DS 6
Correction

A Préliminaire

1. La formule du binôme généralisé donne pour $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$:

$$\forall x \in]-1;1[\ (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n \quad (R=1)$$

On prend ici $\alpha = -\dfrac{1}{2}$.

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}^* \ \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} &= \frac{(-1/2)(-3/2)\dots(-(2n-1)/2)}{n!} = (-1)^n \frac{1\times 3\times\dots\times(2n-1)}{2^n n!} \\
&= (-1)^n \frac{1\times 3\times\dots\times(2n-1)}{2\times 4\times\dots\times 2n} = (-1)^n \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \\
&= (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} = (-1)^n \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} \\
&= (-1)^n \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} \text{ égal 1 pour } n=0
\end{aligned}$$

$\forall x \in]-1;1[\ \dfrac{1}{\sqrt{1+x}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} x^n \quad (R=1)$

Et finalement, en remplaçant x par $-x$:

$$\forall x \in]-1;1[\ \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} x^n \quad (R=1)$$

B Identité de Karamata

2.

$$\begin{aligned}
\forall x \in]-1;1[\ \sqrt{1-x} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^{(p+1)k} &= \sqrt{1-x} f\left(x^{p+1}\right) \\
&= \sqrt{\frac{1-x}{1-x^{p+1}}} \sqrt{1-x^{p+1}} f\left(x^{p+1}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\sum\limits_{k=0}^{p} x^k}} \sqrt{1-x^{p+1}} f\left(x^{p+1}\right)
\end{aligned}$$

$x^{p+1} \xrightarrow[x\to 1^-]{} 1^-$ donc par limite des fonctions composées : $\sqrt{1-x^{p+1}}f\left(x^{p+1}\right) \xrightarrow[x\to 1^-]{} \sqrt{\pi}$.
Finalement :

$$\lim_{x\to 1^-} \sqrt{1-x}\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^{(p+1)k} = \sqrt{\frac{\pi}{p+1}}$$

3. Soit $p \in \mathbb{N}$.

   La fonction $g_p \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-(p+1)t}}{\sqrt{t}} \end{cases}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ et on a des problèmes d'intégrabilité en 0 et en $+\infty$.
   - Au voisinage de 0, $g_p(t) \sim \dfrac{1}{\sqrt{t}}$.
     $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ est intégrable sur $]0;1]$ donc g_p est intégrable sur $]0;1]$.
   - Au voisinage de $+\infty$, $g_p(t) = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ par croissances comparées (car $p+1>0$) et g_p est donc intégrable sur $[1;+\infty[$.

   g_p est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et l'intégrale proposée converge absolument donc converge.

   Le changement de variable $u=(p+1)t$ (licite car $t\mapsto (p+1)t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et strictement croissante) donne

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-(p+1)t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{p+1}}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u = \sqrt{\frac{\pi}{p+1}}$$

   Avec la question précédente, on a donc immédiatement

$$\lim_{x\to 1^-} \sqrt{1-x}\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^{(p+1)k} = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-(p+1)t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$$

4. Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$.

   Il existe un entier d et des scalaires $c_0,\dots,c_d$ tels que $Q = \sum_{p=0}^{d} c_p X^p$.

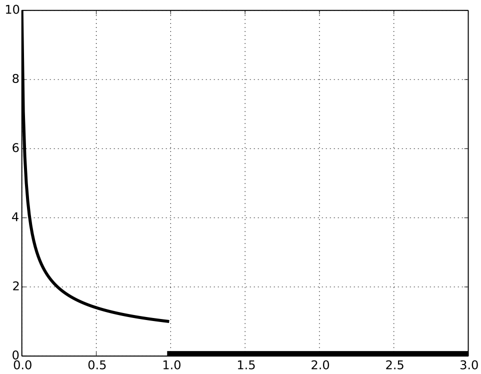
   La question précédente donne (après multiplication par c_p) :

$$\forall p \in [\![0,d]\!],\ \lim_{x\to 1^-} \sqrt{1-x}\sum_{k=0}^{+\infty} a_k c_p (x^k)^p x^k = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}c_p(\mathrm{e}^{-t})^p}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$$

   En sommant ces relations (linéarité du passage à la limite et du passage à l'intégrale, pas de souci pour intervertir les symboles car on effectue une somme FINIE) on obtient que

$$\lim_{x\to 1^-} \sqrt{1-x}\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k Q(x^k) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}Q(\mathrm{e}^{-t})}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$$

