

ANALYSE 2

2025-2026

Correction des exercices du quatrième chapitre du cours

941

1 Exercices du quatrième chapitre

Exercice 1 (*X 2019*)

Soit $f \begin{cases} \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z), z \in \mathbb{R}\} \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) \mapsto f(x, y, z) \end{cases}$ de classe $\mathcal{C}^2$.

Soit $\varphi \begin{cases} \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (r, \theta, z) \mapsto (r \cos(\theta), r \sin(\theta), z) \end{cases}$.

Soit $F = f \circ \varphi$.

Exprimez le laplacien de f à l'aide des dérivées partielles de F .

Correction

$$\begin{aligned}
\forall (r, \theta, z) \quad F(r, \theta, z) &= f(r \cos(\theta), r \sin(\theta), z) \\
\frac{\partial F}{\partial r}(r, \theta, z) &= \cos(\theta) \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos(\theta), r \sin(\theta), z) + \sin(\theta) \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos(\theta), r \sin(\theta), z) \\
\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}(r, \theta, z) &= \cos(\theta) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(r \cos(\theta), r \sin(\theta), z) \right) + \sin(\theta) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial f}{\partial y}(r \cos(\theta), r \sin(\theta), z) \right) \\
&= \cos(\theta) \left(\cos(\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r \cos(\theta), r \sin(\theta), z) + \sin(\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(r \cos(\theta), r \sin(\theta), z) \right) \\
&\quad + \sin(\theta) \left(\cos(\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(r \cos(\theta), r \sin(\theta), z) + \sin(\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(r \cos(\theta), r \sin(\theta), z) \right) \\
&\quad \text{en remplaçant } f \text{ par } \frac{\partial f}{\partial x} \text{ ou } \frac{\partial f}{\partial y} \text{ dans la deuxième ligne} \\
\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}(r, \theta, z) &= \cos^2(\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r \cos(\theta), r \sin(\theta), z) + \sin^2(\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(r \cos(\theta), r \sin(\theta), z) \\
&\quad + 2 \cos(\theta) \sin(\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(r \cos(\theta), r \sin(\theta), z) \\
\frac{\partial F}{\partial \theta}(r, \theta, z) &= -r \sin(\theta) \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos(\theta), r \sin(\theta), z) + r \cos(\theta) \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos(\theta), r \sin(\theta), z) \\
\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}(r, \theta, z) &= r^2 \sin^2(\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r \cos(\theta), r \sin(\theta), z) + r^2 \cos^2(\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(r \cos(\theta), r \sin(\theta), z) \\
&\quad - 2r^2 \cos(\theta) \sin(\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(r \cos(\theta), r \sin(\theta), z) \\
&\quad - r \cos(\theta) \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos(\theta), r \sin(\theta), z) - r \sin(\theta) \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos(\theta), r \sin(\theta), z)
\end{aligned}$$

Les dérivées partielles par rapport à z sont claires et on a :

$$\begin{aligned}
\forall (r, \theta, z) \quad \Delta f(r \cos(\theta), r \sin(\theta), z) &= \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r}(r, \theta, z) + \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}(r, \theta, z) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}(r, \theta, z) + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}(r, \theta, z) \\
&= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial F}{\partial r} \right)(r, \theta, z) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}(r, \theta, z) + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}(r, \theta, z)
\end{aligned}$$

Exercice 2 (Centrale 2019)

$$f(x, y) = \arctan(x) + \arctan(y) - \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$$

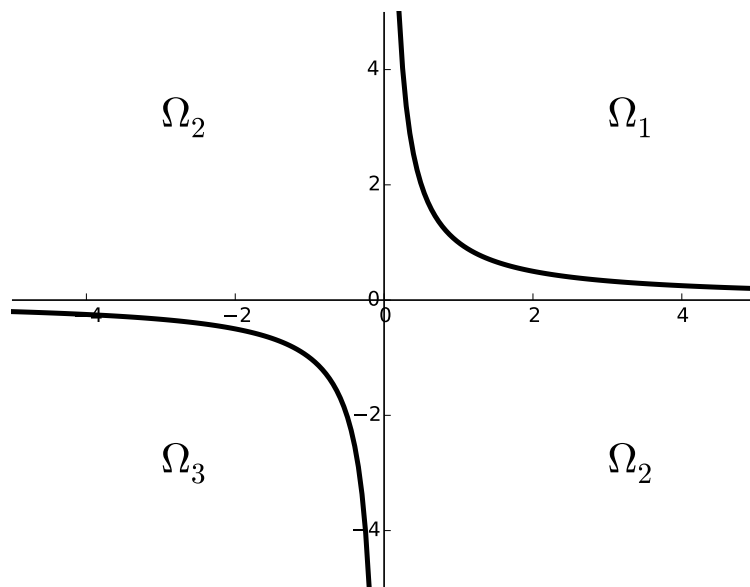
1. Montrer que le domaine de définition, noté D de f est la réunion de trois ouverts de $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que f est $\mathcal{C}^1$ sur D .
3. Simplifiez l'expression de f .
4. Voyez-vous une autre façon de simplifier f ?

