a'_{2,i}(t) & a_{2,i+1}(t) & \dots & a_{2,n}(t) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}(t) & \dots & a_{n,i-1}(t) & a'_{n,i}(t) & a_{n,i+1}(t) & \dots & a_{n,n}(t) \end{vmatrix}$$

1.6 Dérivation d'une fonction composée

Soient I, J deux intervalles non triviaux de $\mathbb{R}$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}$ tq $\varphi(J) \subset I$.

1. Si φ est dérivable en $t_0 \in J$ et si f est dérivable en $s_0 = \varphi(t_0) (\in I)$ alors $f \circ \varphi$ est dérivable en t_0 et $(f \circ \varphi)'(t_0) = f'(\varphi(t_0))\varphi'(t_0) = f'(s_0)\varphi'(t_0)$.

2. Si φ est dérivable sur J et si f est dérivable sur I alors $f \circ \varphi$ est dérivable sur J et :
 $(f \circ \varphi)' = [f' \circ \varphi] \cdot \varphi'$.

Démonstration de 1. (2. en découle immédiatement)

$$\text{Soit } \Delta \begin{cases} I \rightarrow E \\ s \mapsto \frac{f(s) - f(s_0)}{s - s_0} \text{ si } s \neq s_0 \\ s_0 \mapsto f'(s_0) \end{cases}$$

Δ est continue en s_0 .

$$\forall t \in J \setminus \{t_0\} \quad \frac{f \circ \varphi(t) - f \circ \varphi(t_0)}{t - t_0} = \begin{cases} 0 \text{ si } \varphi(t) = \varphi(t_0) \\ \frac{f(\varphi(t)) - f(\varphi(t_0))}{\varphi(t) - \varphi(t_0)} \cdot \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t - t_0} \text{ si } \varphi(t) \neq \varphi(t_0) \end{cases}$$

Donc :

$$\forall t \in J \setminus \{t_0\} \quad \frac{f \circ \varphi(t) - f \circ \varphi(t_0)}{t - t_0} = \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t - t_0} \cdot \Delta(\varphi(t))$$

$$\varphi(t) \xrightarrow[t \neq t_0]{t \rightarrow t_0} \varphi(t_0) \quad (\varphi \text{ est dérivable en } t_0 \text{ donc } \varphi \text{ est continue en } t_0) \text{ donc : } \Delta(\varphi(t)) \xrightarrow[t \neq t_0]{t \rightarrow t_0} f'(s_0)$$

(limite d'une fonction composée).

D'où le résultat.

1.7 Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

1.7.1 Définitions

Les notions d'application de classe $\mathcal{C}^k$ ($k \in \mathbb{N}$) et de dérivée $k^{\text{ième}}$ d'une application de classe $\mathcal{C}^k$ sont définies par récurrence :

Soient I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$.

On dit que f est de classe $\mathcal{C}^0$ sur I si et seulement si f est continue sur I . On appelle alors dérivée d'ordre 0 de f et on note $f^{(0)}$ la fonction f elle-même.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

On dit que f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I si et seulement si f est dérivable sur I et f' est de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ sur I . On appelle alors dérivée $k^{\text{ième}}$ de f et on note $f^{(k)}$ l'application $(f')^{(k-1)}$.

On dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I si et seulement si pour tout $k \in \mathbb{N}$ f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I .

Pour $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ on note $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{R}^n)$ l'ensemble des applications de I dans $\mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^k$ sur I .

$\mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$ est aussi noté $\mathcal{C}^k(I)$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté.

On a : $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}^n) = \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n) \supset \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n) \supset \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R}^n) \supset \dots \supset \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R}^n)$.

1.8 Espace vectoriel $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{R}^n)$

Soient I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^k$ sur I .

- Alors pour tous λ et $\mu \in \mathbb{K}$, $\lambda f + \mu g$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I .

De plus si $k \in \mathbb{N}$ on a $(\lambda f + \mu g)^{(k)} = \lambda f^{(k)} + \mu g^{(k)}$

ie : $\forall t \in I \quad (\lambda f + \mu g)^{(k)}(t) = \lambda f^{(k)}(t) + \mu g^{(k)}(t)$

On en déduit que pour tout $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{R}^n)$ est un $\mathbb{K}$ ev (car c'est un sev de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R}^n)$).

De plus pour tout $l \in \mathbb{N}$ tq $l \leq k$ l'application $\begin{cases} \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{C}^{k-l}(I, \mathbb{R}^n) \\ f \mapsto f^{(l)} \end{cases}$ est linéaire.

En particulier si $k = \infty$ l'application $D \begin{cases} \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R}^n) \\ f \mapsto f' \end{cases}$ est un endomorphisme.

Démonstration de $\bullet$ pour $k \in \mathbb{N}$ (le reste en découle).

On raisonne par récurrence sur k .

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, soit :

$\mathcal{P}(k)$: pour tous f et $g : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^k$ et pour tous λ et $\mu \in \mathbb{K}$ la fonction $\lambda f + \mu g$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et $(\lambda f + \mu g)^{(k)} = \lambda f^{(k)} + \mu g^{(k)}$.

$\mathcal{P}(0)$ est vraie : cours sur la continuité.

On suppose que $\mathcal{P}(k)$ est vraie.

Soient f et $g : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ sur I et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

f et g sont de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ sur I avec $k+1 \geq 1$ donc f et g sont dérivables sur I .

Donc $\lambda f + \mu g$ est dérivable sur I et $(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$.

f' et g' sont de classe $\mathcal{C}^k$ sur I , donc d'après l'hypothèse de récurrence $\lambda f' + \mu g'$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I .

On a : $\begin{cases} \lambda f + \mu g \text{ dérivable sur } I \\ (\lambda f + \mu g)' \text{ de classe } \mathcal{C}^k \text{ sur } I \end{cases}$

Donc $\lambda f + \mu g$ est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ sur I .

De plus :

$$\begin{aligned} (\lambda f + \mu g)^{(k+1)} &= ((\lambda f + \mu g)')^{(k)} \text{ (définition)} \\ &= (\lambda f' + \mu g')^{(k)} \text{ (cf 1.)} \\ &= \lambda (f')^{(k)} + \mu (g')^{(k)} \text{ (hypothèse de récurrence)} \\ &= \lambda f^{(k+1)} + \mu g^{(k+1)} \end{aligned}$$

1.9 Produits de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$, formule de Leibniz

Soit $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ bilinéaire.

Soient I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $g : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ deux applications de classe $\mathcal{C}^k$ sur I .

Alors l'application $h = B(f, g) \begin{cases} I \rightarrow \mathbb{R}^p \\ t \mapsto B(f(t), g(t)) \end{cases}$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I .

De plus si $k \in \mathbb{N}$ on a :

$$\forall t \in I \quad h^{(k)}(t) = \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} B(f^{(l)}(t), g^{(k-l)}(t))$$

ie :

$$(B(f, g))^{(k)} = \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} B(f^{(l)}, g^{(k-l)})$$

Démonstration

On prouve la propriété pour $k \in \mathbb{N}$ en raisonnant par récurrence sur k . (Le cas $k = \infty$ en découle)

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, soit :

$\mathcal{P}(k)$: pour tout $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^k$ et pour tout $g : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ de classe $\mathcal{C}^k$, $B(f, g)$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et :

$$(B(f, g))^{(k)} = \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} B(f^{(l)}, g^{(k-l)})$$

$\mathcal{P}(0)$ est vraie : cours sur la continuité.

On suppose que $\mathcal{P}(k)$ est vraie ($k \in \mathbb{N}$).

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $g : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ deux applications de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ sur I .

$k+1 \geq 1$ donc f et g sont dérivables sur I .

On en déduit que $h = B(f, g)$ est dérivable sur I et :

$$h' = (B(f, g))' = B(f', g) + B(f, g')$$

f' et g sont de classe $\mathcal{C}^k$ sur I donc $B(f', g)$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I .

f et g' sont de classe $\mathcal{C}^k$ sur I donc $B(f, g')$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I .

D'après 6.8.3, $B(f', g) + B(f, g')$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I .

On a :

- $B(f, g)$ dérivable sur I
- $(B(f, g))'$ de classe $\mathcal{C}^k$ sur I

Donc $B(f, g)$ est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ sur I .

De plus :

$$\begin{aligned} (B(f, g))^{(k+1)} &= ((B(f, g))')^{(k)} = (B(f', g) + B(f, g'))^{(k)} \\ &= (B(f', g))^{(k)} + (B(f, g'))^{(k)} \\ &= \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} B((f')^{(l)}, g^{(k-l)}) + \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} B(f^{(l)}, (g')^{(k-l)}) \\ &= \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} B(f^{(l+1)}, g^{(k-l)}) + \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} B(f^{(l)}, g^{(k+1-l)}) \\ &= \sum_{l=1}^{k+1} \binom{k}{l-1} B(f^{(l)}, g^{(k+1-l)}) + \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} B(f^{(l)}, g^{(k+1-l)}) \\ &= \binom{k}{0} B(f^{(0)}, g^{(k+1)}) + \binom{k}{k} B(f^{(k+1)}, g^{(0)}) + \sum_{l=1}^k \left(\binom{k}{l} + \binom{k}{l-1} \right) B(f^{(l)}, g^{(k+1-l)}) \\ &= 1 \times B(f^{(0)}, g^{(k+1)}) + 1 \times B(f^{(k+1)}, g^{(0)}) + \sum_{l=1}^k \binom{k+1}{l} B(f^{(l)}, g^{(k+1-l)}) \\ &= \binom{k+1}{0} B(f^{(0)}, g^{(k+1)}) + \binom{k+1}{k+1} B(f^{(k+1)}, g^{(0)}) + \sum_{l=1}^k \binom{k+1}{l} B(f^{(l)}, g^{(k+1-l)}) \\ &= \sum_{l=0}^{k+1} \binom{k+1}{l} B(f^{(l)}, g^{(k+1-l)}) \end{aligned}$$

1.10 Composition des applications de classe $\mathcal{C}^k$

Soient I et J deux intervalles non triviaux de $\mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et $\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^k$ sur J tq $\varphi(J) \subset I$.

Alors $f \circ \varphi$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur J .

Démonstration

On prouve la propriété pour $k \in \mathbb{N}$ en raisonnant par récurrence sur k . (Le cas $k = \infty$ en découle)

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, soit :

$\mathcal{P}(k)$: pour tout $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^k$ et pour tout $\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^k$ tq $\varphi(J) \subset I$, $f \circ \varphi$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur J .

$\mathcal{P}(0)$ est vraie : cours sur la continuité.

On suppose que $\mathcal{P}(k)$ est vraie.

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ et $\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ tq $\varphi(J) \subset I$.

$k+1 \geq 1$ donc f et φ sont dérivables.

On en déduit alors que $f \circ \varphi$ est dérivable sur J et que $(f \circ \varphi)' = [f' \circ \varphi] \cdot \varphi'$.

f' et φ sont de classe $\mathcal{C}^k$ donc d'après l'hypothèse de récurrence $f' \circ \varphi$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur J .

φ' est de classe $\mathcal{C}^k$ sur J donc d'après 1.9 appliqué avec $B \begin{cases} \mathbb{K} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \\ (\lambda, x) \mapsto \lambda x \end{cases}$, l'application

$(f \circ \varphi)' = [f' \circ \varphi] \cdot \varphi'$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur J .

On a : $\begin{cases} f \circ \varphi \text{ dérivable sur } J \\ (f \circ \varphi)' \text{ de classe } \mathcal{C}^k \text{ sur } J \end{cases}$

Donc $f \circ \varphi$ est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ sur J .

2 Ouverts d'un espace vectoriel normé

2.1 Point intérieur à une partie : définition

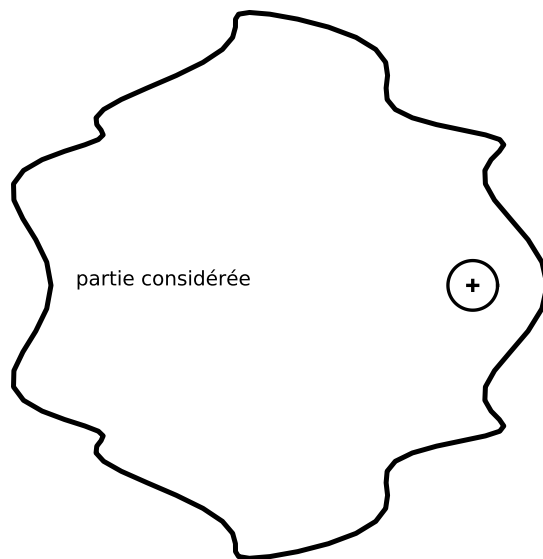
Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

Soient A une partie de E et a un élément de E .

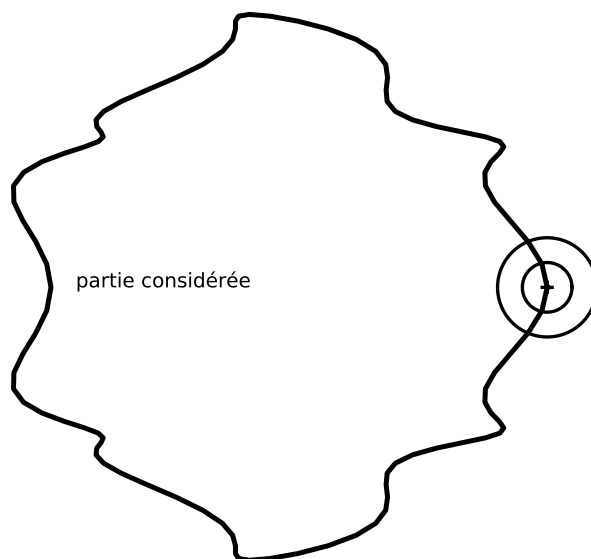
On dit que a est un point intérieur à A si, et seulement si, il existe $r > 0$ tel que $\mathcal{B}(a, r) \subset A$

On observe immédiatement qu'un point intérieur à A est nécessairement un élément de A .

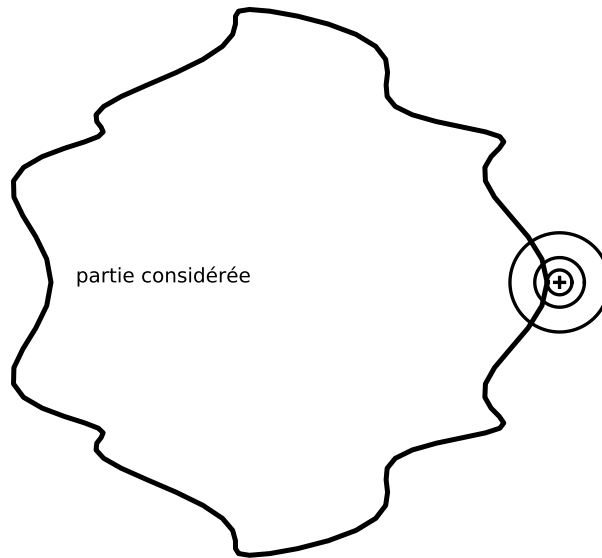
Exemple de point intérieur à une partie



Exemple de point qui n'est pas point intérieur à une partie



Exemple de point qui n'est pas point intérieur à une partie



Remarque

Si E est de dimension finie, cette notion est indépendante de la norme :

Soit $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ deux normes sur E .

