

X2022 PC

Première partie. Points fixes

1. Soit $f \begin{cases} [a; b] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \phi(x) - x \end{cases}$.
 - f est continue car ϕ est continue.
 - $f(a) = \phi(a) - a \geq 0$ car $\phi(a) \in [a; b]$.
 - $f(b) = \phi(b) - b \leq 0$ car $\phi(b) \in [a; b]$.D'après le théorème des valeurs intermédiaires, f s'annule au moins une fois :
 $\exists x_0 \in [a; b]$ tq $f(x_0) = 0$
 x_0 est un point fixe de ϕ .
2. Soit $k = \sup_{x \in \mathbb{R}} (|\phi'(x)|)$.
 $k \in [0; 1[$ et :
 $\forall x \in \mathbb{R} \quad -k \leq \phi'(x) \leq k$
Soit $f \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \phi(x) - x \end{cases}$.
 f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et :
 $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = \phi'(x) - 1 \leq k - 1 < 0$
 f réalise donc une bijection (strictement décroissante) de $\mathbb{R}$ sur $]l_+, l_-[$ avec $l_- = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
et $l_+ = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
Mais, par le théorème fondamental du calcul différentiel-intégral :
 $\forall x \in \mathbb{R} \quad \phi(x) - \phi(0) = \int_0^x \phi'(t) dt$
Donc :
 $\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad f(x) \leq kx + \phi(0) - x = (k - 1)x + \phi(0) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty$
Donc $l_+ = -\infty$.
 $\forall x \in \mathbb{R}_- \quad f(x) = - \int_x^0 \phi'(t) dt + \phi(0) - x$
 $\forall x \in \mathbb{R}_- \quad \int_x^0 \phi'(t) dt \leq \int_x^0 k dt = -kx$
Donc :
 $\forall x \in \mathbb{R}_- \quad f(x) \geq (k - 1)x + \phi(0) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$
Donc $l_- = +\infty$.
Donc f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
Donc f s'annule une fois et une seule.
Donc ϕ a un unique point fixe.
3. La fonction $x \mapsto 1 + x^2$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.
La fonction racine carrée est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ (mais pas sur $\mathbb{R}$).
Donc, par composition, ψ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et :
 $\forall x \in \mathbb{R} \quad \psi'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
 $\forall x \in \mathbb{R} \quad |x| = \sqrt{x^2} < \sqrt{1+x^2}$

Donc :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad |\psi'(x)| < 1$$

Mais ψ n'a pas de point fixe :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \psi(x) > \sqrt{x^2} = |x| \geq x$$

4. (a) Les séries à valeurs dans un espace vectoriel normé, et en particulier leur convergence absolue, ne sont pas au programme.

Soit $k \in \llbracket 1; l \rrbracket$.

On note $v_{n,k}$ la k -ième composante du vecteur v_n .

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |v_{n+1,k} - v_{n,k}| \leq \|v_{n+1} - v_n\|$$

Donc par comparaison des séries à termes réels positifs, la série de terme général $|v_{n+1,k} - v_{n,k}|$ converge.

Donc la série à termes réels de terme général $v_{n+1,k} - v_{n,k}$ converge absolument.

Donc la série à termes réels de terme général $v_{n+1,k} - v_{n,k}$ converge.

Donc, par le lien suite-série, la suite $(v_{n,k})_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Comme c'est vrai pour tout k compris entre 1 et l , la suite de vecteurs $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

$$(b) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall N > n \quad v_N - v_n = \sum_{p=n}^{N-1} (v_{p+1} - v_p) \text{ (somme télescopique)}$$

Donc, par inégalité triangulaire :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall N > n \quad \|v_N - v_n\| \leq \sum_{p=n}^{N-1} \|v_{p+1} - v_p\|$$

On en déduit, par continuité de la norme, en faisant tendre N vers $+\infty$:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \|v^* - v_n\| = \|v_n - v^*\| \leq \sum_{p=n}^{+\infty} \|v_{p+1} - v_p\| \text{ (le reste d'indice } n-1 \text{ de la série de terme général } \|v_{n+1} - v_n\|)$$

5. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n)$: x_n est défini et appartient à F .

$\mathcal{P}(0)$ est vraie car on choisit $x_0 \in F$.

On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie.

ϕ va de F dans F donc x_{n+1} est défini et appartient à F .

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc bien définie et est à valeurs dans F .

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n)$: $\|x_{n+1} - x_n\| \leq k^n \|x_1 - x_0\|$

$\mathcal{P}(0)$ est vraie.

On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie.

$$\|x_{n+2} - x_{n+1}\| = \|\phi(x_{n+1}) - \phi(x_n)\| \leq k \|x_{n+1} - x_n\| \leq k^{n+1} \|x_1 - x_0\|$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \|x_{n+1} - x_n\| \leq k^n \|x_1 - x_0\|$$

$k \in [0; 1[$ donc la série géométrique de terme général $k^n \|x_1 - x_0\|$ converge.

Donc par comparaison des séries à termes positifs, la série de terme général $\|x_{n+1} - x_n\|$ converge.

D'après la question 4, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Soit x^* sa limite.

F est fermé et la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à valeurs dans F donc, par caractérisation séquentielle des fermés, x^* appartient à F .

- (b) On conserve les notations précédentes.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad x_{n+1} = \phi(x_n)$$

ϕ est lipschitzienne donc continue et en faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient :

$x^* = \phi(x^*) : x^*$ est un point fixe de ϕ .

Soit $y \in F$ tel que $\phi(y) = y$.

$$\|y - x^*\| = \|\phi(y) - \phi(x^*)\| \leq k \|x^* - y\|$$

Si $\|x^* - y\| > 0$ alors, après simplification, $1 \leq k$: c'est absurde.

Donc $\|x^* - y\| = 0$ ie $x^* = y$.

- (c) Le x^* que j'ai introduit en 5)a) en cohérence avec la 4)b) est le même que celui de la 5)c).

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n) : \|x_n - x^*\| \leq k^n \|x_0 - x^*\|$

$\mathcal{P}(0)$ est vraie.

On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie.

$$\|x_{n+1} - x^*\| = \|\phi(x_n) - \phi(x^*)\| \leq k \|x_n - x^*\| \leq k^{n+1} \|x_0 - x^*\|$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \|x_n - x^*\| \leq k^n \|x_0 - x^*\|$$

- (d) θ et ϕ commutent :

$$\phi \circ \theta = \theta^m \circ \theta = \theta^{m+1} = \theta \circ \theta^m = \theta \circ \phi$$

Donc :

$$\phi(\theta(x^*)) = \theta(\phi(x^*)) = \theta(x^*)$$

Donc $\theta(x^*)$ est un point fixe de ϕ .

Or x^* est le seul point fixe de ϕ donc $\theta(x^*) = x^*$ et x^* est un point fixe de θ .

Soit y un point fixe de θ .