Correction

1. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } xy - 1 \neq 0\}$.

Dans la mesure où $g \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto xy - 1 \end{cases}$ est continue, D est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Je pense qu'il s'agit ici de faire un dessin et de remarquer que D est la réunion de trois ouverts deux à deux disjoints :



$$\Omega_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } x > 0 \text{ et } y > x^{-1}\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } x > 0 \text{ et } xy - 1 > 0\}.$$

On note $h \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto xy - 1 \end{cases}$.

h , tout comme g est continue, donc :

$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } x > 0\}$ et $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } xy - 1 > 0\}$ sont des parties ouvertes de $\mathbb{R}^2$.

L'intersection d'un nombre fini d'ouverts est encore un ouvert donc Ω_1 est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

$\Omega_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } xy < 1\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

$\Omega_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } x < 0 \text{ et } y < x^{-1}\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } x < 0 \text{ et } xy - 1 > 0\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

$D = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3$ est la réunion de 3 ouverts deux à deux disjoints.

2. Les fonctions $(x, y) \in D \mapsto x + y$ et $(x, y) \in D \mapsto 1 - xy$ sont $\mathcal{C}^1$ car polynômiales et la seconde ne s'annule pas donc la fonction $(x, y) \in D \mapsto \frac{x + y}{1 - xy}$ est $\mathcal{C}^1$.

On la compose avec arctan qui est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc la fonction $(x, y) \in D \mapsto \arctan\left(\frac{x + y}{1 - xy}\right)$ est $\mathcal{C}^1$ sur D .

La fonction $(x, y) \in D \mapsto x$ est $\mathcal{C}^1$ car polynômiale. On la compose avec arctan qui est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc la fonction $(x, y) \in D \mapsto \arctan(x)$ est $\mathcal{C}^1$ sur D .

La fonction $(x, y) \in D \mapsto y$ est $\mathcal{C}^1$ car polynômiale. On la compose avec arctan qui est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc la fonction $(x, y) \in D \mapsto \arctan(y)$ est $\mathcal{C}^1$ sur D .

Par combinaison linéaire, f est $\mathcal{C}^1$ sur D .

3.

$$\begin{aligned}
\forall (x, y) \in D \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1-xy+y(x+y)}{(1-xy)^2} \frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)^2} \\
&= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1+y^2}{(1-xy)^2 + (x+y)^2} \\
&= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1+y^2}{1-2xy+x^2y^2+x^2+2xy+y^2} \\
&= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1+y^2}{1+x^2y^2+x^2+y^2} \\
&= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1+y^2}{(1+x^2)(1+y)^2} \\
&= 0 \\
\forall (x, y) \in D \quad f(x, y) &= f(y, x) \text{ qu'on dérive par rapport à } y \\
\forall (x, y) \in D \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{\partial f}{\partial x}(y, x) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Donc f est constante sur chacun des trois ouverts formant D .

On commence par montrer que f est constante sur Ω_1 .

Ω_1 est convexe.

Soit (a, b) et $(c, d) \in \Omega_1$.

Soit $t \in [0; 1]$.

$$(1-t)(a, b) + t(c, d) = ((1-t)a + tc, (1-t)b + td).$$

a et c sont strictement positifs donc $(1-t)a + tc$, qui est compris entre a et c , aussi.

$$\begin{aligned}
(1-t)a + tc)((1-t)b + td) &= (1-t)^2ab + t(1-t)ad + t(1-t)cb + t^2cd \\
&> (1-t)^2 + t(1-t) \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a} \right) + t^2
\end{aligned}$$

On utilise :

$$ab > 1 \text{ qu'on multiplie par } (1-t)^2 \geq 0$$

$$cd > 1 \text{ qu'on multiplie par } t^2 \geq 0$$

$$d > \frac{1}{c} \text{ qu'on multiplie par } t(1-t)a \geq 0$$

$$b > \frac{1}{a} \text{ qu'on multiplie par } t(1-t)c \geq 0$$

et t et $1-t$ ne peuvent être simultanément nuls.

De plus :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad x + \frac{1}{x} \geq 2.$$

Cela peut se justifier par une étude de fonctions ou par :

$$\forall x > 0 \quad x + \frac{1}{x} - 2 = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2 \geq 0$$

On en déduit :

$$(1-t)a + tc)((1-t)b + td) > (1-t)^2 + 2t(1-t) + t^2 = (t+1-t)^2 = 1.$$

Ω_1 est bien convexe.

Cela peut aussi se prouver avec la théorie des fonctions convexes désormais au programme.

$$\text{Soit } F \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^* \\ z \mapsto \frac{1}{z} \end{cases}.$$

F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\forall z \in \mathbb{R}_+^* \quad F'(z) = -\frac{1}{z^2} < 0$$

F est donc une fonction convexe.

Soit (a, b) et $(c, d) \in \Omega_1$.