5. Soit $g \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}} h\left(\mathrm{e}^{-t}\right) \end{cases}$.



g est continue par morceaux : il y a un unique problème de continuité en 1 où la fonction a une limite finie à droite et gauche.

h étant positive et majorée par e,
$\forall t \in \mathbb{R}_+^* \ \ |g(t)| \leq \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}$
Or la fonction $t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$: cf 3) donc g est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
Par définition de h :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}} h\left(\mathrm{e}^{-t}\right) \, \mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = \left[2\sqrt{t}\right]_0^1 = 2$$

6. Soit $x \in [0, 1[$ fixé.
$x^k \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$ donc :
$\exists k_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall k \geq k_0 \ 0 \leq x^k < \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.
On a alors :
$\forall k \geq k_0 \ a_k x^k h\left(x^k\right) = 0$
La série de terme général $a_k x^k h\left(x^k\right)$ est donc convergente.
7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
$\forall k > n \ \left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}}\right)^k = \mathrm{e}^{-\frac{k}{n}} < \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ et $h\left(\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}}\right)^k\right) = 0$
$\forall k \leq n \ \left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}}\right)^k = \mathrm{e}^{-\frac{k}{n}} \geq \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ et $h\left(\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}}\right)^k\right) = \mathrm{e}^{\frac{k}{n}}$
Donc :

$$\sqrt{1-\mathrm{e}^{-1/n}} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \mathrm{e}^{-k/n} h\left(\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}}\right)^k\right) = \sqrt{1-\mathrm{e}^{-1/n}} \sum_{k=0}^{n} a_k \mathrm{e}^{-k/n} \ \mathrm{e}^{k/n} = \sqrt{1-\mathrm{e}^{-1/n}} \sum_{k=0}^{n} a_k$$

Quand $n \to +\infty$, $\mathrm{e}^{-1/n} \to 1^-$ et l'égalité de Karamata donne :

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt{1-e^{-1/n}} \sum_{k=0}^{n} a_k = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}} h\left(e^{-t}\right) \, \mathrm{d}t = 2$$

Comme $1 - \mathrm{e}^{-x} \sim_0 x$, on en déduit que

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \sim \frac{2}{\sqrt{1-\mathrm{e}^{-1/n}}} \sim 2\sqrt{n}$$

C Théorème taubérien

8. Comme $n \geq [\alpha n]$, on a

$$S_n - S_{[\alpha n]} = \sum_{k=[\alpha n]+1}^{n} a_k \geq (n - [\alpha n])a_n$$

l'inégalité provenant de la décroissance de (a_k). Si $n - [\alpha n]$ est non nul, c'est une quantité > 0 et on peut diviser pour obtenir

$$a_n \leq \frac{S_n - S_{[\alpha n]}}{n - [\alpha n]}$$

$\beta > 1$ donc $\beta n \geq n \in \mathbb{N}$ et $[\beta n] \geq n$.
On en déduit comme ci-dessus :

$$S_{[\beta n]} - S_n = \sum_{k=n+1}^{[\beta n]} a_k \leq ([\beta n] - n)a_{n+1} \leq ([\beta n] - n)a_n$$

et quand $[\beta n] - n > 0$,

$$\frac{S_{[\beta n]} - S_n}{[\beta n] - n} \leq a_n$$

9. Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, $[x] \leq x \leq [x] + 1$, on a $[\gamma n] \leq \gamma n \leq [\gamma n] + 1$.
Pour $\gamma > 0$, $[\gamma n] > 0$ pour n assez grand et on peut diviser par $[\gamma n]$ pour en déduire :

$$1 \leq \gamma \frac{n}{[\gamma n]} \leq 1 + \frac{1}{[\gamma n]}$$

Par théorème d'encadrement (et comme $[\gamma n] \to +\infty$) on a donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{[\gamma n]} = \frac{1}{\gamma}$$

Comme $[\gamma n] \to +\infty$, l'hypothèse faite sur la suite (S_n) inplique que :

$$\frac{S_{[\gamma n]}}{\sqrt{n}} \sim 2\sqrt{\frac{[\gamma n]}{n}}$$

et ainsi

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{S_{[\gamma n]}}{\sqrt{n}} = 2\sqrt{\gamma}$$