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n) : \theta^n(y) = y$.

$\mathcal{P}(0)$ est vraie car $\theta^0 = id_F$.

On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie.

$$\theta^{n+1}(y) = \theta^n(\theta(y)) = \theta^n(y) = y$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \theta^n(y) = y$$

En particulier :

$$\phi(y) = \theta^m(y) = y.$$

Donc y est un point fixe de ϕ .

Or x^* est le seul point fixe de ϕ donc $y = x^*$.

6. g va de $[0; 1]$ dans $[0; 1]$ donc $g(0) \in [0; 1]$ et $g(0) \geq 0$.

Donc E est non vide.

E est majoré par 1 donc E possède une borne supérieure y qui appartient à $[0; 1]$.

y est le plus petit majorant de E , en particulier y est un majorant de E :

$$\forall x \in E \quad x \leq y$$

ce qui donne en contrapposant :

$$\forall x \in]y; 1]; x \notin E.$$

Supposons $y = 0$.

$$\forall x \in]0; 1] \quad x \notin E$$

Compte tenu de la définition de E :

$$\forall x \in]0; 1] \quad g(x) < x$$

Mais g est croissante donc :

$$\forall x \in]0; 1] \quad g(0) \leq g(x)$$

Donc :

$$\forall x \in]0; 1] \quad 0 \leq g(0) \leq x$$

En faisant tendre x vers 0, on obtient $g(0) = 0$, ou ce qui revient au même $g(y) = y$.

Supposons $y = 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$1 - \frac{1}{n} < 1 = \sup(E)$ le plus petit majorant de E donc $1 - \frac{1}{n}$ n'est pas un majorant de E

et il existe $x_n \in E$ tel que $x_n > 1 - \frac{1}{n}$

$x_n \in E$ donc $x_n \leq 1$ et $x_n \leq g(x_n)$

g est croissante donc :

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad g(x_n) \leq g(1)$.

Donc (x_n) converge vers 1 et :

$\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \leq g(1) \leq 1$.

En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient $g(1) = 1$, ou ce qui revient au même $g(y) = y$.

Supposons $y \in]0; 1[$.

$\forall x \in]y; 1]; x \notin E$.

Compte tenu de la définition de E :

$\forall x \in]y; 1] \quad g(x) < x$ (car $x \in [0; 1]$)

Mais g est croissante donc :

$\forall x \in]y; 1] \quad g(y) \leq g(x)$

Donc :

$\forall x \in]y; 1] \quad g(y) \leq x$

En faisant tendre x vers y , on obtient $g(y) \leq y$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$y - \frac{1}{n} < y = \sup(E)$ le plus petit majorant de E donc $y - \frac{1}{n}$ n'est pas un majorant de E

et il existe $x_n \in E$ tel que $x_n > y - \frac{1}{n}$

$x_n \in E$ donc $x_n \leq y$ et $x_n \leq g(x_n)$

g est croissante donc :

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad g(x_n) \leq g(y)$.

Donc (x_n) converge vers y et :

$\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \leq g(y)$.

En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient $y \leq g(y)$.

Finalement, $g(y) = y$ et g possède un point fixe.

Il n'y a pas forcément unicité : cf le cas de la fonction $g : x \mapsto x$

Deuxième partie. Matrices contractantes

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $\mathcal{P}(n) : T^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & a \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k \mu^{n-1-k} \\ 0 & \mu^n \end{pmatrix}$

$\mathcal{P}(1)$ est vraie car :

$$\sum_{k=0}^0 \lambda^k \mu^{0-k} = \lambda^0 \mu^0 = 1$$

On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie.

$$\begin{aligned}
 T^{n+1} &= T T^n = \begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda^n & a \sum_{k=0}^n \lambda^k \mu^{n-k} \\ 0 & \mu^n \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \lambda^{n+1} & a \left(\sum_{k=0}^{n-1} \lambda^{k+1} \mu^{n-1-k} + \mu^n \right) \\ 0 & \mu^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^{n+1} & a \left(\sum_{k=0}^{n-1} \lambda^{k+1} \mu^{n-1-k} + \mu^n \right) \\ 0 & \mu^{n+1} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \lambda^{n+1} & a \left(\sum_{l=1}^n \lambda^l \mu^{n-l} + \mu^n \right) \\ 0 & \mu^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^{n+1} & a \sum_{l=0}^{n+1-1} \lambda^l \mu^{n+1-1-l} \\ 0 & \mu^{n+1} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad T^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & a \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k \mu^{n-1-k} \\ 0 & \mu^n \end{pmatrix}$$

formule valable pour $n = 0$ avec la convention $\sum_{k=0}^{-1} \lambda^k \mu^{-1-k} = 0$

On peut également remarquer :

$$\begin{aligned}
 \text{— si } \lambda \neq \mu : \forall n \in \mathbb{N} \quad T^n &= \begin{pmatrix} \lambda^n & a \frac{\lambda^n - \mu^n}{\lambda - \mu} \\ 0 & \mu^n \end{pmatrix} \\
 \text{— si } \lambda = \mu : \forall n \in \mathbb{N} \quad T^n &= \begin{pmatrix} \lambda^n & na\lambda^{n-1} \\ 0 & \mu^n \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

2. (a) Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

χ_A est un polynôme à coefficients complexes, unitaire et de degré 2 donc χ_A a au moins une racine λ .

λ est une valeur propre de A .

Soit ϵ_1 un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ .

$\epsilon_1 \neq 0$ donc la famille (ϵ_1) est libre. D'après le théorème de la base incomplète, on peut la compléter en (ϵ_1, ϵ_2) base de $\mathbb{C}^2$.

La matrice de l'endomorphisme canoniquement associé à A dans cette base est $\begin{pmatrix} \lambda & ? \\ 0 & ? \end{pmatrix}$

qu'on peut noter $\begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$

Soit $P = (p_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 2}$ la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{C}^2$ à (ϵ_1, ϵ_2) .

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \mu \end{pmatrix} P^{-1}$$

On en déduit par une récurrence triviale :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad A^n = P \begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \mu \end{pmatrix}^n P^{-1} = P \begin{pmatrix} \lambda^n & a \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k \mu^{n-1-k} \\ 0 & \mu^n \end{pmatrix} P^{-1}$$

On note $P^{-1} = (q_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 2}$.

$$\forall (i,j) \in \llbracket 1; 2 \rrbracket^2 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (A^n)_{i,j} = \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 p_{i,k} (T^n)_{k,l} q_{l,j}$$

λ est une valeur propre de A donc $0 \leq |\lambda| \leq \rho(A) < \rho(A) + \epsilon$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |\lambda^n| = |\lambda|^n \leq (\rho(A) + \epsilon)^n$$

A est semblable à T donc $\chi_A = \chi_T = (X - \lambda)(X - \mu)$ et μ est, comme λ , une valeur propre de A .

