

CCP PC 2025

Exercice 1

Q1 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, le produit matriciel AM est bien défini et $AM \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

$$\begin{aligned} \forall (M_1, M_2) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2 \quad \forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2 \quad \varphi_A(\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2) &= A(\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2) \\ &= \lambda_1 AM_1 + \lambda_2 AM_2 \\ &= \lambda_1 \varphi_A(M_1) + \lambda_2 \varphi_A(M_2) \end{aligned}$$

Donc φ_A est linéaire.

φ_A est linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ donc φ_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Q2 Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$.

$$\begin{aligned} \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \quad (\varphi_A \circ \varphi_B)(M) &= \varphi_A(\varphi_B(M)) = \varphi_A(BM) = A(BM) \\ &= (AB)M \text{ par associativité du produit matriciel} \\ &= \varphi_{AB}(M) \end{aligned}$$

Donc $\varphi_A \circ \varphi_B = \varphi_{AB}$.

Q3 • On suppose que φ_A est un isomorphisme.

φ_A est bijective donc I_n a un antécédent, noté B .

$AB = \varphi_A(B) = I_n$ donc A est inversible et $A^{-1} = B$.

• On suppose A inversible.

D'après la question précédente, $\varphi_A \circ \varphi_{A^{-1}} = \varphi_{AA^{-1}} = \varphi_{I_n}$ et

$$\varphi_{A^{-1}} \circ \varphi_A = \varphi_{A^{-1} \circ A} = \varphi_{A^{-1} \circ A} = \varphi_{I_n}.$$

Mais :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \quad \varphi_{I_n}(M) = I_n M = M$$

ie $\varphi_{I_n} = Id_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$

Donc :

$$\varphi_A \circ \varphi_{A^{-1}} = \varphi_{A^{-1}} \circ \varphi_A = Id_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$$

et φ_A est un isomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ d'inverse $\varphi_{A^{-1}}$

Q4 $\forall \lambda \in \mathbb{C} \quad \chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_2 - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ 0 & \lambda - a \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - a)$

• **Premier cas :** $a \neq 1$

$\chi_A = (X - 1)(X - a)$ est scindé à racines simples donc A est diagonalisable.

• **Deuxième cas :** $a = 1$

$\chi_A = (X - 1)^2$ donc 1 est valeur propre double de A .

$A - I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est de rang 1 donc son noyau, qui est le sous-espace propre de A associé à la valeur propre 1, est de dimension 1.

La dimension de $E_1(A)$ est différente de la multiplicité de 1 comme valeur propre de A donc A n'est pas diagonalisable.

La CNS cherchée est donc $a \neq 1$.

$$\begin{aligned} \text{Q5 } \varphi_A(E_{1,1}) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = E_{1,1} \\ \varphi_A(E_{1,2}) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = E_{1,2} \\ \varphi_A(E_{2,1}) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix} = E_{1,1} + aE_{2,1} \\ \varphi_A(E_{2,2}) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} = E_{1,2} + aE_{2,2} \end{aligned}$$

La matrice cherchée est donc :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

$$\text{Q6 } \forall \lambda \in \mathbb{C} \chi_{\varphi_A}(\lambda) = \det(\lambda I_{\mathcal{M}_4(\mathbb{C})} - \varphi_A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda - a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda - a \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2(\lambda - a)^2$$

• **Premier cas : $a \neq 1$**

Les valeurs propres de φ_A sont a et 1 doubles.

La matrice de $\varphi_A - Id_{\mathcal{M}_4(\mathbb{R})}$ dans la base C est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a - 1 \end{pmatrix}$.

Elle est de rang 2 car les deux premières colonnes sont nulles et les deux dernières linéairement indépendantes.

Donc l'image de $\varphi_A - Id_{\mathcal{M}_4(\mathbb{R})}$ est de dimension 2.

D'après la formule du rang, son noyau, qui est le sous-espace propre de φ_A associé à la valeur propre 1, est de dimension 2.

La matrice de $\varphi_A - aId_{\mathcal{M}_4(\mathbb{R})}$ dans la base C est $\begin{pmatrix} 1 - a & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 - a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Elle est de rang 2 car les deux dernières lignes sont nulles et les deux premières linéairement indépendantes.

Donc l'image de $\varphi_A - aId_{\mathcal{M}_4(\mathbb{R})}$ est de dimension 2.

D'après la formule du rang, son noyau, qui est le sous-espace propre de φ_A associé à la valeur propre a , est de dimension 2.

• **Deuxième cas : $a = 1$**

Les valeurs propres de φ_A sont 1, 4 fois.

La matrice de $\varphi_A - Id_{\mathcal{M}_4(\mathbb{R})}$ dans la base C est
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Elle est de rang 2 car les deux premières colonnes sont nulles et les deux dernières linéairement indépendantes.

Donc l'image de $\varphi_A - Id_{\mathcal{M}_4(\mathbb{R})}$ est de dimension 2.

D'après la formule du rang, son noyau, qui est le sous-espace propre de φ_A associé à la valeur propre 1, est de dimension 2.

Q7 La somme des dimensions des sous-espaces propres de φ_A vaut $4 = \dim(\mathcal{M}_4(\mathbb{C}))$ si $a \neq 1$ et 2 si $a = 1$.