10. Pour $\gamma > 0$ différent de 1, on écrit que

$$\sqrt{n}\frac{S_n - S_{[\gamma n]}}{n - [\gamma n]} = \frac{1}{1 - \frac{[\gamma n]}{n}} \left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} - \frac{S_{[\gamma n]}}{\sqrt{n}} \right)$$

et les questions précédentes montre que cette quantité tend vers $\dfrac{2(1-\sqrt{\gamma})}{1-\gamma}$.
L'encadrement de la question 8 montre que $\sqrt{n}a_n$ est majoré par un terme de limite $\dfrac{2(1-\sqrt{\alpha})}{1-\alpha}$ et minoré par un terme de limite $\dfrac{2(1-\sqrt{\beta})}{1-\beta}$. Par définition des limites :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0/\ \forall n \geq n_0,\ \frac{2(1-\sqrt{\beta})}{1-\beta} - \varepsilon \leq \sqrt{n}a_n \leq \frac{2(1-\sqrt{\alpha})}{1-\alpha} + \varepsilon$$

11. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\dfrac{2(1-\sqrt{x})}{1-x} = \dfrac{2}{1+\sqrt{x}}$ est de limite 1 en 1, il existe $\alpha < 1 < \beta$ tels que

$$1-\varepsilon \leq \frac{2(1-\sqrt{\beta})}{1-\beta} \quad \text{et} \quad \frac{2(1-\sqrt{\alpha})}{1-\alpha} \leq 1+\varepsilon$$

Pour ces α et β, la question précédente donne un rang n_0 tel que :

$$\forall n \geq n_0,\ 1-2\varepsilon \leq \sqrt{n}a_n \leq 1+2\varepsilon$$

Par définition, des limites, on a donc $\sqrt{n}a_n \to 1$ et donc

$$a_n \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$$

D Marche aléatoire

12. Une réponse simple à cette question est possible :
Soit $k \in [\![1;n[\![$ et $(i_1,\dots,i_{n-k}) \in \{-1,1\}^{n-k}$.
Par indépendance des X_i, on a

$$\mathbb{P}(X_{k+1}=i_1,\dots,X_n=i_{n-k}) = \prod_{j=k+1}^{n} \mathbb{P}(X_j = i_{j-k}) = \prod_{j=k+1}^{n} \frac{1}{2} = \frac{1}{2^{n-k}}$$

En utilisant de nouveau l'indépendance, on a :

$$\mathbb{P}(X_1=i_1,\dots,X_{n-k}=i_{n-k}) = \prod_{j=1}^{n-k} \mathbb{P}(X_j = i_j) = \prod_{j=1}^{n-k} \frac{1}{2} = \frac{1}{2^{n-k}}$$

Néanmoins cette propriété n'est pas suffisante dans la question 13, où on a $(i_1,\dots,i_{n-k}) \in \mathbb{Z}^{n-k}$.
Mais si $(i_1,\dots,i_{n-k}) \in \mathbb{Z}^{n-k} \setminus \{-1,1\}^{n-k}$, les évènements $\bigcap\limits_{j=k+1}^{n}(X_j = i_{j-k})$ et $\bigcap\limits_{j=1}^{n-k}(X_j = i_j)$ sont impossibles donc tous les deux sont de probabilité nulle.

Cette réponse à la question tire parti de la simplicité de la loi commune des X_i. En fait c'est une propriété générale.
On note $X(\Omega)$ l'ensemble des valeurs que peuvent prendre les X_i. C'est, par définition des variables aléatoires discrètes, un ensemble dénombrable.
Soit $k \in [\![1;n[\![$ et $(i_1,\dots,i_{n-k}) \in X(\Omega)^{n-k}$.
Par indépendance des X_i, on a

$$\mathbb{P}(X_{k+1}=i_1,\dots,X_n=i_{n-k}) = \prod_{j=k+1}^{n} \mathbb{P}(X_j = i_{j-k})$$

En utilisant de nouveau l'indépendance, on a :

$$\mathbb{P}(X_1=i_1,\dots,X_{n-k}=i_{n-k}) = \prod_{j=1}^{n-k} \mathbb{P}(X_j = i_j)$$