Comme pour λ , on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |\mu^n| = |\mu|^n \leq (\rho(A) + \epsilon)^n$$

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \left| a \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k \mu^{n-1-k} \right| &\leq |a| \sum_{k=0}^{n-1} |\lambda^k \mu^{n-1-k}| = |a| \sum_{k=0}^{n-1} |\lambda|^k |\mu|^{n-1-k} \\ &\leq |a| \sum_{k=0}^{n-1} \rho(A)^k \rho(A)^{n-1-k} = n |a| \rho(A)^{n-1} \end{aligned}$$

Par croissance comparée :

$$\frac{n |a| \rho(A)^{n-1}}{(\rho(A) + \epsilon)^n} = \frac{|a|}{\rho(A) + \epsilon} n \left(\frac{\rho(A)}{\rho(A) + \epsilon} \right)^{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Donc la suite $\left(\frac{n |a| \rho(A)^{n-1}}{(\rho(A) + \epsilon)^n} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bornée :

$$\exists M_1 \in \mathbb{R}_+ \text{ tq } \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{n |a| \rho(A)^{n-1}}{(\rho(A) + \epsilon)^n} \leq M_1$$

Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad n |a| \rho(A)^{n-1} \leq M_1 (\rho(A) + \epsilon)^n$$

On note $M_2 = \max(1, M_1)$.

On a :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1; 2 \rrbracket^2 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |(T^n)_{i,j}| \leq M_2 (\rho(A) + \epsilon)^n$$

On en déduit :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1; 2 \rrbracket^2 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |(A^n)_{i,j}| \leq M_2 (\rho(A) + \epsilon)^n \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 |p_{i,k}| |q_{l,j}|$$

D'où le résultat avec :

$$\alpha = M_2 \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 |p_{i,k}| |q_{l,j}| = M_2 \left(\sum_{k=1}^2 |p_{i,k}| \right) \left(\sum_{l=1}^2 |q_{l,j}| \right)$$

(b) Soit $x \in \mathbb{C}^2$ et $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} |(A^n x)_1| &= |(A^n)_{1,1} x_1 + (A^n)_{1,2} x_2| \\ &\leq |(A^n)_{1,1}| |x_1| + |(A^n)_{1,2}| |x_2| \\ &\leq \alpha (\rho(A) + \epsilon)^n (|x_1| + |x_2|) \end{aligned}$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa structure euclidienne canonique donne :

$$|x_1| + |x_2| = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} |x_1| \\ |x_2| \end{pmatrix} \right) \leq \sqrt{1^2 + 1^2} \times \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2} = \sqrt{2} \|x\|$$

Donc :

$$|(A^n x)_1| \leq \alpha \sqrt{2} (\rho(A) + \epsilon)^n \|x\|$$

De même :

$$|(A^n x)_2| \leq \alpha \sqrt{2} (\rho(A) + \epsilon)^n \|x\|$$

Donc :

$$\|A^n x\|^2 = |(A^n x)_1|^2 + |(A^n x)_2|^2 \leq 4\alpha^2 (\rho(A) + \epsilon)^{2n} \|x\|^2 \text{ D'où le résultat avec } \beta = 2\alpha$$

3. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$.

D'après la question précédente :

$$\exists \beta \in \mathbb{R}_+^* \text{ tq } \forall n \in \mathbb{N} \quad \|A^n x\| \leq \beta \left(\rho(A) + \frac{\eta}{2} \right)^n \|x\|$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{\|A^n x\|}{(\rho(A) + \eta)^n} \leq \beta \|x\| \left(\frac{\rho(A) + \frac{\eta}{2}}{\rho(A) + \eta} \right)^n$$

$$\eta > 0 \text{ donc } \frac{\rho(A) + \frac{\eta}{2}}{\rho(A) + \eta} < 1 \text{ et la série géométrique } \sum_{n \geq 0} \beta \|x\| \left(\frac{\rho(A) + \frac{\eta}{2}}{\rho(A) + \eta} \right)^n \text{ converge.}$$

Par comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que la série $\sum_{n \geq 0} \frac{\|A^n x\|}{(\rho(A) + \eta)^n}$ converge.

- (b) On vient de montrer que N est bien définie comme application de $\mathbb{C}^2$ dans $\mathbb{R}$. Elle est clairement à valeurs positives.

$$\begin{aligned} \forall \lambda \in \mathbb{C} \quad \forall x \in \mathbb{C}^2 \quad N(\lambda x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (\rho(A) + \eta)^{-n} \|A^n(\lambda x)\| \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (\rho(A) + \eta)^{-n} \|\lambda A^n x\| \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (\rho(A) + \eta)^{-n} |\lambda| \|A^n x\| \\ &= |\lambda| \sum_{n=0}^{+\infty} (\rho(A) + \eta)^{-n} \|A^n x\| \\ &= |\lambda| N(x) \end{aligned}$$

Soit $x \in \mathbb{C}^2$ tel que $N(x) = 0$.

$N(x)$ est la somme d'une série à termes positifs donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (\rho(A) + \eta)^{-n} \|A^n x\| = 0$$

En prenant $n = 0$, on obtient : $\|x\| = 0$ ie $x = 0$

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \quad N(x + y) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (\rho(A) + \eta)^{-n} \|A^n(x + y)\| \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (\rho(A) + \eta)^{-n} \|A^n x + A^n y\| \\ &\leq \sum_{n=0}^{+\infty} (\rho(A) + \eta)^{-n} (\|A^n x\| + \|A^n y\|) \\ &\leq \sum_{n=0}^{+\infty} (\rho(A) + \eta)^{-n} \|A^n x\| + \sum_{n=0}^{+\infty} (\rho(A) + \eta)^{-n} \|A^n y\| \\ &\leq N(x) + N(y) \end{aligned}$$

Donc N est bien une norme sur $\mathbb{C}^2$.

$$\begin{aligned}
 \forall x \in \mathbb{C}^2 \quad N(Ax) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (\rho(A) + \eta)^{-n} \|A^n(Ax)\| \\
 &= \sum_{n=0}^{+\infty} (\rho(A) + \eta)^{-n} \|A^{n+1}x\| \\
 &= (\rho(A) + \eta) \sum_{n=0}^{+\infty} (\rho(A) + \eta)^{-n-1} \|A^{n+1}x\| \\
 &= (\rho(A) + \eta) \sum_{n=1}^{+\infty} (\rho(A) + \eta)^{-n} \|A^n x\| \\
 &\leq (\rho(A) + \eta) \sum_{n=0}^{+\infty} (\rho(A) + \eta)^{-n} \|A^n x\| \\
 &\leq (\rho(A) + \eta) N(x)
 \end{aligned}$$

(c) Soit $x \in \mathbb{C}^2$.

$N(x)$ est la somme d'une série à termes positifs dont le premier terme est $\|x\|$ donc $N(x) \geq \|x\|$.