On suppose que a est point intérieur à A pour $\|\cdot\|_1$:

$\exists r_1 > 0$ tq $\mathcal{B}(a, r_1, \|\cdot\|_1) \subset A$

E étant de dimension finie, $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont équivalentes :

$\exists \alpha, \beta > 0$ tq $\forall x \in E \quad \alpha \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \beta \|x\|_2$

$\mathcal{B}\left(a, \frac{r_1}{\beta}, \|\cdot\|_2\right) \subset A$ donc a est point intérieur à A pour $\|\cdot\|_2$.

2.2 Point intérieur à une partie : exemples

- Cas des intervalles de $\mathbb{R}$

Soient a et b deux réels tq $a < b$

L'ensemble des points intérieurs à $]a, b[$ est $]a, b[$.

L'ensemble des points intérieurs à $]a, b]$ est $]a, b[$.

L'ensemble des points intérieurs à $[a, b[$ est $]a, b[$.

L'ensemble des points intérieurs à $[a, b]$ est $]a, b[$.

L'ensemble des points intérieurs à $] - \infty, a]$ est $] - \infty, a[$.

L'ensemble des points intérieurs à $] - \infty, a[$ est $] - \infty, a[$.

L'ensemble des points intérieurs à $]a, +\infty[$ est $]a, +\infty[$.

L'ensemble des points intérieurs à $[a, +\infty[$ est $]a, +\infty[$.

L'ensemble des points intérieurs à $[a, a] = \{a\}$ est $\emptyset$.

L'ensemble des points intérieurs à $\mathbb{R}$ est $\mathbb{R}$.

L'ensemble des points intérieurs à $\emptyset$ est $\emptyset$.

- Cas de $\mathbb{Q}$ et de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Aucun réel n'est point intérieur à $\mathbb{Q}$:

En effet soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\forall r > 0]x - r; x + r[\cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \neq \emptyset$$

Donc x n'est pas point intérieur à $\mathbb{Q}$.

Aucun réel n'est point intérieur à $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

En effet soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\forall r > 0]x - r; x + r[\cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$$

donc x n'est pas point intérieur à $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

- Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
Déterminer l'ensemble des points intérieurs à $\mathcal{D}$.

Un point intérieur à $\mathcal{D}$ est dans $\mathcal{D}$.

Réciproquement, soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{D}$.

— **Premier cas** : χ_M est scindé à racines simples.

$$\Delta = (a + d)^2 - 4(ad - bc) \neq 0.$$

$$f \begin{cases} \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C} \\ (a, b, c, d) \mapsto (a + d)^2 - 4(ad - bc) \end{cases} \text{ est continue.}$$

Donc il existe $r > 0$ tel que :

$$\begin{cases} |\alpha - a| < r \\ |\beta - b| < r \\ |\gamma - c| < r \\ |\delta - d| < r \end{cases} \implies f(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \neq 0$$

Donc $\mathcal{B}(M, r, \|\cdot\|_\infty) \subset \mathcal{D}$.

Donc M est point intérieur à $\mathcal{D}$.

— **Deuxième cas** : χ_M a une racine double λ .

M est diagonalisable donc $M = \lambda I_2$.

$$\forall \epsilon > 0 \begin{pmatrix} \lambda & \epsilon \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \notin \mathcal{D}$$

Donc M n'est pas point intérieur à $\mathcal{D}$:

Si $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, on a :

$$(M = \lambda I_2) + \frac{r}{2} \frac{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\|} \in \mathcal{B}(M, r, \|\cdot\|) \text{ et } \notin \mathcal{D}.$$

Donc l'ensemble des points intérieurs à $\mathcal{D}$ est $\{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \text{ tq } \chi_M \text{ est scindé à racines simples}\}$.

2.3 Parties ouvertes : définition

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

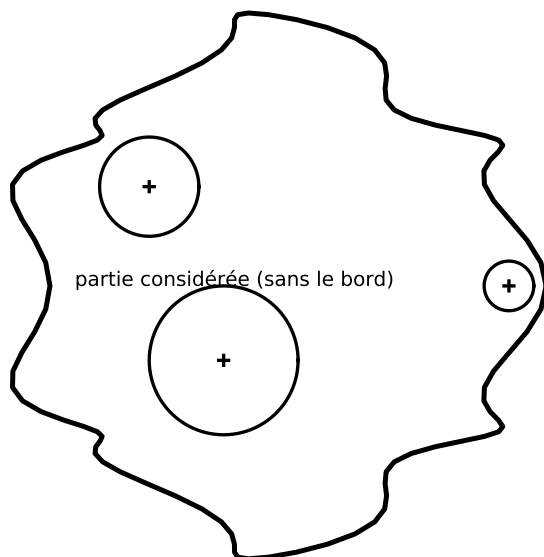
Soit Ω une partie de E .

On dit que Ω est un ouvert de E si et seulement si pour tout $x \in \Omega$ il existe $r > 0$ tel que $\mathcal{B}(x, r)$ soit incluse dans Ω .

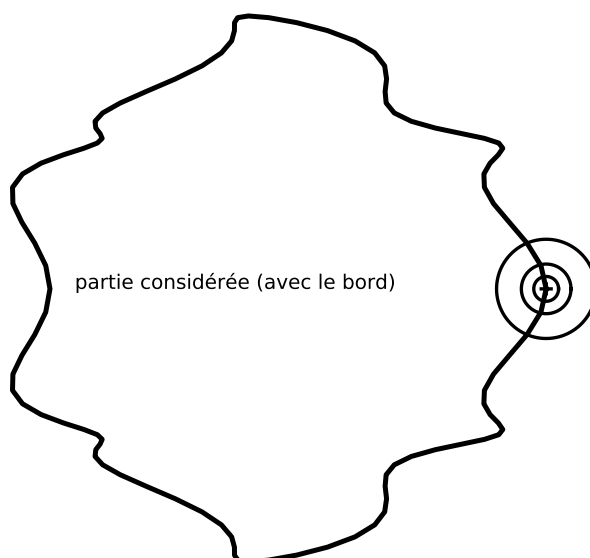
Dans le cas particulier où $E = \mathbb{R}$ on a :

$$\Omega \text{ ouvert de } \mathbb{R} \iff \forall x \in \Omega \exists r > 0 \text{ tq }]x - r, x + r[\subset \Omega$$

Exemple de partie ouverte



Exemple de partie non ouverte



2.4 Parties ouvertes : lien avec les points intérieurs

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.
Soit Ω une partie de E .

La définition du paragraphe précédent peut s'écrire :

Ω partie ouverte de $E \iff$ tout élément de Ω est point intérieur à Ω .

2.5 Parties ouvertes : exemples

- Les intervalles de $\mathbb{R}$ qui sont des ouverts de $\mathbb{R}$ sont :

1. $\mathbb{R}$ et $\emptyset$.
2. les intervalles du type $]a, b[$ avec $a < b$.
3. les intervalles du type $] - \infty, a[$ ou $]a, +\infty[$.

Démonstration

On vérifie facilement avec la définition que les intervalles ci-dessus sont bien des ouverts. On regarde ensuite les autres et on voit qu'ils ne le sont pas : je ne le rédige pas car c'est fastidieux.

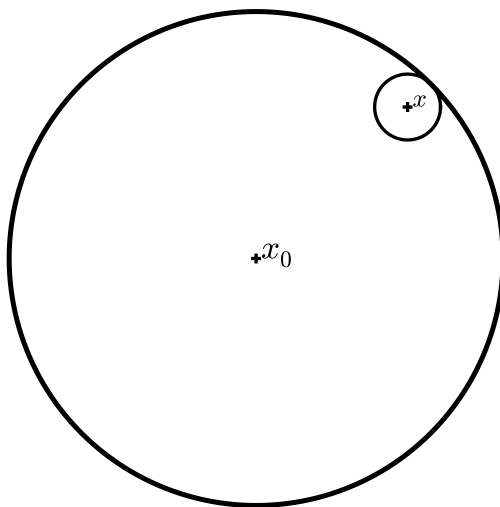
- Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.
 $\emptyset$ et E sont des ouverts de E .

Proposition

Pour tout $x_0 \in E$ et tout $r \in \mathbb{R}_+^*$, $\mathcal{B}(x_0, r)$ est un ouvert de E (le cas $r = 0$ est clair).

Les boules ouvertes sont des parties ouvertes de E .

Démonstration



Soient $x_0 \in E$ et $r > 0$.

Soit $x \in \mathcal{B}(x_0, r)$.

Soit $r' = r - d(x_0, x) = r - \|x - x_0\|$.

$r' > 0$.

Soit $y \in \mathcal{B}(x, r')$.

$d(x, y) < r'$ donc $d(x_0, y) \leq d(x_0, x) + d(x, y) < d(x_0, x) + r' = r$.
 Donc $y \in \mathcal{B}(x_0, r)$.
 Donc $\mathcal{B}(x, r') \subset \mathcal{B}(x_0, r)$.
 D'où $\mathcal{B}(x_0, r)$ est un ouvert de E .

2.6 Réunion d'ouverts

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, I un ensemble non vide et $(\Omega_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts de E .

Alors $\bigcup_{i \in I} \Omega_i$ est un ouvert de E .

Toute réunion d'ouverts de E est un ouvert de E .

Démonstration

Si $\bigcup_{i \in I} \Omega_i = \emptyset$ le résultat est clair.

On suppose $\bigcup_{i \in I} \Omega_i \neq \emptyset$.

Soit $x \in \bigcup_{i \in I} \Omega_i$.

$\exists i_0 \in I$ tq $x \in \Omega_{i_0}$

Ω_{i_0} est un ouvert de E donc :

$\exists r > 0$ tq $\mathcal{B}(x, r) \subset \Omega_{i_0}$

Or $\Omega_{i_0} \subset \bigcup_{i \in I} \Omega_i$ donc $\mathcal{B}(x, r) \subset \bigcup_{i \in I} \Omega_i$.

Donc $\bigcup_{i \in I} \Omega_i$ est bien un ouvert de E .

2.7 Intersection d'ouverts de E

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, I un ensemble **fini** non vide et $(\Omega_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts de E .

Alors $\bigcap_{i \in I} \Omega_i$ est un ouvert de E .

Toute intersection **finie** d'ouverts de E est un ouvert de E .

Démonstration

Si $\bigcap_{i \in I} \Omega_i = \emptyset$ le résultat est clair.

On suppose $\bigcap_{i \in I} \Omega_i \neq \emptyset$.

Soit $x \in \bigcap_{i \in I} \Omega_i$.

Pour tout $i \in I$, Ω_i est un ouvert de E donc :

$\forall i \in I \exists r_i \in \mathbb{R}_+^*$ tq $\mathcal{B}(x, r_i) \subset \Omega_i$

Soit $r = \min_{i \in I} r_i$.

I est fini non vide donc r existe et $r \in \mathbb{R}_+^*$.

$\mathcal{B}(x, r) = \bigcap_{i \in I} \mathcal{B}(x, r_i) \subset \bigcap_{i \in I} \Omega_i$ donc $\bigcap_{i \in I} \Omega_i$ est un ouvert de E .

Remarque

L'hypothèse "I fini" est indispensable :

$I = \mathbb{N}^*, \Omega_n = \left] -\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.

Or $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \Omega_n = \{0\}$ n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}$.

2.8 Continuité et ensembles ouverts

2.8.1 Théorème

Soient $(E_1, \|\cdot\|)$ et $(E_2, \|\cdot\|)$ deux espaces vectoriels normés et $f : E_1 \rightarrow E_2$ continue. Pour tout partie ouverte Ω_2 de E_2 , $\Omega_1 = f^{-1}(\Omega_2) = \{x \in E_1 \text{ tq } f(x) \in \Omega_2\}$ est une partie ouverte de E_1 .

Démonstration

Si $\Omega_1 = \emptyset$ le résultat est clair.

On suppose désormais $\Omega_1 \neq \emptyset$.

On va montrer :

$\forall x \in \Omega_1 \exists r > 0 \text{ tq } \mathcal{B}(x, r) \subset \Omega_1$.

Soit $x \in \Omega_1$.

$f(x) \in \Omega_2$, ouvert de E_2 donc :

$\exists \rho > 0 \text{ tq } \mathcal{B}(f(x), \rho) \subset \Omega_2$.

f est continue donc f est continue au point x .

Donc :

$\exists \delta > 0 \text{ tq } \forall y \in E_1 \ \|y - x\| \leq \delta \implies \|f(y) - f(x)\| \leq \epsilon = \frac{\rho}{2}$.

Donc si $y \in \mathcal{B}(x, \delta)$, $f(y) \in \mathcal{B}(f(x), \rho)$.

D'où $\mathcal{B}(x, \delta) \subset \Omega_1$

Ω_1 est bien un ouvert de E .

2.8.2 Applications

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ continue. $\{x \in E \text{ tq } f(x) > 0\}$ est un ouvert de E .

En effet, $\{x \in E \text{ tq } f(x) > 0\} = f^{-1}(\mathbb{R}_+^*)$ et $\mathbb{R}_+^*$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.

2.8.3 Remarques

- La remarque précédente est celle qui figure explicitement dans le programme. On peut la généraliser :
 $\{x \in E \text{ tq } f(x) < 0\}$, $\{x \in E \text{ tq } f(x) > r\}$, $\{x \in E \text{ tq } f(x) < r\}$ et $\{x \in E \text{ tq } f(x) \neq r\}$ sont des ouverts de E .

- On dispose ainsi d'un moyen commode d'établir que tel ou tel ensemble est ouvert.

Par exemple, si x_0 est un élément fixé de E , l'application $\begin{cases} E \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \|x - x_0\| \end{cases}$ étant continue, on retrouve que $\mathcal{B}(x_0, r) = \{x \in E \text{ tq } \|x - x_0\| < r\}$ est une partie ouverte de E .

- **Autre exemple classique**

L'application $\det \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \\ A \mapsto \det A \end{cases}$ est continue.

On en déduit que $GL_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ tq } \det A \neq 0\}$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

L'application $\det \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C} \\ A \mapsto \det A \end{cases}$ est continue mais n'est pas à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour contourner la difficulté tout en restant dans le cadre du programme, on peut utiliser :

$$f \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{R} \\ A \mapsto |\det A| \end{cases}$$

f est continue donc $GL_n(\mathbb{C}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \text{ tq } f(A) \neq 0\}$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

On peut aussi revenir à la proposition initiale (celle de 2.8.1).