Mais comme les X_i ont toutes la même loi :

$$\forall j \in [\![k+1;n]\!]\ \mathbb{P}(X_j = i_{j-k}) = \mathbb{P}(X_{j-k} = i_{j-k})$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_{k+1} = i_1, \ldots, X_n = i_{n-k}) &= \prod_{j=k+1}^{n} \mathbb{P}(X_{j-k} = i_{j-k}) \\
&= \prod_{j=1}^{n-k} \mathbb{P}(X_j = i_j) \\
&= \mathbb{P}(X_1 = i_1, \ldots, X_{n-k} = i_{n-k})
\end{aligned}$$

13. L'application θ est une bijection avec :
$\theta^{-1} \begin{cases} \mathbb{Z}^{n-k} \to \mathbb{Z}^{n-k} \\ (Z_1, \ldots, Z_{n-k}) \mapsto (Z_1, Z_2 - Z_1, Z_3 - Z_2, \ldots, Z_{n-k} - Z_{n-k-1}) \end{cases}$
Soit $k \in [\![1; n[\![$ et $(j_1, \ldots, j_{n-k}) \in \mathbb{Z}^{n-k}$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_{k+1} - S_k = j_1, \ldots, S_n - S_k = j_{n-k}) &= \mathbb{P}\left(X_{k+1} = j_1, X_{k+2} + X_{k+1} = j_2, \ldots, \sum_{l=k+1}^{n} X_l = j_{n-k}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\theta\left((X_{k+1}, \ldots, X_n)\right) = (j_1, \ldots, j_{n-k})\right) \\
&= \mathbb{P}\Big((X_{k+1}, \ldots, X_n) = \theta^{-1}((j_1, \ldots, j_{n-k}))\Big) \\
&= \mathbb{P}\Big((X_1, \ldots, X_{n-k}) = \theta^{-1}((j_1, \ldots, j_{n-k}))\Big) \\
&\quad \text{avec la question précédente} \\
&= \mathbb{P}\left(\theta\left((X_1, \ldots, X_{n-k})\right) = (j_1, \ldots, j_{n-k})\right) \\
&= \mathbb{P}\left(X_1 = j_1, X_1 + X_2 = j_2, \ldots, \sum_{l=1}^{n-k} X_l = j_{n-k}\right) \\
&= \mathbb{P}(S_1 = j_1, \ldots, S_{n-k} = j_{n-k})
\end{aligned}$$

Remarque
La question précédente permet d'affirmer que les vecteurs aléatoires $V = (X_1, \ldots, X_{n-k})$ et $W = (X_k, \ldots, X_n)$ ont la même loi.
Mais si X et Y deux variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ont la même loi et si f est une application définie sur $X(\Omega) = Y(\omega)$ alors les variables aléatoires $f(X)$ et $f(Y)$ ont la même loi, que f soit bijective ou non.
En effet :

$$\begin{aligned}
\forall z \in f(X(\Omega)) = f(Y(\Omega))\ P(f(X) = z) &= P\left(\bigcup_{x \in X(\Omega) \text{ tq } f(x) = z} (X = x)\right) \text{ union dénombrable} \\
&= \sum_{x \in X(\Omega) \text{ tq } f(x) = z} P(X = x) \text{ par incompatibilité} \\
&\quad \text{il s'agit de la somme d'une famille sommable} \\
&\quad \text{notion hors-programme en PC à l'époque} \\
&= \sum_{x \in X(\Omega) \text{ tq } f(x) = z} P(Y = x) \text{ car } X \text{ et } Y \text{ ont la même loi} \\
&= P\left(\bigcup_{x \in X(\Omega) \text{ tq } f(x) = z} (Y = x)\right) \\
&= P\left(\bigcup_{y \in Y(\Omega) \text{ tq } f(y) = z} (Y = x)\right) \\
&= P(f(Y) = z)
\end{aligned}$$

14. On remarque, pour $k \in [\![0; n-1]\!]$, que

$$\begin{aligned} A_k^n &= \{S_k = 0\} \cap \bigcap_{i=k+1}^{n} \{S_i \neq 0\} = (S_k = 0) \cap (S_{k+1} \neq 0) \cap \dots (S_n \neq 0) \\ &= (S_k = 0) \cap (S_{k+1} - S_k \neq 0) \cap \dots (S_n - S_k \neq 0) \text{ par double inclusion} \end{aligned}$$