D'après la question 2 :

$$\exists \beta > 0 \text{ tq } \forall x \in \mathbb{C}^2 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \|A^n x\| \leq \beta \left(\rho(A) + \frac{\eta}{2} \right)^n \|x\|$$

D'où :

$$\forall x \in \mathbb{C}^2 \quad N(x) \leq \|x\| \beta \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{\rho(A) + \frac{\eta}{2}}{\rho(A) + \eta} \right)^n$$

D'où l'existence de $C = \beta \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{\rho(A) + \frac{\eta}{2}}{\rho(A) + \eta} \right)^n$ qu'il n'est pas indispensable de calculer.

Néanmoins :

$$C = \frac{\beta}{1 - \frac{\rho(A) + \frac{\eta}{2}}{\rho(A) + \eta}} = \frac{2\beta(\rho(A) + \eta)}{\eta}$$

4. (a) B est diagonalisable donc il existe $P \in GL_l(\mathbb{C})$ et $D \in \mathcal{M}_l(\mathbb{C})$ diagonale telles que $B = PDP^{-1}$.

La liste des valeurs propres de B comptées avec leurs multiplicités se trouve sur la diagonale de D donc :

$$\rho(B) = \max_{k \in \llbracket 1; l \rrbracket} (|d_{k,k}|).$$

Pour tout $x \in \mathbb{C}^l$, on pose $\|x\|_B = \|P^{-1}x\| \in \mathbb{R}_+$.

$$\forall \lambda \in \mathbb{C} \quad \forall x \in \mathbb{C}^l \quad \|\lambda x\|_B = \|P^{-1}(\lambda x)\| = \|\lambda P^{-1}x\| = |\lambda| \|P^{-1}x\| = |\lambda| \|x\|_B$$

Soit $x \in \mathbb{C}^l$ tq $\|x\|_B = 0$.

$$\|P^{-1}x\| = 0 \text{ donc } P^{-1}x = 0.$$

En multipliant par P à gauche, on obtient $x = 0$.

$$\forall (x, y) \in \mathbb{C}^l \times \mathbb{C}^l \quad \|x + y\|_B = \|P(x + y)\| = \|Px + Py\| \leq \|Px\| + \|Py\| = \|x\|_B + \|y\|_B$$

Donc $\|\cdot\|_B$ est bien une norme sur $\mathbb{C}^2$.

Soit $x \in \mathbb{C}^l$.

On note $y = P^{-1}x = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_l \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
 \|Bx\|_B &= \|P^{-1}Bx\| = \|DP^{-1}X\| = \|Dy\| \\
 &= \sqrt{\sum_{k=1}^n |d_{k,k}y_k|^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^n |d_{k,k}|^2 |y_k|^2} \\
 &\leq \sqrt{\sum_{k=1}^n \rho(B)^2 |y_k|^2} = \sqrt{\rho(B)^2 \sum_{k=1}^n |y_k|^2} \\
 &\leq \rho(B) \sqrt{\sum_{k=1}^n |y_k|^2} = \rho(B) \|P^{-1}x\| \\
 &\leq \rho(B) \|x\|_B
 \end{aligned}$$

(b) Soit $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

D'après la première question de cette partie :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad C^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de la matrice triangulaire C se lisent sur sa diagonale donc $\rho(C) = 1$.

On raisonne ensuite par l'absurde :

On suppose qu'il existe une norme N sur $\mathbb{C}^2$ telle que :

$$\forall y \in \mathbb{C}^2 \quad N(Cy) \leq \rho(C)N(y) = N(y)$$

Par une récurrence triviale :

$$\forall y \in \mathbb{C}^2 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad N(C^n y) \leq N(y)$$

En prenant $y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad N \left(\begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} \right) \leq N \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

D'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad nN \left(\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{n} \end{pmatrix} \right) \leq N \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Par continuité de la norme :

$$N \left(\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{n} \end{pmatrix} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} N \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) > 0$$

Donc :

$$nN \left(\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{n} \end{pmatrix} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

et on aboutit à une contradiction.

Donc pour toute norme N sur $\mathbb{C}^2$, il existe $y \in \mathbb{C}^2$ tel que $N(y) > \rho(C)y$.

5. ϕ étant définie sur $\mathbb{R}^2$, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne pose aucun problème de définition.

Soit $\eta > 0$ à débattre.

Soit N la norme de la question 3.

Il existe $C > 0$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{C}^2 \quad \|x\| \leq N(x) \leq C \|x\|$$

$$\begin{aligned}
 \forall x \in \mathbb{R}^2 \quad N(\phi(x) - x^* - A(x - x^*)) &\leq C \|x - x^* - A(x - x^*)\| \leq CM \|x - x^*\|^2 \\
 &\leq CMN (x - x^*)^2
 \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}^2 \quad N(\phi(x) - x^*) &\leq N(x - x^* - A(x - x^*)) + N(A(x - x^*)) \\ &\leq CMN(x - x^*)^2 + (\rho(A) + \eta)N(x - x^*) \\ &\leq (\rho(A) + \eta + CMN(x - x^*))N(x - x^*)\end{aligned}$$

On pose $\eta = \frac{1 - \rho(A)}{3} > 0$, $\epsilon = \frac{\eta}{C^2 M} > 0$ et $k = \rho(A) + 2\eta = \frac{2 + \rho(A)}{3} < 1$.

Soit $x_0 \in \mathbb{R}^2$ tel que $\|x_0 - x^*\| < \epsilon$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n) : N(x_n - x^*) \leq k^n N(x_0 - x^*)$.

$k^0 = 1$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie. On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie.

$$\begin{aligned}N(x_{n+1} - x^*) &= N(\phi(x_n) - x^*) \\ &\leq (\rho(A) + \eta + CMN(x_n - x^*))N(x_n - x^*) \\ &\leq (\rho(A) + \eta + CMk^n N(x_0 - x^*))k^n N(x_0 - x^*) \\ &\leq (\rho(A) + \eta + CMN(x_0 - x^*))k^n N(x_0 - x^*) \text{ car } k \leq 1 \\ &\leq (\rho(A) + \eta + C^2 M \|x_0 - x^*\|)k^n N(x_0 - x^*) \\ &\leq (\rho(A) + \eta + C^2 M \epsilon)k^n N(x_0 - x^*) \\ &\leq k k^n N(x_0 - x^*) = k^{n+1} N(x_0 - x^*)\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

On a donc prouvé :

$\forall n \in \mathbb{N} \quad N(x_n - x^*) \leq k^n N(x_0 - x^*)$

Comme $k < 1$, on en déduit que $x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} x^*$.

Troisième partie : fonctions de deux variables réelles

1. (a) Soit $\phi \begin{cases} [a; b] \rightarrow \mathbb{R} \\ s_1 \mapsto h(s_1, d) \end{cases}$.

h est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U donc par composition, ϕ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a; b]$.