2.9 Ouverts et fermés

2.9.1 Proposition

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

Soit A une partie de E .

A ouvert de $E \iff \mathcal{C}_E A$ est un fermé de E

Démonstration

- On suppose que A est un ouvert de E .

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{C}_E A$ qui converge vers $a \in E$.

Supposons $a \in A$.

A est un ouvert donc :

$\exists r > 0$ tq $\mathcal{B}(a, r) \subset A$.

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers a donc :

$\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq n_0 \quad \|a_n - a\| < r$

a_{n_0} appartient donc à $\mathcal{B}(a, r)$ qui est incluse dans A .

$a_{n_0} \in A \cap \mathcal{C}_E A = \emptyset$: absurde.

Donc $a \in \mathcal{C}_E A$ et par caractérisation séquentielle des fermés, $\mathcal{C}_E A$ est fermé.

- On suppose que $\mathcal{C}_E A$ est un fermé de E .

Soit $a \in A$.

$\mathcal{C}_E A$ est fermé donc $\mathcal{C}_E A$ est égal à l'ensemble de ses points adhérents.

a qui n'est pas dans $\mathcal{C}_E A$ n'est donc pas un point adhérent à $\mathcal{C}_E A$:

$\exists \epsilon > 0$ tq $\mathcal{B}(a, \epsilon) \cap \mathcal{C}_E A = \emptyset$ ie $\mathcal{B}(a, \epsilon) \subset A$

$\mathcal{C}_E A$ est donc un ouvert de E .

2.9.2 Remarque

"fermé" n'est pas le contraire d' "ouvert".

$\emptyset$ et E sont à la fois ouverts et fermés (et on peut montrer que ce sont les seules parties de E qui sont à la fois ouvertes et fermées).

Dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ n'est ni ouvert ni fermé.

En effet l'ensemble des points intérieurs à $\mathbb{Q} = \emptyset \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$

Toujours dans $\mathbb{R}$, les intervalles du type $]x, y]$ ou $[x, y[$ (avec $x < y$) ne sont ni ouverts ni fermés.

3 Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

3.1 Dérivée en un point selon un vecteur

3.1.1 Définition

Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^p$, f une fonction de U dans $\mathbb{R}$, $a \in U$ et v un vecteur non nul de $\mathbb{R}^p$.

Soit $\phi : t \in \mathbb{R} \mapsto f(a + tv) \in \mathbb{R}$.

U étant un ouvert, il existe $\delta > 0$ tel que l'intervalle ouvert $] -\delta; \delta[$ est inclus dans le domaine de définition de ϕ .

On dit que f est dérivable en a selon v si, et seulement si, la fonction ϕ est dérivable en 0.

On appelle alors dérivée de f en a selon v et on note $D_v f(a)$ le nombre $\phi'(0)$.

On a donc $D_v f(a) = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t}$

3.1.2 Lien avec la continuité

- Une fonction continue n'admet pas forcément de dérivée suivant un vecteur.

Par exemple, la fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto |x| + |y| \end{cases}$ est continue : c'est une norme.

On prend $a = (0, 0)$ et $v = (0, 1)$.

La fonction f est continue au point a mais n'admet pas de dérivée selon v au point a : dans ce cas, la fonction ϕ est définie sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \phi(t) = f(a + tv) = f(t, 0) = |t|$$

et ϕ n'est pas dérivable en 0.

- Si une fonction admet en un point des dérivées suivant tout vecteur non nul, elle n'est pas forcément continue en ce point.

$$\text{Soit } f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto \frac{y^2}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ (x, y) \mapsto 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}.$$

On prend $a = (0, 0)$.

Soit $v = (v_1, v_2)$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^2$.

Dans ce cas ϕ est définie sur $\mathbb{R}$.

On suppose d'abord $v_1 \neq 0$.

$$\forall t \in \mathbb{R}^* \quad a + tv = (tv_1, tv_2) \text{ avec } tv_1 \neq 0$$

Donc :

$$\forall t \in \mathbb{R}^* \quad \phi(t) = f(a + tv) = f(tv_1, tv_2) = \frac{(tv_2)^2}{tv_1} = t \frac{v_2^2}{v_1}$$

De plus $\phi(0) = f(0, 0) = 0$ donc :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \phi(t) = t \frac{v_2^2}{v_1}$$

Donc ϕ est dérivable en $t = 0$ et $\phi'(0) = \frac{v_2^2}{v_1}$.

Donc f est dérivable en a suivant v et $D_v f(a) = \frac{v_2^2}{v_1}$.

On suppose ensuite $v_1 = 0$.

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f(a + tv) = f(0, tv_2) = 0$$

Donc ϕ est dérivable en $t = 0$ et $\phi'(0) = 0$

Donc f est dérivable en a suivant v et $D_v f(a) = 0$.

On a bien montré que f est dérivable en $(0, 0)$ suivant tout vecteur non nul.

$$\forall t \in \mathbb{R}^* \quad f(t^2, t) = \frac{t^2}{t^2} = 1 \xrightarrow[t \neq 0]{t \rightarrow 0} 1 \neq f(0, 0)$$

3.2 Dérivées partielles du premier ordre

3.2.1 Définition et notations

Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^p$, f une fonction de U dans $\mathbb{R}$, $a \in U$.

On appelle dérivées partielles du premier ordre de f au point a , les dérivées de f au point a suivant les vecteurs de la base canonique.

Soit $(e_1, \dots, e_p)$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$.

Soit $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$.

$D_{e_i} f(a)$ est noté $\partial_i f(a)$.

Si on note $x_1, \dots, x_p$ les variables $D_{e_i} f(a)$ est noté $\frac{\partial f}{\partial x_i} f(a)$.

Si on explicite la fonction ϕ de la question précédente, on a :

$$\phi(t) = f(a + te_i) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + t, a_{i+1}, \dots, a_n)$$

On en déduit que ϕ est dérivable en 0 si, et seulement si, la fonction $\psi : s \in \mathbb{R} \mapsto f(a_1, \dots, a_{i-1}, s, a_{i+1}, \dots, a_n)$ est dérivable en a_i .

De plus $\partial_i f(a) = \phi'(0) = \psi'(a_i)$.

3.2.2 Exemple

Soit $U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

$$\text{Soit } f \begin{cases} U \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto x^y \end{cases}.$$

$$\forall (x, y) \in U \quad f(x, y) = e^{y \ln x}$$

$\partial_1 f$ et $\partial_2 f$ sont définies sans problème sur U et :

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in U \quad \partial_1 f(x, y) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y x^{y-1} \\ \partial_2 f(x, y) &= \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \ln x x^y \end{aligned}$$

Mais on peut aussi écrire :

$$\forall (u, v) \in U \quad \partial_1 f(u, v) = v u^{v-1}$$

ou :

$$\forall (u, v) \in U \quad \frac{\partial f}{\partial y}(u, v) = \ln u u^v$$

ce qui est plus surprenant.

On a également :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \quad \partial_1 f(y, x) = x y^{x-1}$$

ou encore :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \quad \frac{\partial f}{\partial x}(y, x) = x y^{x-1} \text{ et } f(y, x) = y^x$$

ainsi que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \quad \partial_2 f(y, x) = \ln y y^x$$

ou encore :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \quad \frac{\partial f}{\partial y}(y, x) = \ln y y^x \text{ et } f(y, x) = y^x$$

3.3 Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

3.3.1 Définition

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$.

On dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U si, et seulement si, toutes les dérivées partielles (du premier ordre) de f sont définies et continues sur U .

3.3.2 Exemples de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

- Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ rationnelle.
Les règles de calcul des dérivées (des fonctions d'une seule variable) montrent que les dérivées partielles du premier ordre de f sont définies sur U et sont encore des fonctions rationnelles définies sur U donc continues sur U . D'où $f \in \mathcal{C}^1$ sur U .
Ce résultat s'applique en particulier aux fonctions polynomiales.

Par exemple, $\det \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \\ A \mapsto \det A \end{cases}$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

- Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \\ (0, 0) \mapsto 0 \end{cases}$

On va montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

D'après ce qui précède, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Il reste à prouver que les dérivées partielles (du premier ordre) de f existent et sont continues en $(0, 0)$.

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f(x, 0) = x^2$$

De plus $f(0, 0) = 0 = 0^2$ donc :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x, 0) = x^2$$

On en déduit $\partial_1 f(0, 0) = 0$: dérivée de $x \mapsto x^2$ en $x = 0$.

De même $\partial_2 f(0, 0) = 0$.

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \quad \partial_1 f(x, y) &= \frac{4x^3(x^2 + y^2) - 2x(x^4 + y^4)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2x^5 + 4x^3y^2 - 2xy^4}{(x^2 + y^2)^2} \\ \partial_2 f(x, y) &= \frac{2y^5 + 4x^2y^3 - 2yx^4}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned}$$

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Soit $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

$$\exists \theta \in \mathbb{R} \text{ tq } \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

$$\partial_1 f(x, y) = \partial_1 f(r \cos \theta, r \sin \theta) = 2r(\cos^5 \theta + 2 \cos^3 \theta \sin^2 \theta - \cos \theta \sin^4 \theta)$$

Donc :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \quad |\partial_1 f(x, y)| \leq 8\sqrt{x^2 + y^2} \text{ triviale pour } (x, y) = (0, 0).$$

Donc :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad |\partial_1 f(x, y)| \leq 8\sqrt{x^2 + y^2}$$

Donc $\partial_1 f$ est continue en $(0, 0)$.

Idem pour $\partial_2 f$.

Finalement, f est bien $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

$$\bullet \text{ Soit } f \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \\ (0, 0) \mapsto 0 \end{cases}$$

f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ en tant que fonction rationnelle.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x, 0) = x$$

$$\text{Donc } \partial_1 f(0, 0) = 1.$$

$$\forall y \in \mathbb{R} \quad f(0, y) = -y$$

$$\text{Donc } \partial_2 f(0, 0) = -1.$$

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \quad \partial_1 f(x, y) &= \frac{3x^2(x^2 + y^2) - 2x(x^3 - y^3)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x(x^3 + 3xy^2 + 2y^3)}{(x^2 + y^2)^2} \\ \partial_2 f(x, y) &= \frac{-y(y^3 + 3yx^2 + 2x^3)}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned}$$

$$\forall y \in \mathbb{R}^* \quad \partial_1 f(0, y) = 0 \xrightarrow[y \neq 0]{y \rightarrow 0} 0 \neq \partial_1 f(0, 0).$$

$\partial_1 f$ n'est pas continue en $(0, 0)$.

f n'est pas $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

3.3.3 Développement limité à l'ordre 1 d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$

1. Préliminaire

Soit V un ouvert de $\mathbb{R}^p$ contenant $(0, \dots, 0)$ et $g : V \rightarrow \mathbb{R}$.

Du fait de l'équivalence des normes sur $\mathbb{R}^p$:

Il existe $\|\cdot\|$ norme sur $\mathbb{R}^p$ tq $g(h_1, \dots, h_p) = o(\|(h_1, \dots, h_p)\|)$ $((h_1, \dots, h_p) \rightarrow (0, \dots, 0))$
 $\iff$ Pour toute norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}^p$ on a $g(h_1, \dots, h_p) = o(\|(h_1, \dots, h_p)\|)$ $((h_1, \dots, h_p) \rightarrow (0, \dots, 0))$

On écrit alors $g(h_1, \dots, h_p) = o(h_1, \dots, h_p)$.

2. Théorème

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $(a_1, \dots, a_p) \in U$.

On a :

$$f(a_1 + h_1, \dots, a_p + h_p) = f(a_1, \dots, a_p) + \sum_{j=1}^p h_j \partial_j f(a_1, \dots, a_p) + o(h_1, \dots, h_p)$$

La démonstration de ce résultat n'est pas exigible.

3.3.4 Lien avec la continuité

Théorème

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

Alors f est continue sur U .

(Découle directement du théorème précédent)

Bien sûr, la réciproque est fausse.

Exemple

On reprend la fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \\ (0, 0) \mapsto 0 \end{cases}$

On a déjà vu que f n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

On va montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ en tant que fonction rationnelle.

$\forall (r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \quad f(r \cos \theta, r \sin \theta) = r(\cos^3 \theta - \sin^3 \theta)$ donc :

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \quad |f(x, y)| \leq 2\sqrt{x^2 + y^2}$ trivial pour $(x, y) = (0, 0)$

Donc :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad |f(x, y)| \leq 2\sqrt{x^2 + y^2} \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (0, 0)} 0$$

On en déduit que f est continue en $(0, 0)$.

Finalement, f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

3.3.5 Différentielle en un point d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$

• Définition

Soient U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^p$, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $a \in U$.

On appelle différentielle de f au point a l'application linéaire notée $df(a)$ de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$

qui associe à $h = (h_1, \dots, h_p)$ vecteur de $\mathbb{R}^p$ le nombre $\sum_{i=1}^p h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \sum_{i=1}^p h_i \partial_i f(a)$.

En d'autres termes :

$$df(a) : \begin{cases} \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R} \\ h = (h_1, \dots, h_p) \mapsto \sum_{i=1}^p h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \sum_{i=1}^p h_i \partial_i f(a) \end{cases}$$

L'image de $h = (h_1, \dots, h_p)$ par $df(a)$ est notée $df(a).h$:

$$\forall h = (h_1, \dots, h_p) \in \mathbb{R}^p \quad df(a).h = \sum_{i=1}^p h_i \partial_i f(a) = \sum_{i=1}^p h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$$

• Premiers exemples

— Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) \mapsto x + 2y^2 + z^3 \end{cases}$
 f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$ car polynomiale et :

$$\begin{aligned} \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad \partial_1 f(x, y, z) &= 1 \\ \partial_2 f(x, y, z) &= 4y \\ \partial_3 f(x, y, z) &= 3z^2 \end{aligned}$$

Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $df(x, y, z) \begin{cases} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \\ (h_1, h_2, h_3) \mapsto h_1 + 4yh_2 + 3z^2h_3 \end{cases}$

ie :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \forall (h_1, h_2, h_3) \in \mathbb{R}^3 \quad df(x, y, z).(h_1, h_2, h_3) = h_1 + 4yh_2 + 3z^2h_3$$

— Soient U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^p$ et $f \begin{cases} U \rightarrow \mathbb{R} \\ a \mapsto Cte \in \mathbb{R} \end{cases}$.

Toutes les dérivées partielles de f sont définies sur U et sont identiquement nulles sur U donc continues.

On en déduit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et que :

$$\forall a \in U \quad df(a) = 0 = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})}$$

ou encore :

$$\forall h \in \mathbb{R}^p \quad df(a).h = 0 = 0_{\mathbb{R}}$$

- **Lien avec les développements limités**

Soient $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $a \in U$.