On remarque que les variables $S_{k+1} - S_k$, ..., $S_n - S_k$ ne dépendent que de $X_{k+1}, \dots, X_n$ et sont donc indépendantes de S_k qui ne dépend que de $X_1, \dots, X_k$ (et puisque les X_i sont, elles, indépendantes et en utilisant le lemme des coalitions). On a donc :

$$\mathbb{P}(A_n^k) = \mathbb{P}(S_k = 0) \times \mathbb{P}((S_{k+1} - S_k \neq 0) \cap \dots (S_n - S_k \neq 0))$$

Mais :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_{k+1} - S_k \neq 0, \dots, S_n - S_k \neq 0) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{j_1,\dots,j_{n-k} \neq 0} (S_{k+1} - S_k = j_1, \dots, S_n - S_k = j_{n-k})\right) \\ &= \sum_{j_1,\dots,j_{n-k} \neq 0} \mathbb{P}\left(S_{k+1} - S_k = j_1, \dots, S_n - S_k = j_{n-k}\right) \end{aligned}$$

la dernière égalité provenant de l'incompatiblité des événements. La question précédente donne alors

$$\mathbb{P}(S_{k+1} - S_k \neq 0, \dots, S_n - S_k \neq 0) = \sum_{j_1,\dots,j_{n-k} \neq 0} \mathbb{P}\left(S_1 = j_1, \dots, S_{n-k} = j_{n-k}\right)$$

et en refaisant le chemin dans l'autre sens

$$\mathbb{P}(S_{k+1} - S_k \neq 0, \dots, S_n - S_k \neq 0) = \mathbb{P}(S_1 \neq 0, \dots, S_{n-k} \neq 0) = \mathbb{P}(E_{n-k})$$

Finalement, on trouve que :

$$\mathbb{P}(A_k^n) = \mathbb{P}(S_k = 0)\mathbb{P}(E_{n-k})$$

Enfin, pour $k = n$:
$P(A_n^n) = P(S_n = 0) = P(S_n = 0)P(E_0)$ car $P(E_0) = P(T > 0) = 1$

15.
- Les évènements A_k^n sont deux à deux incompatibles :
  Soient k et $l \in [\![0; n]\!]$ avec $k < l$.
  $A_k^n = \{S_k = 0\} \cap \bigcap_{i=k+1}^{n} \{S_i \neq 0\} \subset \{S_l \neq 0\}$
  $A_l^n \subset \{S_l = 0\}$ (en distinguant le cas $l \neq n$ du cas $l = n$)
- La réunion des A_k^n est l'évènement certain :
  Soit $\omega \in \Omega$.
  Comme $S_0(\omega) = 0$, il existe un plus grand $k \in [\![0, n]\!]$ tel que $S_k(\omega) = 0$ et on a alors $\omega \in A_k^n$.

On a donc :

$$1 = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(A_k^n) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(S_k = 0)\mathbb{P}(E_{n-k})$$

16. $\forall n \in \mathbb{N}\ |\mathbb{P}(S_n = 0)| = \mathbb{P}(S_n = 0) \leq 1$
On en déduit que le rayon de convergence de la série entière $\sum \mathbb{P}(S_n = 0)x^n$ est supérieur ou égal à celui de la série entière $\sum x^n$ qui vaut 1.
De même le rayon de convergence de la série entière $\sum \mathbb{P}(E_n = 0)x^n$ est supérieur ou

égal à 1.
On peut donc utiliser le théorème sur le produit de Cauchy et écrire que pour $x \in]-1,1[$:

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S_n = 0)x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(E_n)x^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n \quad \text{avec} \quad u_n = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(S_k = 0)\mathbb{P}(E_{n-k})$$

Avec la question précédente, on a donc :

$$\forall x \in]-1;1[\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S_n = 0)x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(E_n)x^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