D'après le théorème fondamental de l'analyse :

$$\begin{aligned}h(b, d) - h(a, d) &= \phi(b) - \phi(a) = \int_a^b \phi'(s_1) ds_1 \\ &= \int_a^b \frac{\partial h}{\partial s_1}(s_1, d) ds_1\end{aligned}$$

De même : $h(b, c) - h(a, c) = \int_a^b \frac{\partial h}{\partial s_1}(s_1, c) ds_1$

En faisant la différence :

$$h(b, d) - h(a, d) - h(b, c) + h(a, c) = \int_a^b \left(\frac{\partial h}{\partial s_1}(s_1, d) - \frac{\partial h}{\partial s_1}(s_1, c) \right) ds_1$$

On définit donc $\hat{h} \begin{cases} [a; b] \rightarrow \mathbb{R} \\ s_1 \mapsto \frac{\partial h}{\partial s_1}(s_1, d) - \frac{\partial h}{\partial s_1}(s_1, c) \end{cases}$ et on a :

$$h(b, d) - h(a, d) - h(b, c) + h(a, c) = \int_a^b \hat{h}(s_1) ds_1$$

Fixons $s_1 \in [a; b]$.

Soit $\psi \begin{cases} [c; d] \rightarrow \mathbb{R} \\ s_2 \mapsto \frac{\partial h}{\partial s_1}(s_1, s_2) \end{cases}$

h est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U donc ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[c; d]$.

D'après le théorème fondamental de l'analyse :

$$\begin{aligned}\widehat{h}(s_1) &= \frac{\partial h}{\partial s_1}(s_1, d) - \frac{\partial h}{\partial s_1}(s_1, c) = \psi(d) - \psi(c) \\ &= \int_c^d \psi'(s_2) ds_2 = \int_c^d \frac{\partial^2 h}{\partial s_2 \partial s_1}(s_1, s_2) ds_2 \\ &= \int_c^d \frac{\partial^2 h}{\partial s_1 \partial s_2}(s_1, s_2) ds_2 \text{ par le théorème de Schwarz avec } h \in \mathcal{C}^2\end{aligned}$$

Donc :

$$\forall s_1 \in [a; b] \quad \widehat{h}(s_1) = \int_c^d \frac{\partial^2 h}{\partial s_1 \partial s_2}(s_1, s_2) ds_2$$

- (b) h est de classe $\mathcal{C}^2$ donc $\widehat{h}$ est continue. L'image du segment $[a; b]$ par $\widehat{h}$ est un segment $[m; M]$.

$$\forall x \in [a; b] \quad m \leq \widehat{h}(x) \leq M$$

On intègre entre a et b :

$$m(b-a) \leq \int_a^b \widehat{h}(x) dx \leq M(b-a)$$

On en déduit :

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b \widehat{h}(x) dx \leq M$$

$$\text{Donc } \frac{1}{b-a} \int_a^b \widehat{h}(x) dx \in \widehat{h}([a; b]) \text{ et :}$$

$$\exists \overline{s_1} \in [a; b] \text{ tq } \frac{1}{b-a} \int_a^b \widehat{h}(x) dx = \widehat{h}(\overline{s_1})$$

On a donc :

$$\frac{1}{b-a} (h(b, d) - h(a, d) - h(b, c) + h(a, c)) = \widehat{h}(\overline{s_1})$$

$$\text{Mais } \widehat{h}(\overline{s_1}) = \int_c^d \frac{\partial^2 h}{\partial s_1 \partial s_2}(\overline{s_1}, s_2) ds_2$$

Le même raisonnement que ci-dessus montre :

$$\exists \overline{s_2} \in [c; d] \text{ tq } \frac{1}{d-c} \int_c^d \frac{\partial^2 h}{\partial s_1 \partial s_2}(\overline{s_1}, s_2) ds_2 = \frac{\partial^2 h}{\partial s_1 \partial s_2}(\overline{s_1}, \overline{s_2})$$

Et on a alors :

$$h(b, d) - h(a, d) - h(b, c) + h(a, c) = (b-a)(d-c) \frac{\partial^2 h}{\partial s_1 \partial s_2}(\overline{s_1}, \overline{s_2})$$

2. $\forall x \in I \quad f'(x) > 0$

Donc f est strictement croissante sur I .

De plus f est continue donc, d'après le théorème de la bijection, f réalise une bijection de I sur $f(I)$, $f(I)$ étant bien un intervalle ouvert.

D'après le cours :

$$\forall x \in I \quad g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

On dérive cette relation :

$$\forall x \in I \quad f'(x)g''(f(x)) = -\frac{f''(x)}{f'(x)^2}$$

On en déduit :

$$\forall x \in I \quad g''(f(x)) = -\frac{f''(x)}{f'(x)^3}$$

3. (a) Soient x et $y \in I$ tq $x \neq y$.

$$\begin{aligned}
 H_f(x, y) &= \frac{xf(y) - yf(x)}{f(y) - f(x)} = \frac{x(f(y) - f(x)) + (x - y)f(x)}{f(y) - f(x)} \\
 &= x - f(x) \frac{y - x}{f(y) - f(x)} = x - f(x) \frac{g(f(y)) - g(f(x))}{f(y) - f(x)} \\
 &= x - f(x) \frac{1}{f(y) - f(x)} \int_{f(x)}^{f(y)} g'(t) dt \\
 &= x - f(x) \frac{1}{f(y) - f(x)} \int_0^1 g'((1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y)) (f(y) - f(x)) d\lambda \\
 &= x - f(x) \int_0^1 g'((1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y)) d\lambda
 \end{aligned}$$

(b) Soit $G_f \begin{cases} I \times I \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto x - f(x) \int_0^1 g'((1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y)) d\lambda \end{cases}$.

On va montrer que G_f est continue sur $I \times I$.

Il s'agit d'utiliser le théorème de continuité sous le signe $\int$ mais il n'est au programme que pour les fonctions d'une seule variable.

Il y a deux possibilités : étendre le théorème du programme aux fonctions de plusieurs variables ou revenir au théorème de convergence dominée et à la caractérisation séquentielle de la continuité.

C'est cette méthode que je vais employer.

Soit $(x, y) \in I \times I$.

I étant un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, il existe $r > 0$ tel que $K = [x - r; x + r] \times [y - r; y + r] \subset I \times I$

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $[x - r; x + r]$ qui converge vers x .

Soit $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $[y - r; y + r]$ qui converge vers y .

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $g_n \begin{cases} [0; 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ \lambda \mapsto g'((1 - \lambda)f(x_n) + \lambda f(y_n)) \end{cases}$.

— Pour tout $n \in \mathbb{N}$, g_n est continue sur $[0; 1]$.

— La suite de fonctions $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0; 1]$ vers la fonction $L : \lambda \mapsto g'((1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y))$

— L est continue sur $[0; 1]$.