Comme on l'a vu, f possède un développement limité à l'ordre 1 en a . Il peut s'écrire :

$$f(a + h) = f(a) + df(a).h + o(h)$$

- **Lien avec la dérivée suivant un vecteur**

Soient $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $a \in U$.

Pour tout vecteur non nul v de $\mathbb{R}^p$, f a une dérivée au point a suivant v et $D_v f(a) = df(a).v$

En effet $f(a + tv) = f(a) + df(a).(tv) + o(tv) = f(a) + tdf(a).v + o(t)$ et la fonction $t \mapsto f(a + tv)$ est dérivable en $t = 0$ de dérivée $df(a).v$.

- **Remarque à propos de la détermination concrète de la différentielle**

Soient $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $a \in U$.

Les techniques de calcul de développements limités vues en première année restent valables¹. Il est donc parfois possible d'obtenir directement le développement limité de f au point a sans en passer par le calcul des dérivées partielles. On aboutit alors à une expression de la forme :

$$f(a + h) = f(a) + L(h) + o(h) \text{ avec } L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$$

Cette application L est alors nécessairement la différentielle de f au point a .

En effet $f(a + h) = f(a) + df(a).h + o(h)$.

En faisant la différence, on obtient $L(h) - df(a)(h) = o(h)$.

On fixe alors $h_0 \in \mathbb{R}^p \setminus \{0\}$ et on considère un réel t destiné à tendre vers 0.

$$L(th_0) - df(a)(th_0) = o(th_0)$$

ce qui donne compte tenu de la linéarité de L et de $df(a)$:

$$tL(h_0) - tdf(a)(h_0) = to(h_0) = to(1)$$

Il en résulte que le vecteur constant $L(h_0) - df(a).h_0$ est négligeable devant 1, donc tend vers 0.

On en déduit $L(h_0) = df(a).h_0$, et ce pour tout $h_0 \in \mathbb{R}^p \setminus \{0\}$.

Il en résulte que les deux applications linéaires L et $df(a)$ sont égales.

1. même si leur mise en oeuvre sur des fonctions de plusieurs variables n'est pas toujours facile

• **Autres exemples**

— Soit $L : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ linéaire.

L est de classe $\mathcal{C}^1$ car elle est polynomiale.

Soit $a \in \mathbb{R}^p$.

$$L(a+h) = L(a) + L(h) = L(a) + L(h) + o(h)$$

D'où : $dL(a) = L$

— On munit $\mathbb{R}^p$ de sa structure euclidienne canonique.

Soit $f \begin{cases} \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \|x\|^2 \end{cases}$

f est de classe $\mathcal{C}^1$ car elle est polynomiale.

Soit $a \in \mathbb{R}^p$.

$$\begin{aligned} \forall h \in \mathbb{R}^p \quad f(a+h) &= \|a+h\|^2 \\ &= \|a\|^2 + 2(a|h) + \|h\|^2 \end{aligned}$$

$2(a|h)$ est linéaire en h

$\|h\|^2$ est négligeable devant h

Donc :

$$\forall a \in \mathbb{R}^p \quad df(a) \begin{cases} \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R} \\ h \mapsto 2(a|h) \end{cases}$$

Plus généralement, soit $S \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ une matrice symétrique.

Soit $g \begin{cases} \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^T S x \end{cases}$

g est de classe $\mathcal{C}^1$ car elle est polynomiale.

Soit $a \in \mathbb{R}^p$.

$$\begin{aligned} \forall h \in \mathbb{R}^p \quad g(a+h) &= (a+h)^T S (a+h) \\ &= (a^T + h^T)(Sa + Sh) \\ &= a^T Sa + a^T Sh + h^T Sa + h^T Sh \\ h^T Sa &= (h^T Sa)^T \text{ car les matrices de } \mathcal{M}_1(\mathbb{R}) \text{ sont toutes symétriques} \\ &= a^T S^T h = a^T Sh \text{ car } S \text{ est symétrique} \\ g(a+h) &= g(a) + 2a^T Sh + g(h) \\ &= g(a) + 2(Sa)^T h + g(h) = g(a) + 2(Sa|h) + o(h) \end{aligned}$$

et $h \mapsto 2a^T Sh$ est linéaire.

$\forall h \in \mathbb{R}^p \quad |g(h)| = |(h|Sh)| \leq \|h\| \|Sh\|$ par Cauchy-Schwarz

$$\forall h \in \mathbb{R}^p \quad \frac{|g(h)|}{\|h\|} \leq \|Sh\| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

Donc $g(h) = o(h)$

$$\text{D'où } dg(a) \begin{cases} \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R} \\ h \mapsto 2a^T Sh = 2(a|Sh) = 2(Sa|h) \end{cases}$$

A titre de comparaison nous allons déterminer $dg(a)$ en revenant à la définition.

Soit $k \in \{1; \dots; p\}$.

$$\begin{aligned}
 \forall x \in \mathbb{R}^p \quad g(x) &= x^T S x = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^p s_{1,j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^p s_{p,j} x_j \end{pmatrix} \\
 &= \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p s_{i,j} x_i x_j \\
 &= s_{k,k} x_k^2 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^p (s_{k,j} x_k x_j + s_{j,k} x_j x_k) + \sum_{i,j \neq k} s_{i,j} x_i x_j \\
 \frac{\partial g}{\partial x_k}(x) &= 2s_{k,k} x_k + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^p (s_{k,j} x_j + s_{j,k} x_j) \\
 &= 2s_{k,k} x_k + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^p (s_{k,j} x_j + s_{k,j} x_j) \text{ car } S \text{ est symétrique} \\
 &= 2 \sum_{j=1}^p s_{k,j} x_j = 2(Sx)_k
 \end{aligned}$$

On a alors pour $a \in \mathbb{R}^p$:

$$\begin{aligned}
 \forall h \in \mathbb{R}^p \quad dg(a)(h) &= \sum_{j=1}^p \frac{\partial g}{\partial x_j}(a) h_j = 2 \sum_{j=1}^p (Sa)_j h_j \\
 &= 2(Sa)^T h = 2a^T S^T h = 2a^T S h \text{ car } S \text{ est symétrique}
 \end{aligned}$$

3.3.6 Gradient en un point d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$

Dans ce paragraphe, on munit systématiquement $\mathbb{R}^p$ de sa structure euclidienne canonique.

- **Définition**

Soient U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^p$, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $a \in U$.

On appelle gradient de f au point a , et on note $\nabla f(a)$, le vecteur de $\mathbb{R}^p$:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_p}(a) \right) = (\partial_1 f(a), \dots, \partial_p f(a))$$

- **Exemple**

Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x, y, z) \mapsto xy + xz + yz$.

f est de classe $\mathcal{C}^1$ car polynomiale.

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad \nabla f(x, y, z) = (y + z, x + z, x + y)$$

- **Lien avec la différentielle**

Soient U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^p$, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $a \in U$.

$$\forall h \in \mathbb{R}^p \quad df(a).h = (\nabla f(a)|h)$$

- **Lien avec les développements limités**

Soient U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^p$, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $a \in U$.

Comme on l'a vu, f possède un développement limité à l'ordre 1 en a . Il peut s'écrire :
 $f(a+h) = f(a) + (\nabla f(a)|h) + o(h)$

- **Remarque à propos de la détermination concrète du gradient**

Soient U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^p$, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $a \in U$.

Les techniques de calcul de développements limités vues en première année restent valables. Il est donc parfois possible d'obtenir directement le développement limité de f au point a sans en passer par le calcul des dérivées partielles. On aboutit alors à une expression de la forme :

$$f(a+h) = f(a) + (V|h) + o(h) \text{ avec } V \text{ vecteur de } \mathbb{R}^p.$$

Ce vecteur V est alors nécessairement le gradient de f au point a .

En effet $f(a+h) = f(a) + (\nabla f(a)|h) + o(h)$.

En faisant la différence, on obtient $(V|h) - (\nabla f(a)|h) = o(h)$.

On fixe alors $h_0 \in \mathbb{R}^p \setminus \{0\}$ et on considère un réel t destiné à tendre vers 0.

$$(V - \nabla f(a)|th_0) = o(th_0)$$

ce qui donne :

$$t(V - \nabla f(a)|h_0) = t o(h_0) = t o(1)$$

Il en résulte que le nombre constant $(V - \nabla f(a)|h_0)$ est négligeable devant 1, donc tend vers 0.

On en déduit $(V - \nabla f(a)|h_0) = 0$, et ce pour tout $h_0 \in \mathbb{R}^p \setminus \{0\}$.

Il en résulte que les vecteurs V et $\nabla f(a)$ sont égaux.

- **Exemples**

$$\text{Soit } f \begin{cases} \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \|x\|^2 \end{cases}$$

f est de classe $\mathcal{C}^1$ car elle est polynomiale.

Soit $a \in \mathbb{R}^p$.

$$f(a+h) = f(a) + (2a|h) + o(h)$$

Donc $\nabla f(a) = 2a$.

Plus généralement, soit $S \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ une matrice symétrique.

$$\text{Soit } g \begin{cases} \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^T S x \end{cases}$$

g est de classe $\mathcal{C}^1$ car elle est polynomiale.

Soit $a \in \mathbb{R}^p$.

$$g(a+h) = g(a) + (2Sa|h) + o(h)$$

Donc $\nabla g(a) = 2Sa$.

- **Interprétation géométrique**

Soient U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^p$, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $a \in U$.

On suppose $\nabla f(a) \neq 0$.

Soit v un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^p$.

$$D_v f(a) = df(a).v = (\nabla f(a)|v)$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$|D_v f(a)| \leq \|\nabla f(a)\| \times \|v\| = \|\nabla f(a)\|$ avec égalité si, et seulement si, $\nabla f(a)$ et v sont colinéaires et de même sens.

$\nabla f(a)$ est colinéaire au vecteur unitaire selon lequel la dérivée de f en a est maximale,

et de même sens.

3.4 Opérations algébriques sur les applications de classe $\mathcal{C}^1$

3.4.1 Combinaisons linéaires

Soient U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^p$, f et $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et λ et $\mu \in \mathbb{R}$.

Alors $\lambda f + \mu g$ ($U \rightarrow \mathbb{R}$) est de classe $\mathcal{C}^1$ et on a :

$$\forall a \in U \forall i \in \{1; \dots; p\} \partial_i(\lambda f + \mu g)(a) = \lambda \partial_i f(a) + \mu \partial_i g(a)$$

ou avec des notations différentes :

$$\forall a \in U \forall i \in \{1; \dots; p\} \frac{\partial(\lambda f + \mu g)}{\partial x_i}(a) = \lambda \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \mu \frac{\partial g}{\partial x_i}(a)$$

ou, ce qui revient au même :

$$\forall a \in U d(\lambda f + \mu g)(a) = \lambda df(a) + \mu dg(a)$$

De plus, si $\mathbb{R}^p$ est muni de sa structure euclidienne canonique on a :

$$\forall a \in U \nabla(\lambda f + \mu g)(a) = \lambda \nabla f(a) + \mu \nabla g(a)$$

ou, ce qui revient au même :

$$\nabla(\lambda f + \mu g) = \lambda \nabla f + \mu \nabla g$$

Démonstration

Les dérivées partielles du premier ordre étant en fait des dérivées de fonctions d'une seule variable réelle, le cours sur la dérivation des fonctions d'une variable réelle permet d'affirmer que toutes les dérivées partielles du premier ordre de $\lambda f + \mu g$ sont définies sur U et que :

$$\forall a \in U \forall i \in \{1; \dots; p\} \frac{\partial(\lambda f + \mu g)}{\partial x_i}(a) = \lambda \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \mu \frac{\partial g}{\partial x_i}(a)$$

De plus, une combinaison linéaire de fonctions continues est une fonction continue donc les dérivées partielles du premier ordre de $\lambda f + \mu g$ sont continues sur U ie : $\lambda f + \mu g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U .

On a alors :

$$\begin{aligned} \forall a \in U \forall h = (h_1, \dots, h_p) \in \mathbb{R}^p d(\lambda f + \mu g)(a).h &= \sum_{i=1}^p h_i \frac{\partial(\lambda f + \mu g)}{\partial x_i}(a) \\ &= \sum_{i=1}^p h_i \left(\lambda \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \mu \frac{\partial g}{\partial x_i}(a) \right) \\ &= \lambda \sum_{j=1}^p h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) + \mu \sum_{i=1}^p h_i \frac{\partial g}{\partial x_i}(a) \\ &= \lambda df(a).h + \mu dg(a).h \end{aligned}$$

D'où :

$$\forall a \in U d(\lambda f + \mu g)(a) = \lambda df(a) + \mu dg(a)$$

Les autres relations s'en déduisent immédiatement.

Corollaire

L'ensemble des applications de classe $\mathcal{C}^1$ de U dans $\mathbb{R}$ est un sev de $\mathcal{F}(U, \mathbb{R})$ donc en particulier un $\mathbb{R}$ ev.

On le note $\mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ ou $\mathcal{C}^1(U)$.

3.4.2 Produit

Soient U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^p$, f et $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

Alors fg est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et on a :

$$\forall a \in U \forall i \in \{1; \dots; p\} \quad \partial_i(fg)(a) = \partial_i f(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot \partial_i g(a)$$

ou avec des notations différentes :

$$\forall a \in U \forall i \in \{1; \dots; p\} \quad \frac{\partial(fg)}{\partial x_i}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i}(a)$$

ou, ce qui revient au même :

$$\forall a \in U \quad d(fg)(a) = g(a)df(a) + f(a)dg(a)$$

De plus, si $\mathbb{R}^p$ est muni de sa structure euclidienne canonique on a :

$$\forall a \in U \quad \nabla(fg)(a) = g(a) \cdot \nabla f(a) + f(a) \cdot \nabla g(a)$$

ou, ce qui revient au même :

$$\nabla(fg) = g \cdot \nabla f + f \cdot \nabla g$$

3.4.3 Inverse

Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^p$ et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ ne s'annulant pas.

Alors $\frac{1}{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et on a :

$$\forall a \in U \forall i \in \{1; \dots; p\} \quad \partial_i \left(\frac{1}{f} \right) (a) = -\frac{1}{f(a)^2} \partial_i f(a)$$

ou avec des notations différentes :

$$\forall a \in U \forall i \in \{1; \dots; p\} \quad \frac{\partial(1/f)}{\partial x_i}(a) = -\frac{1}{f(a)^2} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$$

ou, ce qui revient au même :

$$\forall a \in U \quad d \left(\frac{1}{f} \right) (a) = -\frac{1}{f(a)^2} df(a)$$

De plus, si $\mathbb{R}^p$ est muni de sa structure euclidienne canonique on a :

$$\forall a \in U \quad \nabla \left(\frac{1}{f} \right) (a) = -\frac{1}{f(a)^2} \nabla f(a)$$

ou, ce qui revient au même :

$$\nabla \left(\frac{1}{f} \right) = -\frac{1}{f^2} \nabla f$$

3.4.4 Quotient

Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^p$, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

Soit $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ ne s'annulant pas.