Soit $t \in [0; 1]$.

$$(1-t)(a, b) + t(c, d) = ((1-t)a + tc, (1-t)b + td).$$

a et c sont strictement positifs donc $(1-t)a + tc$, qui est compris entre a et c , aussi.

$$(a, b) \in \Omega_1 \text{ donc } b \geq F(a).$$

$$(c, d) \in \Omega_1 \text{ donc } d \geq F(c).$$

$$t \text{ et } 1-t \text{ sont positifs donc } (1-t)b + td \geq (1-t)F(a) + tF(c).$$

$$F \text{ est convexe donc } (1-t)F(a) + tF(c) \geq F((1-t)a + tc).$$

$$\text{On en déduit } (1-t)b + td \geq F((1-t)a + tc) \text{ puis } (1-t)(a, b) + t(c, d) = ((1-t)a + tc, (1-t)b + td) \in \Omega_1.$$

Soit alors (a, b) et $(c, d) \in \Omega_1$.

$$\forall t \in [0; 1] \quad \varphi(t) = (1-t)(a, b) + t(c, d) \in \Omega_1$$

Donc $\psi = f \circ \varphi$ est définie sur $[0; 1]$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; 1]$ et :

$$\forall t \in [0; 1] \quad \psi'(t) = df(\varphi(t))(\varphi'(t)) = 0_{\mathbb{R}}.$$

Pour être plus explicite :

$$\forall t \in [0; 1] \quad \psi'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(t))(c-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(t))(d-b)$$

D'après le cours sur les fonctions d'une seule variable, ψ est constante.

$$\text{En particulier } \psi(0) = \psi(1) \text{ ie } f(a, b) = f(c, d).$$

f est bien constante sur Ω_1 .

$$f(x, x) = 2 \arctan(x) - \arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \pi \text{ donc :}$$

$$\forall (x, y) \in \Omega_1 \quad f(x, y) = \pi.$$

Ω_2 n'est pas convexe mais :

$$\forall (x, y) \in \Omega_2 \quad \forall t \in [0; 1] \quad (tx, ty) \in \Omega_2$$

$$\text{En effet si } xy \leq 0, \text{ alors } (tx)(ty) = t^2xy \leq 0$$

Et si $0 < xy < 1$ alors :

$$\text{si } t \in]0; 1] \quad t^2xy < t^2 \leq 1$$

$$\text{et si } t = 0 \text{ alors } t^2xy = 0 < 1$$

Soit $(x, y) \in \Omega_2$.

$$\text{Soit } \varphi : t \in [0; 1] \mapsto (tx, ty).$$

$\psi = f \circ \varphi$ est définie sur $[0; 1]$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; 1]$ et :

$$\forall t \in [0; 1] \quad \psi'(t) = df(\varphi(t))(\varphi'(t)) = 0_{\mathbb{R}}.$$

D'après le cours sur les fonctions d'une seule variable, ψ est constante.

$$\text{En particulier } \psi(1) = \psi(0) \text{ ie } f(x, y) = f(0, 0) = 0.$$

f est bien constante sur Ω_2 .

Enfin :

$$\forall (x, y) \in \Omega_3 \quad f(x, y) = -f(-x, -y) \text{ avec } (-x, -y) \in \Omega_1$$

Donc :

$$\forall (x, y) \in \Omega_3 \quad f(x, y) = -\pi$$

f est bien constante sur Ω_3 .

Bien sûr, f n'est pas constante sur D .

4. Soit $\alpha = \arctan(x)$ et $\beta = \arctan(y)$.

$$-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2} \text{ et } -\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2}$$

$$-\pi < \alpha + \beta < \pi$$

Si $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ alors $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ et :

$$y = \tan(\beta) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{1}{\tan(\alpha)} = \frac{1}{x} \text{ (formules : } \cos(\pi/2 - \theta) = \dots)$$

D'où $y = \frac{1}{x}$, ce qui est impossible si $(x, y) \in D$.

Si $\alpha + \beta = -\frac{\pi}{2}$ alors $\beta = -\frac{\pi}{2} - \alpha$ et :

$$y = \tan(\beta) = \tan\left(-\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan\left(\pi - \frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{1}{\tan(\alpha)} = \frac{1}{x}$$

D'où $y = \frac{1}{x}$, ce qui est impossible si $(x, y) \in D$.

Donc $\alpha + \beta \neq \pm \frac{\pi}{2}$ et alors :

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{1 - \tan(\alpha)\tan(\beta)} = \frac{x + y}{1 - xy}$$

On en déduit :

- Si $\alpha + \beta < -\frac{\pi}{2}$, $\arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) = \alpha + \beta + \pi$ et $f(x, y) = -\pi$
- Si $-\frac{\pi}{2} < \alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$, $\arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) = \alpha + \beta$ et $f(x, y) = 0$
- Si $\alpha + \beta > \frac{\pi}{2}$, $\arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) = \alpha + \beta - \pi$ et $f(x, y) = \pi$