— L'hypothèse de domination est vérifiée :

La fonction $(X, Y, \lambda) \mapsto g'((1 - \lambda)f(X) + \lambda f(Y))$ est continue (comme fonction de trois variables) sur $K \times [0; 1]$ partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^3$ donc :

$\exists M \in \mathbb{R}_+$ tq $\forall (X, Y, \lambda) \in K \times [0; 1] \quad |g'((1 - \lambda)f(X) + \lambda f(Y))| \leq M$

On a alors :

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall \lambda \in [0; 1] \quad |g_n(\lambda)| \leq M$

avec $\lambda \mapsto M$ continue, positive et intégrable sur $[0; 1]$.

D'après le théorème de convergence dominée :

$$G_f(x_n, y_n) = x - f(x) \int_0^1 g_n(\lambda) d\lambda \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x - f(x) \int_0^1 g'((1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y)) d\lambda = G_f(x, y)$$

Par caractérisation séquentielle de la continuité, G_f est continue en (x, y) .

G_f est donc continue sur $I \times I$.

D'après la question précédente, G_f prolonge H_f à $I \times I$.

Soit P_f un autre prolongement par continuité de H_f à $I \times I$.

Soit $(x, y) \in I \times I$.

Si $x \neq y$ alors $P_f(x, y) = H_f(x, y) = G_f(x, y)$.

Si $x = y$ alors $P_f(x, y) = P_f(x, x) = \lim_{y \rightarrow x^+} P_f(x, y) = \lim_{y \rightarrow x^+} H_f(x, y) = G_f(x, x) = G_f(x, y)$

Donc :

$\forall (x, y) \in I \times I \quad P_f(x, y) = G_f(x, y)$

Donc $P_f = G_f$ et il y a unicité du prolongement.

(c) Il s'agit de montrer que $A_f \begin{cases} I \times I \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto \int_0^1 g'((1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)) d\lambda \end{cases}$ est de classe $\mathcal{C}^2$.

On va commencer par prouver qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$.

Pour cela, il faut montrer que ses deux dérivées partielles existent et sont continues.

On va se contenter de montrer que $\frac{\partial A_f}{\partial x}$ est définie et continue sur $I \times I$.

— **Définition**

Soit $(x, y) \in I \times I$.

Il s'agit de montrer que la fonction $z \mapsto A_f(z, y)$ est dérivable en x .

Pour cela le théorème de dérivation sous le signe $\int$ du programme suffit.

Il existe $r > 0$ tel que $[x - r; x + r] \subset I$.

Soit $a \begin{cases} [x - r; x + r] \times [0; 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ (z, \lambda) \mapsto g'((1-\lambda)f(z) + \lambda f(y)) \end{cases}$.

— a est $\mathcal{C}^1$ par rapport à z et :

$$\forall (z, \lambda) \in [x - r; x + r] \times [0; 1] \quad \frac{\partial a}{\partial z}(z, \lambda) = (1-\lambda)f'(z)g''((1-\lambda)f(z) + \lambda f(y))$$

— Pour tout $z \in [x - r; x + r]$, la fonction $a(z, \cdot)$ est continue et intégrable sur $[0; 1]$.

— Pour tout $z \in [x - r; x + r]$, la fonction $\frac{\partial a}{\partial z}(z, \cdot)$ est continue sur $[0; 1]$.

— L'hypothèse de domination est vérifiée :

La fonction $(z, \lambda) \mapsto \frac{\partial a}{\partial z}(z, \lambda) = (1-\lambda)f'(z)g''((1-\lambda)f(z) + \lambda f(y))$ est continue (comme fonction de deux variables) sur $[x - r; x + r] \times [0; 1]$ partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^2$ donc :

$$\exists M \in \mathbb{R}_+ \text{ tq } \forall (z, \lambda) \in [x - r; x + r] \times [0; 1] \quad \left| \frac{\partial a}{\partial z}(z, \lambda) \right| \leq M$$

avec $\lambda \mapsto M$ continue, positive et intégrable sur $[0; 1]$.

Donc la fonction $z \mapsto A_f(z, y)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[x - r; x + r]$ avec :

$$\forall z \in [x - r; x + r] \quad \frac{d}{dz} (A_f(z, y)) = \int_0^1 \frac{\partial a}{\partial z}(z, \lambda) d\lambda$$

En particulier, la dérivée partielle $\frac{\partial A_f}{\partial x}(x, y)$ existe et :

$$\frac{\partial A_f}{\partial x}(x, y) = \int_0^1 (1-\lambda)f'(x)g''((1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)) d\lambda$$

On a donc montré que la fonction $\frac{\partial A_f}{\partial x}$ est défini sur I avec :

$$\forall (x, y) \in I \times I \quad \frac{\partial A_f}{\partial x}(x, y) = f'(x) \int_0^1 (1-\lambda)f g''((1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)) d\lambda$$

— **Continuité**

Il suffit d'adapter le raisonnement de la question précédente.

A ce stade, on a donc prouvé que A_f est de classe $\mathcal{C}^1$ avec :

$$\begin{aligned}\forall (x, y) \in I \times I \quad \frac{\partial A_f}{\partial x}(x, y) &= f'(x) \int_0^1 (1 - \lambda) g''((1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y)) d\lambda \\ \frac{\partial A_f}{\partial y}(x, y) &= f'(y) \int_0^1 \lambda g''((1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y)) d\lambda\end{aligned}$$

Et il n'y a plus qu'à refaire le même raisonnement. A chaque fois, on domine localement par une constante obtenue par majoration d'une fonction continue sur une partie fermée et bornée.

(d)

$$\begin{aligned}H(x, x) &= x - f(x) \int_0^1 g'((1 - \lambda)f(x) + \lambda f(x)) d\lambda \\ H(x, x) &= x - f(x) \int_0^1 g'(f(x)) dx = x - f(x) \int_0^1 \frac{1}{f'(x)} dx \\ &= x - \frac{f(x)}{f'(x)}\end{aligned}$$

4. (a) $x^* = g(0)$ donc $f(x^*) = 0$.

On en déduit $H_f(x^*, x^*) = x^* - \frac{f(x^*)}{f'(x^*)} = x^*$

Si $y \neq x^*$, $H_f(x^*, y) = \frac{x^* f(y) - y f(x^*)}{f(y) - f(x^*)} = \frac{x^* f(y)}{f(y)} = x^*$.

Si $y = x^*$, $H_f(x^*, y) = H_f(x^*, x^*) = x^*$.

Si $x \neq x^*$, $H_f(x, x^*) = \frac{x f(x^*) - x^* f(x)}{f(x^*) - f(x)} = \frac{-x^* f(x)}{-f(x)} = x^*$.

Si $x = x^*$, $H_f(x, x^*) = H_f(x^*, x^*) = x^*$.