Alors $\frac{f}{g}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et on a :

$$\forall a \in U \forall i \in \{1; \dots; p\} \quad \partial_i \left(\frac{f}{g} \right) (a) = \frac{\partial_i f(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot \partial_i g(a)}{g(a)^2}$$

ou avec des notations différentes :

$$\forall a \in U \forall i \in \{1; \dots; p\} \quad \frac{\partial(f/g)}{\partial x_i}(a) = \frac{g(a) \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) - f(a) \frac{\partial g}{\partial x_i}(a)}{g(a)^2}$$

ou, ce qui revient au même :

$$\forall a \in U \quad d \left(\frac{f}{g} \right) (a) = \frac{1}{g(a)^2} (g(a)df(a) - f(a)dg(a))$$

De plus, si $\mathbb{R}^p$ est muni de sa structure euclidienne canonique on a :

$$\forall a \in U \quad \nabla \left(\frac{f}{g} \right) (a) = \frac{1}{g(a)^2} (g(a) \nabla f(a) - f(a) \nabla g(a))$$

ou, ce qui revient au même :

$$\nabla \left(\frac{f}{g} \right) = \frac{1}{g^2} (g \nabla f - f \nabla g)$$

3.5 Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ et composition

3.5.1 Dérivation d'une fonction de la forme $t \mapsto f(x_1(t), \dots, x_p(t))$

Soient U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^p$ et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

Soient I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et $x_1, \dots, x_p$ p fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de I dans $\mathbb{R}$ avec : $\forall t \in I \quad (x_1(t), \dots, x_p(t)) \in U$.

Alors $\psi \begin{cases} I \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto f(x_1(t), \dots, x_p(t)) \end{cases}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et on a :

$$\forall t \in I \quad \psi'(t) = \sum_{i=1}^p x'_i(t) \partial_i f(x_1(t), \dots, x_p(t)) = \sum_{i=1}^p x'_i(t) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1(t), \dots, x_p(t))$$

Si on note φ l'application $\begin{cases} I \rightarrow \mathbb{R}^p \\ t \mapsto (x_1(t), \dots, x_p(t)) \end{cases}$, on peut écrire la formule précédente sous

la forme :

$$\forall t \in I \quad \psi'(t) = df(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$$

Si de plus on munit $\mathbb{R}^p$ de sa structure euclidienne canonique, on a aussi :

$$\forall t \in I \quad \psi'(t) = (\nabla f(\varphi(t)) | \varphi'(t))$$

Exemple

Soient $f \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto x^2 + xy + 3y \end{cases}$ et $\varphi \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto (t^2, t^4) \end{cases}$.

f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ car polynomiale.

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \partial_1 f(x, y) = 2x + y \text{ et } \partial_2 f(x, y) = x + 3$$

φ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Donc $\psi = f \circ \varphi$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R} \quad \psi'(t) &= 2t(2t^2 + t^4) + 4t^3(t^2 + 3) \\ &= 2t^3(2 + t^2) + 4t^3(t^2 + 3) \\ &= 2t^3(2 + t^2 + 2t^2 + 6) \\ &= 2t^3(3t^2 + 8) \end{aligned}$$

Démonstration

Soit $t \in I$.

φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I , car ses coordonnées le sont, donc φ est dérivable en t et il existe

$\epsilon_1 : I - t \rightarrow \mathbb{R}^p$ tq :

$$\forall h \in I - t \quad \varphi(t+h) = \varphi(t) + h\varphi'(t) + h\epsilon_1(h)$$

avec $\epsilon_1(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0_{\mathbb{R}^p}$.

f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U donc il existe $\epsilon_2 : U - \varphi(t) \rightarrow \mathbb{R}$ tq :

$$\forall k \in U - \varphi(t) \quad f(\varphi(t) + k) = f(\varphi(t)) + df(\varphi(t)) \cdot k + \|k\|_2 \epsilon_2(k)$$

avec $\epsilon_2(k) \xrightarrow[k \rightarrow 0]{} 0$.

On a alors :

$$\begin{aligned} \forall h \in I - t \quad f(\varphi(t+h)) &= f(\varphi(t) + h\varphi'(t) + h\epsilon_1(h)) \\ &= f(\varphi(t)) + df(\varphi(t)).(h\varphi'(t) + h\epsilon_1(h)) + \|h\varphi'(t) + h\epsilon_1(h)\|_2 \epsilon_2(h\varphi'(t) + h\epsilon_1(h)) \end{aligned}$$

D'où :

$$\forall h \in I - t \quad \psi(t+h) = \psi(t) + h.df(\varphi(t)).\varphi'(t) + h.df(\varphi(t)).\epsilon_1(h) + |h|. \|\varphi'(t) + \epsilon_1(h)\|_2 . \epsilon_2(h\varphi'(t) + h\epsilon_1(h))$$

- $df(\varphi(t)).\epsilon_1(h) \xrightarrow[h \rightarrow 0]{} 0$ (une application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$ est continue)
- $\|\varphi'(t) + \epsilon_1(h)\|_2 \xrightarrow[h \rightarrow 0]{} \|\varphi'(t)\|_2$
- $h\varphi'(t) + h\epsilon_1(h) \xrightarrow[h \rightarrow 0]{} 0$ donc $\epsilon_2(h\varphi'(t) + h\epsilon_1(h)) \xrightarrow[h \rightarrow 0]{} 0$ (limites des fonctions composées)
- On en déduit :

$$\|\varphi'(t) + \epsilon_1(h)\|_2 . \epsilon_2(h\varphi'(t) + h\epsilon_1(h)) \xrightarrow[h \rightarrow 0]{} 0$$

D'où : $\psi(t+h) = \psi(t) + h.df(\varphi(t)).\varphi'(t) + o(h)$.

On en déduit que ψ est dérivable en t et que :

$$\psi'(t) = df(\varphi(t)).\varphi'(t) = \sum_{i=1}^p \varphi'_i(t) \frac{\partial f}{\partial x_i}(\varphi(t))$$

On a donc : ψ dérivable sur I et :

$$\forall t \in I \quad \psi'(t) = \sum_{i=1}^p \varphi'_i(t) \frac{\partial f}{\partial x_i}(\varphi(t))$$

Les théorèmes sur les fonctions continues permettent alors de dire que ψ' est continue sur I .

D'où le résultat.

Remarque

Soient I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

Soient U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^p$ et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ tq $f(U) \subset I$.

Alors $g = \varphi \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et on a :

$$\forall a \in U \quad \forall i \in \{1; \dots; p\} \quad \partial_i g(a) = \partial_i f(a). \varphi'(f(a))$$

ou avec d'autres notations :

$$\forall a \in U \quad \forall i \in \{1; \dots; p\} \quad \frac{\partial g}{\partial x_i}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a). \varphi'(f(a))$$

(Même démarche qu'au 4.3)

ou, ce qui revient au même :

$$\forall a \in U \quad dg(a) = \varphi'(f(a)).df(a)$$

De plus, si $\mathbb{R}^p$ est muni de sa structure euclidienne canonique on a :

$$\forall a \in U \quad \nabla g(a) = \varphi'(f(a)).\nabla f(a)$$

ou, ce qui revient au même :

$$\nabla g = \varphi' \circ f. \nabla f$$

3.5.2 Exemple d'application : caractérisation des fonctions constantes

Soit U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^p$.

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

$$\begin{aligned}
 f \text{ est constante} &\iff \forall a \in U \, df(a) = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})} \\
 &\iff \forall a \in U \, \forall i \in \llbracket 1; p \rrbracket \, \partial_i f(a) = 0 \\
 &\iff \forall a \in U \, \forall i \in \llbracket 1; p \rrbracket \, \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0 \\
 &\iff \forall a \in U \, \nabla f(a) = 0_{\mathbb{R}^p} \text{ si } \mathbb{R}^p \text{ est muni de sa structure euclidienne canonique}
 \end{aligned}$$

Démonstration

- $\implies$: trivial
- $\impliedby$: Soient a et $b \in U$.

U est convexe donc :

$$\forall t \in [0; 1] \, \varphi(t) = (1-t)a + tb \in U$$

Donc $\psi = f \circ \varphi$ est définie sur $[0; 1]$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; 1]$ et :

$$\forall t \in [0; 1] \, \psi'(t) = df(\varphi(t))(\varphi'(t)) = 0_{\mathbb{R}}.$$

D'après le cours sur les fonctions d'une seule variable, ψ est constante.

En particulier $\psi(0) = \psi(1)$ ie $f(a) = f(b)$.

f est bien constante.

Généralisations

U étoilé, connexe par arcs.

Contreexemple

Soit $U = U_1 \cup U_2$ avec $U_1 = \mathcal{B}(0_{\mathbb{R}^p}, 1, \|\cdot\|_2)$ et $U_2 = \mathcal{B}((10, \dots, 10), 1, \|\cdot\|_2)$.

$d(0, (10, \dots, 10)) = \sqrt{100 \times p} = 10\sqrt{p} \geq 10 > 1 + 1 = 2$ donc $U_1 \cap U_2 = \emptyset$

$$f \begin{cases} U \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto 0 \text{ si } x \in U_1 \\ x \mapsto 1 \text{ si } x \in U_2 \end{cases} \quad \text{n'est pas constante mais :}$$

$$\forall a \in U \, df(a) = 0$$

On observera qu'un tel phénomène se produit déjà pour les fonctions d'une seule variable.

3.5.3 Exemple

Exercice 1 (Centrale 2019)

$$f(x, y) = \arctan(x) + \arctan(y) - \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$$

1. Montrer que le domaine de définition, noté D de f est la réunion de trois ouverts de $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que f est $\mathcal{C}^1$ sur D .
3. Simplifiez l'expression de f .
4. Voyez-vous une autre façon de simplifier f ?

3.5.4 Dérivées partielles d'une fonction de la forme $(u_1, \dots, u_n) \mapsto f(x_1(u_1, \dots, u_n), \dots, x_p(u_1, \dots, u_n))$

Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$.

Soit V un ouvert non vide de $\mathbb{R}^p$.

Soit $f \begin{cases} V \rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_p) \mapsto f(x_1, \dots, x_p) \end{cases}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

Pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, soit $x_i \begin{cases} U \rightarrow \mathbb{R} \\ (u_1, \dots, u_n) \mapsto x_i(u_1, \dots, u_n) \end{cases}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

Mathématiquement parlant, il n'est pas absolument rigoureux de noter de la même façon, par x_i , une variable et une fonction mais multiplier les notations a aussi ses inconvénients.

On suppose : $\forall (u_1, \dots, u_n) \in U \ (x_1(u_1, \dots, u_n), \dots, x_p(u_1, \dots, u_n)) \in V$.

Alors $h \begin{cases} U \rightarrow \mathbb{R} \\ (u_1, \dots, u_n) \mapsto f(x_1(u_1, \dots, u_n), \dots, x_p(u_1, \dots, u_n)) \end{cases}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et on a :

$$\begin{aligned} \forall a = (a_1, \dots, a_n) \in U \ \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \\ \frac{\partial h}{\partial u_i}(a) &= \frac{\partial h}{\partial u_i}(a_1, \dots, a_n) \\ &= \sum_{j=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1(a_1, \dots, a_n), \dots, x_p(a_1, \dots, a_n)) \frac{\partial x_j}{\partial u_i}(a_1, \dots, a_n) \end{aligned}$$

Ces formules sont connues sous le nom de "règle de la chaîne" et peuvent être abrégées en :

$$\forall a = (a_1, \dots, a_n) \in U \ \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad \frac{\partial h}{\partial u_i} = \sum_{j=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial u_i}$$

Elles peuvent être écrites également avec l'autre notation pour les dérivées partielles :

$$\begin{aligned} \forall a = (a_1, \dots, a_n) \in U \ \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \\ \partial_i h(a) &= \partial_i h(a_u, a_v) \\ &= \sum_{j=1}^p \partial_j f(x_1(a_1, \dots, a_n), \dots, x_p(a_1, \dots, a_n)) \partial_i x_j(a_1, \dots, a_n) \end{aligned}$$

abrégées en :

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad \partial_i h = \sum_{j=1}^p \partial_j f \partial_i x_j$$

Démonstration

Il s'agit d'établir que les dérivées partielles de h sont définies et continues sur V .

Pour ce faire, on fixe toutes les variables sauf une. Cela nous ramène au problème étudié en 3.5.1.

On peut donc dire que les dérivées partielles de h sont définies sur V et qu'elles sont données par les formules précédentes.

Les théorèmes sur les fonctions continues permettent alors d'affirmer que toutes les dérivées partielles de h sont continues sur V .

D'où $h \in \mathcal{C}^1$ sur V .

3.6 Cas particulier des coordonnées polaires

Je cite le programme :

Les étudiants doivent connaître le cas particulier des coordonnées polaires.

Soit $f \begin{cases} \mathbb{R}^2 \text{ (pour simplifier)} \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto f(x, y) \end{cases}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

Soit $\varphi \begin{cases} \mathbb{R}^2 \text{ (pour simplifier)} \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (r, \theta) \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta) \end{cases}$.

Soit $g = f \circ \varphi \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (r, \theta) \mapsto f(r \cos \theta, r \sin \theta) \end{cases}$.

Par contre dans l'autre sens : $f(x, y)$ en fonction de $g(r, \theta)$, c'est plus compliqué.

On a $g = f \circ \varphi$ d'où $f = g \circ \varphi^{-1}$ mais φ n'est pas une bijection.

g est $\mathcal{C}^1$ par composition et :

$$\begin{aligned} \forall (r, \theta) \in \mathbb{R}^2 \quad \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) &= \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) + \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta) \\ \frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta) &= -r \sin \theta \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) + r \cos \theta \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta) \end{aligned}$$

En physique, on écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial \theta} &= -y \frac{\partial f}{\partial x} + x \frac{\partial f}{\partial y} \\ r \frac{\partial g}{\partial r} &= x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} \end{aligned}$$

Exemple d'application

Soit à résoudre sur $U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, l'équation aux dérivées partielles

$$(1) \quad x \frac{\partial f}{\partial y} - y \frac{\partial f}{\partial x} = f$$

On cherche en fait les fonctions f de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall (x, y) \in U \quad x \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - y \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = f(x, y)$$

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Soit $\Phi \begin{cases} V = \mathbb{R}_+^* \times]-\pi/2; \pi/2[\rightarrow U \\ (r, \theta) \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta) \end{cases}$.

Φ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de V sur U et $\Phi^{-1} \begin{cases} U \rightarrow V \\ (x, y) \mapsto \left(\sqrt{x^2 + y^2}, \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \right) \end{cases}$ est de

classe $\mathcal{C}^1$.

On pose $g = f \circ \Phi$.