17. Les variables aléatoires $\dfrac{1+X_i}{2}$ sont indépendantes et suivent toutes la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$.
Donc pour tout entier naturel non nul, $Y_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1+X_i}{2} = \frac{S_n + n}{2}$ suit la loi binomiale de paramètres n et $\dfrac{1}{2}$.
$\forall n \in \mathbb{N}^* \; \mathbb{P}(S_n = 0) = \mathbb{P}\left(Y_n = \dfrac{n}{2}\right)$
Si n est impair $\dfrac{n}{2} \notin \mathbb{N}$ et $\mathbb{P}(S_n = 0) = \mathbb{P}\left(Y_n = \dfrac{n}{2}\right) = 0$
(après un nombre impair de déplacements, on ne peut pas être revenu au point de départ)
Si $n = 2p$ est pair alors $\mathbb{P}(S_n = 0) = \mathbb{P}\left(Y_n = \dfrac{n}{2}\right) = \mathbb{P}(Y_{2p} = p) = \dfrac{\binom{2p}{p}}{2^{2p}}$
Comme S_0 est constante nulle, cette formule est valable pour $n = 0$ (1=1).
18. On en déduit avec la question préliminaire que pour $x \in]-1,1[$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S_n = 0)x^n = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\binom{2p}{p}}{4^p} x^{2p} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

et donc que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(E_n)x^n = \frac{\sqrt{1-x^2}}{1-x} = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

19. Considérons la fonction f définie par :

$$\forall x \in]-1,1[\; f(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

Comme $\sqrt{1-x}f(x) \to \sqrt{\pi}$ quand $x \to 1^-$, on peut utiliser la partie B (et la question précédente) pour obtenir

$$\sum_{k=0}^{n} \sqrt{\frac{\pi}{2}}\mathbb{P}(E_n) \sim 2\sqrt{n}$$

Par ailleurs $\mathbb{P}(T > n) = \mathbb{P}(E_n)$ est le terme général d'une suite décroissante $((T > n) \subset (T > n-1))$ de réels positifs et le théorème taubérien indique que

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\mathbb{P}(E_n) \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$$

On a donc :

$$\mathbb{P}(E_n) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi n}}$$

20. On a :
$$(T=+\infty)=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(T>n)=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}E_n$$
Par continuité décroissante , on en déduit que :
$$\mathbb{P}(T=+\infty)=\lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}(E_n)=0$$
On revient presque sûrement au point de départ.
21. Comme $T(\Omega)=\overline{\mathbb{N}^*}$:
$$\forall n\in\mathbb{N}^*\ (T=n)=(T>n-1)\setminus(T>n)\text{ avec }(T>n)\subset(T>n-1)$$
Donc :
$$\forall n\in\mathbb{N}^*\ \mathbb{P}(T=n)=\mathbb{P}(T>n-1)-\mathbb{P}(T>n)=\mathbb{P}(E_{n-1})-\mathbb{P}(E_n)$$
On en déduit :
$$\begin{aligned}\forall x\in]-1;1[\ \sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(T=n)x^n &= \sum_{n=1}^{+\infty}(\mathbb{P}(E_{n-1})-\mathbb{P}(E_n))x^n\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(E_{n-1})x^n-\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(E_n)x^n \text{ pas de problème de convergence}\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(E_n)x^{n+1}-\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(E_n)x^n+\mathbb{P}(E_0)\\ &= 1+(x-1)\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(E_n)x^n\\ &= 1-|1-x|\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=1-\sqrt{(1-x)^2}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\\ &= 1-\sqrt{1-x^2}\end{aligned}$$
La relation reste vraie pour $x=1$ car :
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(T=n)=\mathbb{P}(T<+\infty)=1-P(T=+\infty)=1=1-\sqrt{1-1^2}$$
22. On commence par chercher le DSE de $h\ :\ x\mapsto 1-\sqrt{1-x^2}$. Pour cela on remarque que (pour $x\in]-1,1[$)
$$h'(x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=x\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\binom{2k}{k}}{4^k}x^{2k}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\binom{2k}{k}}{4^k}x^{2k+1}$$
Par théorème de primitivation des séries entières :
$$h(x)=h(0)+\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\binom{2k}{k}}{4^k(2k+2)}x^{2k+2}=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\binom{2(j-1)}{j-1}}{4^{j-1}.2j}x^{2j}$$
Par unicité des DSE, on en déduit que :
$$\mathbb{P}(T=2j)=\frac{\binom{2(j-1)}{j-1}}{4^{j-1}.2j}$$

Il nous reste à remarquer que :

$$\binom{2(j-1)}{j-1} = \frac{(2j-2)!}{((j-1)!)^2} = \frac{(2j)!}{(j!)^2}\frac{j^2}{2j(2j-1)}$$

pour en déduire que

$$\mathbb{P}(T = 2j) = \frac{\binom{2j}{j}}{4^j(2j-1)}$$