Donc :

$$\begin{aligned}H_f(x, y) - x^* &= H_f(x, y) - H_f(x^*, y) - H_f(x, x^*) + H_f(x^*, x^*) \\ &= H_f(b, d) - H_f(a, d) - H_f(b, c) + H_f(a, c)\end{aligned}$$

avec $a = c = x^*$, $b = x$ et $d = y$

D'après la première question de cette partie :

$$\exists (\bar{x}, \bar{y}) \in I_x \times I_y \text{ tq } H_f(x, y) - x^* = (x - x^*)(y - x^*) \frac{\partial^2 H_f}{\partial x \partial y}(\bar{x}, \bar{y})$$

(b) $H_f(x^* - h, x^* + h) - x^* = -h^2 \frac{\partial^2 H_f}{\partial x \partial y}(\bar{x}, \bar{y})$ avec $x^* - h \leq \bar{x} \leq x^*$ et $x^* \leq \bar{y} \leq x^* + h$

donc :

$$\frac{\partial^2 H_f}{\partial x \partial y}(x^*, x^*) = - \lim_{h \rightarrow 0^+} \left(\frac{H_f(x^* - h, x^* + h) - x^*}{h^2} \right)$$

$$\begin{aligned}& (x^* - h)f(x^* + h) - (x^* + h)f(x^* - h) \\ &= (x^* - h) \left(f(x^*) + f'(x^*)h + \frac{f''(x^*)}{2}h^2 + \frac{f^{(3)}(x^*)}{6}h^3 + o(h^3) \right) \\ & \quad - (x^* + h) \left(f(x^*) - f'(x^*)h + \frac{f''(x^*)}{2}h^2 - \frac{f^{(3)}(x^*)}{6}h^3 + o(h^3) \right) \\ &= x^* \left(2f'(x^*)h + \frac{f^{(3)}(x^*)}{3}h^3 \right) - f''(x^*)h^3 + o(h^3)\end{aligned}$$

$$f(x^* + h) - f(x^* - h) = 2hf'(x^*) + \frac{f^{(3)}(x^*)}{3}h^3 + o(h^3)$$

$$\begin{aligned} & H_f(x^* - h, x^* + h) - x^* \\ &= \frac{1}{f(x^* + h) - f(x^* - h)} ((x^* - h)f(x^* + h) - (x^* + h)f(x^* - h) - x^*(f(x^* + h) - f(x^* - h))) \\ &= \frac{1}{f(x^* + h) - f(x^* - h)} (-f''(x^*)h^3 + o(h^3)) \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\frac{\partial^2 H_f}{\partial x \partial y}(x^*, x^*) = \frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)}$$

Autre méthode possible :

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in I \times I \quad H_f(x, y) &= x - f(x) \int_0^1 g'((1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y)) d\lambda \\ \frac{\partial H_f}{\partial y}(x, y) &= -f(x)f'(y) \int_0^1 \lambda g''((1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y)) d\lambda \end{aligned}$$

en utilisant 3.c.

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in I \times I \quad & \frac{\partial^2 H_f}{\partial x \partial y}(x, y) \\ &= -f'(x)f'(y) \int_0^1 \lambda g''((1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y)) d\lambda \\ &\quad - f(x)f(y)f'(x) \int_0^1 \lambda(1 - \lambda)g^{(3)}((1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y)) d\lambda \end{aligned}$$

En particulier, puisque $f(x^*) = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 H_f}{\partial x \partial y}(x^*, x^*) &= -f'(x^*)f'(x^*) \int_0^1 \lambda g''(0) d\lambda \\ &= -\frac{1}{2}f'(x^*)^2 \frac{f''(x^*)}{f'(x^*)^3} \\ &= \frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)} \end{aligned}$$

Quatrième partie : méthode de la sécante

1. Supposons dans un premier temps $x_n \neq x_{n-1}$.

$$L_n \text{ a pour équation } y = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}(x - x_{n-1}) + f(x_{n-1})$$

En faisant $y = 0$, on obtient :

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_{n-1} - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_{n-1}) \\ &= \frac{x_{n-1}f(x_n) - x_nf(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \\ &= H_f(x_{n-1}, x_n) \end{aligned}$$

Si on suppose que $x_n = x_{n_1}$ alors L_n a pour équation $y = f'(x_n)(x - x_n) + f(x_n)$.

Si on fait $y = 0$, on obtient :

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ &= H_f(x_{n-1}, x_n) \end{aligned}$$

d'après la question 3d de la troisième partie.

2. (a) Pour $x \neq \beta$:

$$\begin{aligned}
 |h(x)| < 1 &\iff h(x)^2 = \frac{(x - \alpha)^2}{(x - \beta)^2} < 1 \\
 &\iff (x - \alpha)^2 < (x - \beta)^2 \\
 &\iff (x - \beta)^2 - (x - \alpha)^2 > 0 \\
 &\iff (2x - \alpha - \beta)(\alpha - \beta) > 0 \\
 &\iff 2x - \alpha - \beta > 0 \text{ car } \alpha > \beta \\
 &\iff x > \frac{\alpha + \beta}{2}
 \end{aligned}$$

De plus $|h(\beta)| > 1$ et $\beta < \frac{\alpha + \beta}{2}$ donc pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$|h(x)| < 1 \iff x \in I$$

(b) Si $x_{n-1} \neq x_n$:

$$\begin{aligned}
 x_{n+1} &= \frac{x_{n-1}f(x_n) - x_nf(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \\
 &= \frac{x_{n-1}(x_n^2 - (\alpha + \beta)x_n + \alpha\beta) - x_n(x_{n-1}^2 - (\alpha + \beta)x_{n-1} + \alpha\beta)}{x_n^2 - (\alpha + \beta)x_n + \alpha\beta - (x_{n-1}^2 - (\alpha + \beta)x_{n-1} + \alpha\beta)} \\
 &= \frac{x_{n-1}x_n(x_n - x_{n-1}) - \alpha\beta(x_n - x_{n-1})}{(x_n + x_{n-1})(x_n - x_{n-1}) - (\alpha + \beta)(x_n - x_{n-1})} \\
 &= \frac{x_{n-1}x_n - \alpha\beta}{x_{n-1} + x_n - (\alpha + \beta)}
 \end{aligned}$$

Si $x_{n-1} = x_n$:

$$\begin{aligned}
 x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\
 &= x_n - \frac{(x_n - \alpha)(x_n - \beta)}{2x_n - (\alpha + \beta)} \\
 &= \frac{2x_n^2 - (\alpha + \beta)x_n - x_n^2 + (\alpha + \beta)x_n - \alpha\beta}{2x_n - (\alpha + \beta)} \\
 &= \frac{x_n^2 - \alpha\beta}{2x_n - (\alpha + \beta)} \\
 &= \frac{x_{n-1}x_n - \alpha\beta}{x_{n-1} + x_n - (\alpha + \beta)}
 \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
 u_{n+1} &= h(x_{n+1}) = \frac{x_{n+1} - \alpha}{x_{n+1} - \beta} \\
 &= \frac{x_{n-1}x_n - \alpha\beta - \alpha(x_{n-1} + x_n - (\alpha + \beta))}{x_{n-1}x_n - \alpha\beta - \beta(x_{n-1} + x_n - (\alpha + \beta))} \\
 &= \frac{x_{n-1}x_n - \alpha x_{n-1} - \alpha x_n + \alpha^2}{x_{n-1}x_n - \beta x_{n-1} - \beta x_n + \beta^2} \\
 &= \frac{(x_{n-1} - \alpha)(x_n - \alpha)}{(x_{n-1} - \beta)(x_n - \beta)} \\
 &= u_{n-1}u_n
 \end{aligned}$$

Passons à la définition de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

$$\forall x \in I \quad f'(x) = 2x - \alpha - \beta > 0$$

Il suffit donc de montrer que si x_{n-1} et x_n appartiennent à I alors x_{n+1} (qui est bien défini cf la première question) alors $x_{n+1} \in I$.