Il est important que Φ soit une bijection, de classe $\mathcal{C}^1$ ainsi que sa bijection réciproque, pour pouvoir passer de f à g et réciproquement :

$$g = f \circ \Phi \iff f = g \circ \Phi^{-1}$$

$$f \text{ solution de (1)} \iff \forall (x, y) \in U \quad x \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - y \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = f(x, y)$$

$$\iff \forall (r, \theta) \in V \quad r \cos \theta \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta) - r \sin \theta \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$$

car $\Phi(V) = U$:

- $\implies$ utilise $\Phi(V) \subset U$
- $\impliedby$ utilise $U \subset \Phi(V)$

$$\begin{aligned}
 f \text{ solution de (1)} &\iff \forall (r, \theta) \in V \quad \frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta) = g(r, \theta) \\
 &\iff \forall r > 0 \quad \frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \cdot) \text{ est solution sur }]-\pi/2; \pi/2[\text{ de l'EDO } z' = z \\
 &\iff \exists \varphi_1 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}) \text{ tq } \forall (r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times]-\pi/2; \pi/2[\quad g(r, \theta) = \varphi_1(r) e^\theta \\
 &\iff \exists \varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}) \text{ tq } \forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \quad f(x, y) = \varphi(x^2 + y^2) e^{\arctan(y/x)} \\
 (\varphi(t) &= \varphi_1(\sqrt{t}))
 \end{aligned}$$

Soit maintenant à résoudre sur $W = \mathbb{R}^2$, l'équation aux dérivées partielles

$$(1) \quad x \frac{\partial f}{\partial y} - y \frac{\partial f}{\partial x} = f$$

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

Soit $\psi \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (r, \theta) \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta) \end{cases}$.

$g = f \circ \psi$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
 f \text{ solution de (1)} &\iff \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad x \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - y \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = f(x, y) \\
 &\iff \forall (r, \theta) \in \mathbb{R}^2 \quad r \cos \theta \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta) - r \sin \theta \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta) \\
 &\quad (\text{car } \psi(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2) \\
 &\iff \forall (r, \theta) \in \mathbb{R}^2 \quad \frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta) = g(r, \theta)
 \end{aligned}$$

Mais $\theta \mapsto g(r, \theta)$ est 2π -périodique.

La seule solution de $z' = z$ qui est périodique est $z = 0$ donc :

$$\begin{aligned}
 f \text{ solution de (1)} &\iff \forall (r, \theta) \in \mathbb{R}^2 \quad g(r, \theta) = 0 \\
 &\iff f \circ \psi = 0 \text{ sur } \mathbb{R}^2 \\
 &\iff f = 0 \text{ sur } \psi(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2
 \end{aligned}$$

4 Dérivées partielles d'ordre deux

4.1 Définitions

Soient U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^p$ et $f : (x_1, \dots, x_p) \mapsto f(x_1, \dots, x_p)$ une fonction de U dans $\mathbb{R}$.

On suppose que toutes les dérivées partielles du premier ordre de f sont définies² sur U .

Les dérivées partielles du second ordre de f sont simplement les dérivées partielles (du premier ordre) des dérivées partielles du premier ordre de f .

Soit $(i, j) \in \llbracket 1; p \rrbracket^2$.

La $j^{\text{ième}}$ dérivée partielle, si elle existe, de $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ est notée

2. en pratique, f sera supposée de classe $\mathcal{C}^1$

$$\begin{aligned}
 & * \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \text{ si } j \neq i \\
 & * \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \text{ si } j = i
 \end{aligned}$$

4.2 Fonctions de classe $\mathcal{C}^2$

Soient U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^p$ et f une fonction de U dans $\mathbb{R}$.

On dit que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U si, et seulement si, toutes les dérivées partielles d'ordre deux de f sont définies et continues sur U .

Il revient au même de dire que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U si, et seulement si, toutes les dérivées partielles du premier ordre de f sont définies et de classe $\mathcal{C}^1$ sur U .

4.3 Théorème de Schwarz

Soient U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^p$ et $f \begin{cases} U \rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_p) \mapsto f(x_1, \dots, x_p) \end{cases}$ de classe $\mathcal{C}^2$.

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1; p \rrbracket^2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

ie : pour une fonction de classe $\mathcal{C}^2$, l'ordre des dérivations partielles n'a pas d'importance.

La démonstration de ce théorème est hors-programme.

4.4 Un exemple d'équation aux dérivées partielles

On se donne a , b et c 3 réels non tous nuls.

On considère l'équation aux dérivées partielles

$$(E) \quad a \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

où $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ est l'inconnue.

On effectue le changement de variables $\begin{cases} u = x + \alpha y \\ v = x + \beta y \end{cases} \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \quad \alpha \neq \beta.$

Montrer que le choix judicieux de α et de β ramène la résolution de (E) à la résolution d'une des trois équations aux dérivées partielles suivantes :

$$(1) \quad \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = 0 \quad (2) \quad \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} = 0 \quad (3) \quad \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} = 0$$

Résoudre (1) et (2).

Soit $\varphi \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (x + \alpha y, x + \beta y) \end{cases}$.

φ est linéaire donc de classe $\mathcal{C}^2$.

$$\det \varphi = \det \text{Mat}_{Can} \varphi = \begin{vmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & \beta \end{vmatrix} = \beta - \alpha \neq 0$$

Donc φ est bijective.

φ^{-1} étant linéaire, φ^{-1} est de classe $\mathcal{C}^2$.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ quelconque.

On pose $g = f \circ \varphi^{-1}$ de sorte que $f = g \circ \varphi$, ou plus rigoureusement :

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x, y) = g(x + \alpha y, x + \beta y)$.

D'après la règle de la chaîne :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v}$$

ce qui devrait s'écrire en toute rigueur :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial g}{\partial u}(x + \alpha y, x + \beta y) + \frac{\partial g}{\partial v}(x + \alpha y, x + \beta y)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = \alpha \frac{\partial g}{\partial u} + \beta \frac{\partial g}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v} \right) \frac{\partial v}{\partial x} \\ &= \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha \frac{\partial g}{\partial u} + \beta \frac{\partial g}{\partial v} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial u} \left(\alpha \frac{\partial g}{\partial u} + \beta \frac{\partial g}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\alpha \frac{\partial g}{\partial u} + \beta \frac{\partial g}{\partial v} \right) \\ &= \alpha \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + \beta \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \alpha \frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u} + \beta \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} \\ &= \alpha \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + (\alpha + \beta) \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \beta \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\alpha \frac{\partial g}{\partial u} + \beta \frac{\partial g}{\partial v} \right) \\ &= \alpha \frac{\partial}{\partial u} \left(\alpha \frac{\partial g}{\partial u} + \beta \frac{\partial g}{\partial v} \right) + \beta \frac{\partial}{\partial v} \left(\alpha \frac{\partial g}{\partial u} + \beta \frac{\partial g}{\partial v} \right) \\ &= \alpha \left(\alpha \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + \beta \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} \right) + \beta \left(\alpha \frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u} + \beta \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} \right) \\ &= \alpha^2 \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + 2\alpha\beta \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \beta^2 \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} \end{aligned}$$

On en déduit :

$$a \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (a + b\alpha + c\alpha^2) \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + (2a + b(\alpha + \beta) + 2c\alpha\beta) \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + (a + b\beta + c\beta^2) \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}$$

Donc :

$$f \text{ solution de } (E) \iff P(\alpha) \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + (2a + b(\alpha + \beta) + 2c\alpha\beta) \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + P(\beta) \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} = 0$$

avec $P(X) = a + bX + cX^2$

On suppose $c \neq 0$.

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

Premier cas : $b^2 - 4ac > 0$

P possède deux racines réelles distinctes : r_1 et r_2 .

On prend $\alpha = r_1$ et $\beta = r_2$ (ou $\alpha = r_2$ et $\beta = r_1$).

$$2a + b(\alpha + \beta) + 2c\alpha\beta = 2a + b\left(-\frac{b}{c}\right) + 2c\frac{a}{c} = \frac{4ac - b^2}{c} \neq 0$$

Donc :

$$\begin{aligned} f \text{ solution de } (E) &\iff g \text{ solution de (1) sur } \mathbb{R}^2 \\ &\iff \exists (g_1, g_2) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \text{ tq } \forall (u, v) \in \mathbb{R}^2 \quad g(u, v) = g_1(u) + g_2(v) \\ &\iff \exists (g_1, g_2) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \text{ tq } \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x, y) = g_1(x + r_1 y) + g_2(x + r_2 y) \end{aligned}$$

Deuxième cas : $b^2 - 4ac = 0$

P a une racine réelle double : r_0 .

On prend $\beta = r_0$ et $\alpha \neq \beta$.

$$\begin{aligned} 2a + b(\alpha + \beta) + 2c\alpha\beta &= 2a + b\beta + \alpha(2c\beta + b) \\ &= 2a + b\beta + \alpha.P'(\beta) = 2a + b\beta \\ &= 2a + b.\left(-\frac{b}{2c}\right) = \frac{4ac - b^2}{2c} = 0 \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} f \text{ solution de } (E) &\iff g \text{ solution de (2) sur } \mathbb{R}^2 \\ &\iff \exists (g_1, g_2) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \text{ tq } \forall (u, v) \in \mathbb{R}^2 \quad g(u, v) = u.g_1(v) + g_2(v) \\ &\iff \exists (g_1, g_2) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \text{ tq } \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x, y) = (x + \alpha y)g_1(x + \beta y) + g_2(x + \beta y) \end{aligned}$$

Troisième cas : $b^2 - 4ac < 0$

On cherche $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tq $\alpha \neq \beta$, $P(\alpha) = P(\beta)$ et $2a + b(\alpha + \beta) + 2c\alpha\beta = 0$ ie :

$$\begin{cases} c(\beta^2 - \alpha^2) + b(\beta - \alpha) = 0 \\ 2a + b(\alpha + \beta) + 2c\alpha\beta = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha + \beta = -\frac{b}{c} \quad (\alpha \neq \beta) \\ \alpha\beta = -\frac{1}{2c} \left(2a - \frac{b^2}{c}\right) = \frac{b^2 - 2ac}{2c^2} \end{cases}$$

Donc, α et β sont racines (si ils existent) de :

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{b}{c}x + \frac{b^2 - 2ac}{2c^2} &= 0 \\ \Delta &= \frac{b^2}{c^2} - 2 \cdot \frac{b^2 - 2ac}{c^2} = \frac{4ac - b^2}{c^2} > 0 \end{aligned}$$

On prend alors α et β racines distinctes de cette équation.

On a alors :

$$f \text{ solution de } (E) \iff \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} = 0 \text{ ie } \Delta g = 0 \text{ sur } \mathbb{R}^2$$

(On peut diviser par $P(\alpha)$ car P ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$)

On suppose $c = 0$ et $a \neq 0$.

Soit $\tilde{f} \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (X, Y) \mapsto f(Y, X) \end{cases}$

$$f \text{ solution de } (E) \iff c \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial X^2} + b \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial X \partial Y} + a \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial Y^2} = 0$$

On est ramené à la situation précédente.

Il reste le cas $a = c = 0$.

Alors $b \neq 0$ et $(E) \iff \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$.

4.5 Un exemple d'équation aux dérivées partielles

Soit $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } x > \frac{y^2}{2} \right\}$.

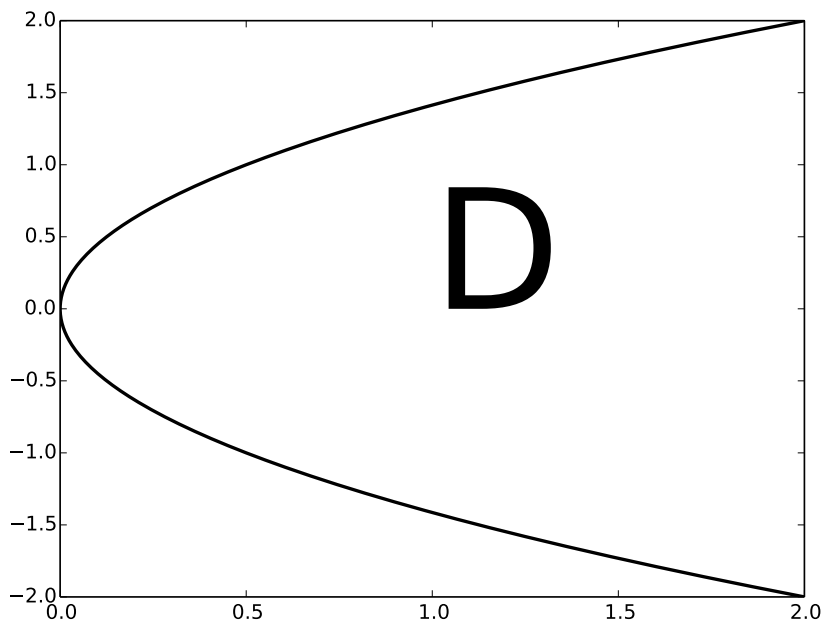
Déterminer toutes les fonctions $f \in \mathcal{C}^2(D, \mathbb{R})$ telles que

$$2(y^2 - x) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2y \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - (y^2 - x) = 0$$

On pourra utiliser le changement de variables : $\begin{cases} x = u^2 + v^2 \\ y = u + v \end{cases}$

Correction

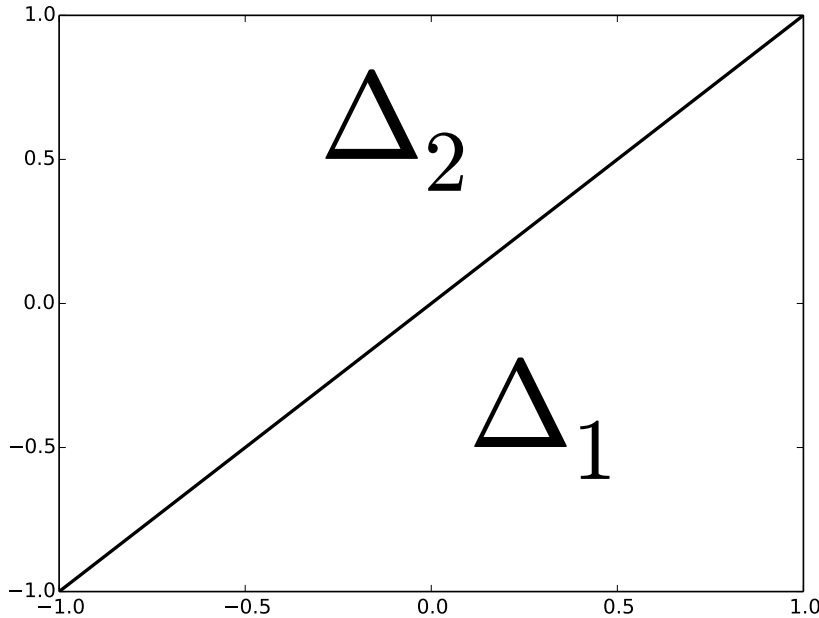
D est bien un ouvert : $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } k(x, y) > 0\}$ avec $k \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto x - y^2/2 \end{cases}$ qui est continue.



Si $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, a-t-on $(u^2 + v^2, u + v) \in D$?

$$\begin{aligned} u^2 + v^2 - \frac{(u+v)^2}{2} &= \frac{1}{2} (2u^2 + 2v^2 - u^2 - 2uv - v^2) = \frac{1}{2} (u^2 + v^2 - 2uv) \\ &= \frac{1}{2} (u - v)^2 \end{aligned}$$

On introduit donc $\Delta = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } u \neq v\}$ ouvert de $\mathbb{R}^2$.



On peut définir $\varphi \begin{cases} \Delta \rightarrow D \\ (u, v) \mapsto (x, y) = (u^2 + v^2, u + v) \end{cases}$. S'agit-il d'une bijection ?

Soit $(x, y) \in D$.

$$\begin{aligned} \begin{cases} u^2 + v^2 = x \\ u + v = y \end{cases} &\iff \begin{cases} (u + v)^2 - 2uv = x \\ u + v = y \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} u + v = y \\ uv = \frac{y^2 - x}{2} \end{cases} \\ &\iff u \text{ et } v \text{ racines de } X^2 - yX + \frac{y^2 - x}{2} \end{aligned}$$

Le discriminant de ce polynôme vaut :

$$y^2 - 4 \left(\frac{y^2 - x}{2} \right) = y^2 - 2(y^2 - x) = 2x - y^2 = 2 \left(x - \frac{y^2}{2} \right) > 0$$

Il a donc deux racines distinctes.

On en déduit que $\psi \begin{cases} \Delta_1 \rightarrow D \\ (u, v) \mapsto (x, y) = (u^2 + v^2, u + v) \end{cases}$ est une bijection et que

$$\psi^{-1} \begin{cases} D \rightarrow \Delta_1 \\ (x, y) \mapsto \left(\frac{y + \sqrt{2x - y^2}}{2}, \frac{y - \sqrt{2x - y^2}}{2} \right) \end{cases}.$$

ψ et ψ^{-1} sont $\mathcal{C}^\infty$.

Soit $f \begin{cases} D \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto f(x, y) \end{cases}$ de classe $\mathcal{C}^2$.

Soit $g = f \circ \psi \begin{cases} \Delta_1 \rightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) \mapsto f(u^2 + v^2, u + v) \end{cases}$.

g est $\mathcal{C}^2$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial u} &= 2u \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial v} &= 2v \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} &= 2 \frac{\partial f}{\partial x} + 2u \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \\ &= 2 \frac{\partial f}{\partial x} + 2u \left(2u \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right) + 2u \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \\ &= 2 \frac{\partial f}{\partial x} + 4u^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 4u \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} &= 2v \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \\ &= 2v \left(2u \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right) + 2u \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \\ &= 4uv \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2(u + v) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{aligned}$$

On reconnaît les coefficients $4uv = 2(y^2 - x)$ et $2(u + v) = 2y$.

$$\begin{aligned} f \text{ solution} &\iff \forall (u, v) \in \Delta_1 \quad \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u, v) = 2uv \\ &\iff \exists C_1 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \text{ tq } \forall (u, v) \in \Delta_1 \quad \frac{\partial g}{\partial v}(u, v) = u^2 v + C_1(v) \end{aligned}$$

C_1 est définie sur $\mathbb{R}$ car v prend toutes les valeurs réelles, on fait attention à la classe et on remarque qu'à v fixé, u décrit un intervalle.

$$f \text{ solution} \iff \exists (C_2, C_3) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})^2 \text{ tq } \forall (u, v) \in \Delta_1 \quad g(u, v) = \frac{u^2 v^2}{2} + C_2(v) + C_3(u)$$

Finalement, les solutions de l'EDP sont les fonctions :

$$\begin{cases} D \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto \frac{(y^2 - x)^2}{8} + A(y + \sqrt{2x - y^2}) + B(y - \sqrt{2x - y^2}) \end{cases}$$

avec A et $B \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ quelconques.

4.6 Laplacien en coordonnées cylindriques

Exercice 2 (X 2019)

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z), z \in \mathbb{R}\} \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) \mapsto f(x, y, z) \end{cases}$ de classe $\mathcal{C}^2$.

Soit $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (r, \theta, z) \mapsto (r \cos(\theta), r \sin(\theta), z) \end{cases}$.

Soit $F = f \circ \varphi$.

Exprimez le laplacien de f à l'aide des dérivées partielles de F .

4.7 Matrice hessienne

Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^p$, $a \in U$ et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ de classe $\mathcal{C}^2$.

On appelle matrice hessienne de f au point a la matrice :

$$H_f(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right)_{1 \leq i, j \leq p}$$

D'après le théorème de Schwarz, c'est une matrice symétrique.

4.8 Formule de Taylor à l'ordre 2

Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^p$, $a \in U$ et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ de classe $\mathcal{C}^2$.

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + \nabla f(a)^T h + \frac{1}{2} h^T H_f(a) h + o(\|h\|^2) \\ &= f(a) + (\nabla f(a) \mid h) + \frac{1}{2} (H_f(a) h \mid h) + o(\|h\|^2) \end{aligned}$$

où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne canonique (mais on pourrait la remplacer par n'importe quelle norme au vu de leur équivalence).

La démonstration est hors-programme.

5 Extrema d'une fonction de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$

5.1 Définition des extrema locaux

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$.

Soient $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in U$.

On dit que f présente un minimum local en a si, et seulement si, il existe $\|\cdot\|$ norme sur $\mathbb{R}^p$ et $r > 0$ tq :

i $\mathcal{B}(a, r) \subset U$

ii $\forall x \in \mathcal{B}(a, r) \quad f(x) \geq f(a)$

On peut montrer avec l'équivalence des normes dans $\mathbb{R}^p$:

f présente un minimum local en $a \iff$ pour toute norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}^p$, il existe $r > 0$ tq :

i $\mathcal{B}(a, r) \subset U$

ii $\forall x \in \mathcal{B}(a, r) \quad f(x) \geq f(a)$

On dit que f présente un minimum local strict en a si, et seulement si, il existe $\|\cdot\|$ norme sur $\mathbb{R}^p$ et $r > 0$ tq :

i $\mathcal{B}(a, r) \subset U$

$$\text{ii } \forall x \in \mathcal{B}(a, r) \setminus \{a\} \quad f(x) > f(a)$$

On peut montrer :

f présente un minimum local strict en $a \iff$ pour toute norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}^p$, il existe $r > 0$ tq :

$$\text{i } \mathcal{B}(a, r) \subset U$$

$$\text{ii } \forall x \in \mathcal{B}(a, r) \setminus \{a\} \quad f(x) > f(a)$$

On définit de même les notions de maximum local (éventuellement strict) et d'extremum local (éventuellement strict).

L'emploi de la norme euclidienne canonique est plus intuitif, mais la norme $\|\cdot\|_\infty$ peut s'avérer commode d'utilisation.

5.2 Définition des extrema globaux

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}^p$ sans qualité particulière ie ce n'est a priori ni un ouvert, ni un fermé...

Soient $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in A$.

On dit que f présente un minimum global en a si, et seulement si, pour tout x dans A $f(x) \geq f(a)$

On dit que f présente un minimum global strict en a si, et seulement si, pour tout x dans A et différent de a $f(x) > f(a)$

On définit de même les notions de maximum global (éventuellement strict) et d'extremum global (éventuellement strict).

On notera qu'un extremum global n'est pas forcément un extremum local.

5.3 Conditions nécessaires du premier ordre pour les extrema locaux

Théorème

Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^p$.

Soient $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $a \in U$.

Si f présente un extremum local en a alors on a :

$$\forall i \in \{1; \dots; p\} \quad \partial_i f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$$

ou ce qui revient au même : $df(a) = 0$

De plus, si $\mathbb{R}^p$ est muni de sa structure euclidienne canonique on a :

$$\nabla f(a) = 0$$

Démonstration

On note $a = (a_1, \dots, a_p)$ et on suppose qu'il s'agit d'un maximum local.

$\exists r > 0$ tq

$$\text{i }]a_1 - r; a_1 + r[\times \dots \times]a_p - r; a_p + r[\subset U$$

$$\text{ii } \forall x \in]a_1 - r; a_1 + r[\times \dots \times]a_p - r; a_p + r[\quad f(x) \leq f(a)$$

Soient alors $i \in \{1; \dots; p\}$ et $\varphi_i \begin{cases}]a_i - r; a_i + r[\rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto f(a_1, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_p) \end{cases}$

φ_i est de classe $\mathcal{C}^1$ et :

$$\forall t \in]a_i - r; a_i + r[\quad \varphi_i(t) \leq f(a) = \varphi_i(a_i)$$

Il résulte de l'étude des fonctions d'une variable :

$$\varphi'_i(a_i) = 0 \text{ ie } \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$$

Remarque

La condition $df(a) = 0$ est nécessaire mais n'est pas suffisante.

Par exemple, soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto xy \end{cases}$

f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ car polynomiale et on a :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x$$

$$\text{Donc } \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$$

Pourtant f n'a pas d'extremum local en $(0, 0)$.

En effet $f(0, 0) = 0$ et pour tout $r > 0$, il y a dans $] -r; r[\times] -r; r[$ des couples (x, y) tels que $xy > 0$ et des couples (x, y) tels que $xy < 0$.

5.4 Points critiques

Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^p$.

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

On appelle point critique de f tout élément a de U tel que $df(a) = 0$.

5.5 Condition suffisante du second ordre

Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^p$, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$.

Soit a un point critique de f .

Si $H_f(a) \in \mathcal{S}_p^{++}(\mathbb{R})$ alors f présente un minimum local strict en a .

Si $-H_f(a) \in \mathcal{S}_p^{++}(\mathbb{R})$ alors f présente un maximum local strict en a .

Démonstration

On suppose $H_f(a) \in \mathcal{S}_p^{++}(\mathbb{R})$.

Soient $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_p$ les valeurs propres comptées avec leurs multiplicités de $H_f(a)$, ce sont des nombres strictement positifs.

Il existe $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_p)$ une BON de $\mathbb{R}^p$ telle que :

$$\forall i \in \llbracket 1; p \rrbracket \quad H_f(a)\epsilon_i = \lambda_i \epsilon_i$$

La formule de Taylor-Young donne :

$$f(a+h) = f(a) + (\nabla f(a) | h) + \frac{1}{2} (Hf(a)h | h) + o(\|h\|^2)$$

mais a est un point critique de f donc $\nabla f(a) = 0$ et :

$$f(a+h) = f(a) + \frac{1}{2} (Hf(a)h | h) + o(\|h\|^2)$$

$$\text{Soit } \delta = \frac{\lambda_1}{4} > 0$$

$\exists \eta > 0$ tq $\mathcal{B}(a, \eta) \subset U$ et :

$$\forall h \in \mathcal{B}(0, \eta) \quad \left| f(a+h) - f(a) - \frac{1}{2} (Hf(a)h | h) \right| \leq \delta \|h\|^2$$

Soit $h \in \mathcal{B}(0, \eta)$

$$\exists(h_1, \dots, h_p) \text{ tq } h = \sum_{i=1}^p h_i \epsilon_i$$

$$\begin{aligned} f(a+h) &\geq f(a) + \frac{1}{2} (Hf(a)h \mid h) - \delta \|h\|^2 \\ &\geq f(a) + \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n h_i Hf(a) \epsilon_i \mid \sum_{i=1}^n h_i \epsilon_i \right) - \delta \|h\|^2 \\ &\geq f(a) + \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n h_i \lambda_i \epsilon_i \mid \sum_{i=1}^n h_i \epsilon_i \right) - \delta \|h\|^2 \\ &\geq f(a) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \lambda_i h_i^2 - \delta \|h\|^2 \text{ expression du produit scalaire en BON} \\ &\geq f(a) + \frac{\lambda_1}{2} \sum_{i=1}^n h_i^2 - \frac{\lambda_1}{4} \|h\|^2 \\ &\geq f(a) + \frac{\lambda_1}{4} \|h\|^2 \\ &\geq f(a) \text{ avec égalité si, et seulement si } h = 0 \end{aligned}$$

Donc f présente bien un minimum local strict en a .

On suppose $-H_f(a) \in \mathcal{S}_p^{++}(\mathbb{R})$.

$H_{-f}(a) = -H_f(a) \in \mathcal{S}_p^{++}(\mathbb{R})$ donc $-f$ présente un minimum local strict en a .

On en déduit que f présente un maximum local strict en a .

5.6 Condition nécessaire du second ordre

Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^p$, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$.

Soit a un point critique de f .

Si f présente un minimum local en a alors $H_f(a) \in \mathcal{S}_p^+(\mathbb{R})$.

Si f présente un maximum local en a alors $-H_f(a) \in \mathcal{S}_p^+(\mathbb{R})$.

Démonstration

On suppose que f présente un minimum local en a .

$\exists \delta > 0$ tq $\forall h \in \mathcal{B}(0, \delta)$ $f(a+h) \geq f(a)$

a est alors un point critique de f donc $\nabla f(a) = 0$ et :

$$f(a+h) = f(a) + \frac{1}{2} (Hf(a)h \mid h) + o(\|h\|^2)$$

On fixe $h \in \mathbb{R}^p \setminus \{0\}$.

$$f(a+th) = f(a) + \frac{t^2}{2} (Hf(a)h \mid h) + o(t^2)$$

$$\text{Donc } \frac{f(a+th) - f(a)}{t^2} = \frac{1}{2} (Hf(a)h \mid h) + o(1) \xrightarrow{t \rightarrow 0} \frac{1}{2} (Hf(a)h \mid h)$$

Mais f présente un minimum local en a donc :

$$\forall t \in \left] -\frac{\delta}{\|h\|}, \frac{\delta}{\|h\|} \right[\quad f(a+th) \geq f(a)$$

$$\text{Donc } (Hf(a)h \mid h) = 2 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+th) - f(a)}{t^2} \geq 0$$

Donc $H_f(a) \in \mathcal{S}_p^+(\mathbb{R})$.

On suppose que f présente un maximum local en a .

$-f$ présente un minimum local en a donc $-H_f(a) = H_{-f}(a) \in \mathcal{S}_p^+(\mathbb{R})$.

5.7 Cas particulier des fonctions de deux variables

Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$.

Soit a un point critique de f .

Soit $t = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)$ la trace de la matrice hessienne de f en a .

Soit $d = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a)\right)^2$ son déterminant.