Si x_{n-1} et x_n appartiennent à I alors $|h(x_{n-1})| < 1$ et $|h(x_n)| < 1$ donc :

$$|h(x_{n+1})| = |h(x_{n-1})| \times |h(x_n)| < 1$$

et $x_{n+1} \in I$

(c) On a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \in I$$

Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |h(x_n)| < 1$$

Donc :

$$\forall n \geq 1 \quad |h(x_{n+1})| = |h(x_{n-1})| \times |h(x_n)| \leq |h(x_n)|$$

La suite $(|h(x_n)|)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est donc décroissante.

On en déduit :

$$\forall n \geq 1 \quad |h(x_n)| \leq |h(x_1)|$$

Donc :

$$\forall n \geq 2 \quad |h(x_{n+1})| = |h(x_{n-1})| \times |h(x_n)| \leq |h(x_1)| |h(x_n)|$$

Puis par une récurrence triviale :

$$\forall n \geq 2 \quad |h(x_n)| \leq |h(x_1)|^{n-2} |h(x_2)|$$

$$|h(x_1)| < 1 \text{ donc } h(x_n) = \frac{x_n - \alpha}{x_n - \beta} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Mais :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (x_n - \beta)h(x_n) = x_n - \alpha$$

Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n(h(x_n) - 1) = \beta h(x_n) - \alpha$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad h(x_n) \neq 1 : x_n \in I \text{ donc } |h(x_n)| < 1$$

Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n = \frac{\beta h(x_n) - \alpha}{h(x_n) - 1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \alpha$$

(d) Si $x_0 \neq \alpha$ alors $0 < |h(x_0)| < 1$ donc on peut poser $s_0 = \ln(|h(x_0)|) < 0$.

On a $|h(x_0)| \leq e^{s_0}$, inégalité qui est vraie si $x_0 = \alpha$ avec, par exemple, $s_0 = -1$.

Si $x_1 \neq \alpha$ alors $0 < |h(x_1)| < 1$ donc on peut poser $s_1 = \frac{\ln(|h(x_1)|)}{\phi} < 0$.

On a $|h(x_1)| \leq e^{s_1 \phi}$, inégalité qui est vraie si $x_1 = \alpha$ avec, par exemple, $s_1 = -1$.

Par croissance de l'exponentielle, si on pose $s = \max(s_0, s_1) < 0$ alors :

$$|h(x_0)| \leq e^s = e^{s\phi^0} \text{ et } |h(x_1)| \leq e^{s\phi^1}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $\mathcal{P}(n) : \forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket \quad |h(x_k)| \leq e^{s\phi^k}$

$\mathcal{P}(1)$ est vraie.

On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie.

$$|h(x_{n+1})| \leq |h(x_{n-1})| |h(x_n)| \leq e^{s(\phi^{n-1} + \phi^n)} = e^{s\phi^{n-1}(\phi+1)} = e^{s\phi^{n+1}}$$

$$\text{car } \phi^2 = \phi + 1$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie et on a prouvé :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |h(x_n)| \leq e^{s\phi^n}$$

On en déduit $h(x_n) = O(e^{s\phi^n})$

$$\text{Mais } x_n - \alpha = \frac{\beta h(x_n) - \alpha}{h(x_n) - 1} - \alpha = \frac{(\beta - \alpha)h(x_n)}{h(x_n) - 1} \sim (\beta - \alpha)h(x_n)$$

$$\text{Donc } x_n - \alpha = O(e^{s\phi^n})$$

3. (a) Soit $\eta = \frac{f'(x^*)}{2} > 0$

Par continuité de la fonction f' , il existe $\epsilon > 0$ tq $[x^* - \epsilon; x^* + \epsilon] \subset I$ et :

$$\forall x \in [x^* - \epsilon; x^* + \epsilon] \quad |f'(x) - f'(x^*)| \leq \eta$$

Donc :

$$\forall x \in [x^* - \epsilon; x^* + \epsilon] \quad f'(x) \geq f'(x^*) - \eta = \frac{f'(x^*)}{2} > 0$$

- (b) $x_{n+1} - x^* = H_f(x_{n-1}, x_n) - x^* = (x_{n-1} - x^*)(x_{n+1} - x^*) \frac{\partial^2 H_f}{\partial x \partial y}(x, y)$ avec x compris entre x_{n-1} et x^* et y compris entre x_n et x^* .

x et y sont donc compris entre $x^* - \epsilon$ et $x^* + \epsilon$ et :

$$|x_{n+1} - x^*| = |x_{n-1} - x^*| |x_n - x^*| \left| \frac{\partial^2 H_f}{\partial x \partial y}(x, y) \right| \leq M |x_{n-1} - x^*| |x_n - x^*|$$

- (c) Il n'y a plus qu'à reprendre la question 2.

Au départ x_0 et x_1 appartiennent à $[x^* - \epsilon'; x^* + \epsilon']$.

Sur cet intervalle f' est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ ($[x^* - \epsilon'; x^* + \epsilon'] \subset [x^* - \epsilon; x^* + \epsilon]$), ce qui permet de calculer x_2 .

$$|x_2 - x^*| \leq M |x_1 - x^*| |x_0 - x^*| \leq M\epsilon' \times \epsilon' < \epsilon'$$

Donc $x_2 \in [x^* - \epsilon'; x^* + \epsilon']$ et on peut itérer la construction.

La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc bien définie et est à valeurs dans $[x^* - \epsilon'; x^* + \epsilon']$.

$$\forall n \geq 1 \quad |x_{n+1} - x^*| \leq M |x_{n-1} - x^*| |x_n - x^*| \leq M\epsilon' |x_n - x^*|$$

Donc :

$$\forall n \geq 1 \quad |x_n - x^*| \leq (M\epsilon')^{n-1} |x_1 - x^*|$$

Comme $M\epsilon' < 1$, on en déduit :

$$x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} x^*$$