- Si $d > 0$ et $t > 0$ alors f présente un minimum local strict en a .
- Si $d > 0$ et $t < 0$ alors f présente un maximum local strict en a .
- Si f présente un minimum local en a alors $d \geq 0$ et $t \geq 0$.
- Si f présente un maximum local en a alors $d \geq 0$ et $t \leq 0$.

Démonstration

Dans toute la démonstration, on note $\lambda_1 \leq \lambda_2$ les deux valeurs propres de la matrice symétrique réelle $H_f(a)$.

On a $d = \lambda_1 \lambda_2$ et $t = \lambda_1 + \lambda_2$.

- On suppose $d > 0$ et $t > 0$.
 $d > 0$ donc λ_1 et λ_2 sont non nulles et de même signe.
 $t > 0$ donc λ_1 et λ_2 sont strictement positives et $H_f(a) \in \mathcal{S}_p^{++}(\mathbb{R})$.
D'après ce qui précède, f présente un minimum local strict en a .
- On suppose $d > 0$ et $t < 0$.
 $d > 0$ donc λ_1 et λ_2 sont non nulles et de même signe.
 $t < 0$ donc λ_1 et λ_2 sont strictement négatives et $-H_f(a) \in \mathcal{S}_p^{++}(\mathbb{R})$. D'après ce qui précède, f présente un maximum local strict en a .
- On suppose que f présente un minimum local en a .
D'après ce qui précède, $H_f(a) \in \mathcal{S}_p^+(\mathbb{R})$.
On en déduit que λ_1 et $\lambda_2 \in \mathbb{R}^+$.
D'où $d \geq 0$ et $t \geq 0$.
- On suppose que f présente un maximum local en a .
D'après ce qui précède, $-H_f(a) \in \mathcal{S}_p^+(\mathbb{R})$.
On en déduit que $-\lambda_1$ et $-\lambda_2 \in \mathbb{R}^+$.
Donc λ_1 et $\lambda_2 \in \mathbb{R}^-$.
D'où $d \geq 0$ et $t \leq 0$.

5.8 Exemples

- Extrema locaux de $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto x^2 + y^2 + x^3 \end{cases}$

f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ car polynomiale.

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \partial_1 f(x, y) = 2x + 3x^2 \quad \partial_2 f(x, y) = 2y$$

$$(x, y) \text{ point critique} \iff \begin{cases} x(2 + 3x) = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \iff (x, y) = (0, 0) \text{ ou } (-2/3, 0)$$

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2 + 6x$$

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 2$$

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 0$$

Etude de $(0, 0)$

$$f(0, 0) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) = 2 \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 0$$

Donc $d = 4 > 0$ et $s = 4 > 0$.

Donc f présente un minimum local strict en $(0, 0)$.

$f(x, 0) = x^2 + x^3 \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\infty$ donc ce n'est pas un minimum global.

Etude de $(-2/3, 0)$

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-2/3, 0) = -2$$

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 2$$

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 0$$

$d < 0$ donc f ne présente pas d'extremum local en $(-2/3, 0)$.

• **Centrale 2003, planche complète**

Justifier l'existence et les valeurs des extrema des fonctions suivantes :

— $f(x, y) = \sqrt{1 - 4x^2 - y^2}$

— $g(x, y) = xy^2 \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

— $h(x, y) = \int_0^1 (\ln t - xt - y)^2 dt$

Correction

— f est définie sur $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } 4x^2 + y^2 \leq 1\}$: faire un dessin.

Ici il n'y a quasiment rien à faire :

$$\forall (x, y) \in D \quad 0 \leq f(x, y) \leq 1$$

avec $0 = f(0, 1)$ et $1 = f(0, 0)$

Donc f est bornée et atteint ses bornes :

$$\max_D f = 1 \text{ et } \min_D f = 0$$

— g est définie sur $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } x^2 + y^2 \leq 1\}$ le disque unité fermé.

g est continue sur D partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^2$ donc g est bornée et atteint ses bornes.

g est $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $D' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } x^2 + y^2 < 1\}$.

Si g atteint son maximum (resp. son minimum) en (x_0, y_0) alors :

— ou bien $(x_0, y_0) \in D'$ et c'est un point critique de g

— ou bien $(x_0, y_0) \in \mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } x^2 + y^2 = 1\}$

$$\begin{aligned}
\forall (x, y) \in D' \quad \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) &= y^2 \left(\sqrt{1 - x^2 - y^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} \right) \\
&= \frac{(1 - 2x^2 - y^2)y^2}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} \\
\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) &= y^2 \left(2y\sqrt{1 - x^2 - y^2} - \frac{y^3}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} \right) \\
&= \frac{xy(2 - 2x^2 - 3y^2)}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(x, y) \text{ point critique} &\iff \begin{cases} (1 - 2x^2 - y^2)y^2 = 0 \\ xy(2 - 2x^2 - 3y^2) = 0 \end{cases} \\
&\iff y = 0 \text{ ou } \begin{cases} 1 - 2x^2 - y^2 = 0 \\ x(2 - 2x^2 - 3y^2) = 0 \end{cases} \\
&\quad x = 0 \text{ donne } y = \pm 1 \text{ ie un point de } \mathcal{C} \text{ donc à écarter} \\
&\iff y = 0 \text{ ou } \begin{cases} 2x^2 + y^2 = 1 \\ 2x^2 + 3y^2 = 1 \end{cases} \\
&\iff y = 0 \text{ ou } \begin{cases} 2x^2 + y^2 = 1 \\ 2y^2 = 1 \end{cases} \\
&\iff y = 0 \text{ ou } (x, y) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \text{ ou } (x, y) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\
&\quad \text{ou } (x, y) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \text{ ou } (x, y) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\forall x \in]-1; 1[\quad g(x, 0) &= 0 \\
g\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) &= \frac{1}{8}, \quad g\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{1}{8} \\
g\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) &= \frac{1}{8}, \quad g\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{1}{8}
\end{aligned}$$

Par ailleurs, sur le bord g est nulle.

Dans le cas général, on fait un paramétrage du bord et l'étude sur le bord se ramène à l'étude des variations d'une fonction d'une seule variable.

$$\text{Donc : } \max_D g = \frac{1}{8} \text{ atteint en } \left(\frac{1}{2}, \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$\min_D g = -\frac{1}{8} \text{ atteint en } \left(-\frac{1}{2}, \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

— Soit E l'ensemble des fonctions continues de carré intégrable sur $]0; 1]$.

$$\text{Classiquement, } \begin{cases} E \times E \rightarrow \mathbb{R} \\ (\varphi_1, \varphi_2) \mapsto \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle = \int_0^1 \varphi_1(t)\varphi_2(t) dt \end{cases} \text{ est un produit scalaire.}$$

$$\text{Soit } \varphi \begin{cases}]0; 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \ln(t) \end{cases}.$$

$$\varphi \in E : \sqrt{t}\varphi(t)^2 \xrightarrow[t>0]{t \rightarrow 0} 0 \text{ ie } \varphi(t)^2 = o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) \text{ avec } t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}} \text{ intégrable sur }]0; 1].$$

Soient $\varphi_0 \begin{cases}]0; 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto 1 \end{cases}$ et $\varphi_1 \begin{cases}]0; 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto t \end{cases}$.

(φ_0, φ_1) est une base du plan $Vect(\varphi_0, \varphi_1)$.

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ $h(x, y) = \|\varphi - (x\varphi_1 + y\varphi_0)\|^2$.

D'après le cours, le minimum de h est atteint une fois et une seule lorsque $x\varphi_1 + y\varphi_0$ est le projeté orthogonal de φ sur $Vect(\varphi_0, \varphi_1)$.

Au minimum, x et y sont donnés par :

$$\begin{cases} \langle \varphi - x\varphi_1 - y\varphi_0, \varphi_0 \rangle = 0 \\ \langle \varphi - x\varphi_1 - y\varphi_0, \varphi_1 \rangle = 0 \end{cases}$$

On a besoin de :

$$\langle \varphi_0, \varphi_0 \rangle = \int_0^1 dt = 1$$

$$\langle \varphi_0, \varphi_1 \rangle = \int_0^1 t dt = \frac{1}{2}$$

$$\langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle = \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}$$

$$\langle \varphi, \varphi_0 \rangle = \int_0^1 \ln(t) dt = [t \ln(t) - t]_0^1 = -1$$

$$\langle \varphi, \varphi_1 \rangle = \int_0^1 t \ln(t) dt = \left[\frac{t^2}{2} \ln(t) \right]_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 t dt = -\frac{1}{4}$$

D'où le système : $\begin{cases} \frac{x}{2} + y = -1 \\ \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = -\frac{1}{4} \end{cases}$ qui se résout en $\begin{cases} x = 3 \\ y = -\frac{5}{2} \end{cases}$

Par Pythagore :

$$\min_{\mathbb{R}^2} h = \|\varphi\|^2 - \left\| 3\varphi_1 + \frac{5}{2}\varphi_0 \right\|^2$$

$$\|\varphi\|^2 = \int_0^1 (\ln(t))^2 dt = \left[t(\ln(t))^2 \right]_0^1 - 2 \int_0^1 \ln(t) dt = 2$$

$$\left\| 3\varphi_1 + \frac{5}{2}\varphi_0 \right\|^2 = 9\|\varphi_1\|^2 - 5\langle \varphi_0, \varphi_1 \rangle + \frac{9}{4}\|\varphi_0\|^2 = \frac{7}{4}$$

$$\boxed{\min_{\mathbb{R}^2} h = \frac{1}{4}}$$

$$h(x, 0) = \|\varphi - x\varphi_0\|^2 = x^2 \left\| \varphi_0 - \frac{1}{x}\varphi \right\|^2$$

$$\left\| \varphi_0 - \frac{1}{x}\varphi \right\|^2 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \|\varphi_0\|^2 > 0 \text{ donc : } h(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty.$$

h n'est pas majorée et $\sup_{\mathbb{R}^2} h = +\infty$.

• Proposition

Soit E un $\mathbb{K}$ ev de dimension finie muni d'une norme notée $\|\cdot\|$.

Soit F un $\mathbb{K}$ ev de dimension finie muni d'une norme notée $\|\cdot\|$.

Pour tout $u \in \mathcal{L}(E, F)$ il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $x \in E$ $\|u(x)\| \leq k \|x\|$.

Démonstration

Le cas $E = \{0\}$ est clair ($k = 0$) donc on suppose $E \neq \{0\}$.

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

On veut montrer :

$\exists k \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \in E \setminus \{0\} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|} \leq k$

En effet :

$\forall x \in E \setminus \{0\} \quad \|x\| > 0$

et :

$\forall k \in \mathbb{R}_+ \quad \|u(0)\| \leq k \|0\|$: le cas $x = 0$ compte pour rien

Il s'agit donc de prouver que la fonction $\begin{cases} E \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{\|u(x)\|}{\|x\|} \end{cases}$ est bornée.

Elle est continue mais $E \setminus \{0\}$ n'est ni fermé ni borné.

Toutefois, on remarque :

$$\forall x \in E \setminus \{0\} \quad \frac{\|u(x)\|}{\|x\|} = \left\| \frac{1}{\|x\|} u(x) \right\| = \left\| u \left(\frac{x}{\|x\|} \right) \right\|$$

$\frac{x}{\|x\|} \in \mathcal{B}_f(0_E, 1)$ ou $\mathcal{S}(0_E, 1)$ tous deux fermés et bornés.

L'application $\begin{cases} E \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \|u(x)\| \end{cases}$ est continue (comme composée d'applications continues)

et $\mathcal{B}_f(0_E, 1)$ est une partie fermée et bornée de E donc :

$\exists k \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \in \mathcal{B}_f(0_E, 1) \quad \|u(x)\| \leq k$

D'après ce qui précède, on en déduit :

$\forall x \in E \quad \|u(x)\| \leq k \|x\|$

Remarque

On conserve les notations précédentes.

$\forall (x, y) \in E^2 \quad \|u(x) - u(y)\| = \|u(x - y)\| \leq k \|x - y\|$

Toute application linéaire d'un $\mathbb{K}$ ev de dimension finie dans un autre est lipschitzienne.

- Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 2$ (le cas $n = 1$ est clair).

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ symétrique.

On va montrer que u a au moins une valeur propre.

Soit $f \begin{cases} E \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto (u(x)|x) \end{cases}$.

u est linéaire et E est de dimension finie donc u est continue.

On en déduit que f est continue.

$S = \{x \in E \text{ tq } \|x\| = 1\}$ est une partie fermée, bornée et non vide de E donc :

$\exists x_0 \in E \text{ tq } \forall x \in S \quad f(x) \leq f(x_0)$

On va montrer que x_0 est un vecteur propre de u .

Soit $y \in H = x_0^\perp$ de norme 1 (y existe car $\dim E \geq 2$).

$\forall \theta \in \mathbb{R} \quad \cos(\theta)x_0 + \sin(\theta)y \in S$ (Pythagore)

$\forall \theta \in \mathbb{R} \quad f(x_0) - f(\cos(\theta)x_0 + \sin(\theta)y) \geq 0$

$\forall \theta \in \mathbb{R} \quad (u(x_0)|x_0) - (\cos(\theta)u(x_0) + \sin(\theta)u(y)|\cos(\theta)x_0 + \sin(\theta)y) \geq 0$

$\forall \theta \in \mathbb{R} \quad (u(x_0)|x_0) - \cos^2(\theta)(u(x_0)|x_0) - \sin^2(\theta)(u(y)|y) - \cos(\theta)\sin(\theta)((u(x_0)|y) + (u(y)|x_0)) \geq 0$

Mais : $(u(y)|x_0) = (y|u(x_0)) = (u(x_0)|y)$ en utilisant la symétrie de u .

Donc :

$\forall \theta \in \mathbb{R} \quad \sin^2(\theta)(u(x_0)|x_0) - \sin^2(\theta)(u(y)|y) - 2\cos(\theta)\sin(\theta)(u(x_0)|y) \geq 0$

$\forall \theta \in]0; \pi[\quad \sin(\theta)(u(x_0)|x_0) - \sin(\theta)(u(y)|y) - 2\cos(\theta)(u(x_0)|y) \geq 0$

On fait tendre θ vers 0 : $-2(u(x_0)|x_0) \geq 0$

On fait tendre θ vers π : $+2(u(x_0)|x_0) \geq 0$

Donc $(u(x_0)|y) = 0$ ie :

$\forall y \in H \quad \|y\| = 1 \implies (u(x_0)|y) = 0$

$\forall y \in H \setminus \{0\} \quad (u(x_0)|y) = \|y\| \left((u(x_0)|\frac{y}{\|y\|}) \right) = \|y\| \times 0 = 0$

C'est trivial pour $y = 0$ donc :

$\forall y \in H \quad (u(x_0)|y) = 0$

Donc $u(x_0) \in H^\perp = x_0^{\perp\perp} = \mathbb{R}x_0$.

Donc x_0 est un vecteur propre de u ($x_0 \neq 0$).