Par conséquent :

$$\begin{aligned} \varphi_A \text{ diagonalisable} &\iff a \neq 1 \\ &\iff A \text{ diagonalisable} \end{aligned}$$

Q8 Pour tout $k \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(k) : \varphi_A^k = \varphi_{A^k}$

$$\varphi_A^0 = Id_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$$

$$A^0 = I_n \text{ donc } \varphi_{A^0} = \varphi_{I_n} = Id_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}.$$

$\mathcal{P}(0)$ est vraie.

On suppose $\mathcal{P}(k)$ vraie.

$$\varphi_A^{k+1} = \varphi_A^k \circ \varphi_A = \varphi_{A^k} \circ \varphi_A \text{ d'après l'hypothèse de récurrence.}$$

On a alors avec la question 2 :

$$\varphi_A^{k+1} = \varphi_{A^k A} = \varphi_{A^{k+1}}$$

Donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

On a donc montré par récurrence que $\mathcal{P}(k)$ est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$ ie :

$$\forall k \in \mathbb{N} \varphi_A^k = \varphi_{A^k}$$

Q9 Soit $P \in \mathbb{C}[X]$.

$$\exists d \in \mathbb{N} \exists (c_0, \dots, c_d) \in \mathbb{C}^{d+1} \text{ tq } P = \sum_{k=0}^d c_k X^k$$

$$P(A) = \sum_{k=0}^d c_k A^k$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \quad \varphi_{P(A)}(M) &= P(A)M = \sum_{k=0}^d c_k A^k M \\ &= \sum_{k=0}^d c_k \varphi_{A^k}(M) \end{aligned}$$

Donc :

$$\varphi_{P(A)} = \sum_{k=0}^d c_k \varphi_{A^k} = \sum_{k=0}^d c_k \varphi_A^k = P(\varphi_A)$$

Q10 Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

M est diagonalisable si, et seulement si, il existe un polynôme annulateur scindé à racines simples à coefficients dans $\mathbb{K}$ de M .

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie.
 u est diagonalisable si, et seulement si, il existe un polynôme annulateur scindé à racines simples à coefficients dans $\mathbb{K}$ de u .

Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Supposons $\varphi_B = 0$.

$B = BI_n = \varphi_B(I_n) = 0$

Réciproquement, si $B = 0$ alors φ_B est l'endomorphisme nul de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

D'après la question précédente, A et φ_A ont donc les mêmes polynômes annulateurs.

Donc A possède un polynôme annulateur scindé à racines simples si, et seulement si, φ_A possède un polynôme annulateur scindé à racines simples.

On en déduit :

$$A \text{ diagonalisable} \iff \varphi_A \text{ diagonalisable}$$

Q11 χ_A n'est pas le polynôme caractéristique de φ_A . En effet, χ_A est de degré n alors que φ_A est de degré n^2 .

Néanmoins d'après la question 9, $\chi_A(\varphi_A) = \varphi_{\chi_A(A)}$

D'après le théorème de Cayley-Hamilton, $\chi_A(A) = 0$ donc $\chi_A(\varphi_A)$ est nul.

On en déduit que le spectre de φ_A est inclus dans l'ensemble des racines de χ_A .

Mais l'ensemble des racines de χ_A est le spectre de A donc $\text{Sp}(\varphi_A) \subset \text{Sp}(A)$.

Mais on a aussi :

$\varphi_{\chi_{\varphi_A}(A)} = \chi_{\varphi_A}(\varphi_A)$ par la question 9.

D'où $\varphi_{\chi_{\varphi_A}(A)} = 0$ par Cayley-Hamilton appliqué à φ_A .

On en déduit (cf la question 10) que $\chi_{\varphi_A}(A) = 0$

On en déduit que le spectre de A est inclus dans l'ensemble des racines de χ_{φ_A} à savoir le spectre de φ_A .

On a donc montré par double inclusion que $\text{Sp}(A) = \text{Sp}(\varphi_A)$.

Q12 • Soit $M \in E_\lambda(\varphi_A)$.

$$AM = \varphi_A(M) = \lambda M.$$

Si on multiplie à droite par la colonne $E_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ (avec le 1 en j -ème position), on

obtient $AC_j(M) = \lambda C_j(M)$ et la j -ème colonne de M est dans le sous-espace propre de A associé à la valeur propre λ .

• On suppose :

$$\forall j \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad AC_j(M) = \lambda C_j(M)$$

On a donc en notant $(E_1, \dots, E_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$:

$$\forall j \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad A(ME_j) = \lambda ME_j$$

Donc :

$$\forall j \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad (AM - \lambda M)E_j = 0$$

En d'autres termes, toutes les colonnes de la matrice $AM - \lambda M$ sont nulles. Cette matrice est donc nulle et :

$$\varphi_A(M) = AM = \lambda M$$

Donc $M \in E_\lambda(\varphi_A)$

Q13 D'après l'énoncé, on a :

$$\forall \lambda \in \text{Sp}(A) = \text{Sp}(\varphi_A) \quad \dim(E_\lambda(\varphi_A)) = \dim(E_\lambda(A)^n) = n \dim(E_\lambda(A)).$$

La trace d'un endomorphisme (resp. d'une matrice) dont le polynôme caractéristique est scindé est la somme de ses valeurs propres comptées avec leurs multiplicités.

Ici on travaille avec le corps des complexes donc les polynômes sont tous scindés (théorème de d'Alembert-Gauss).

En outre, on suppose A diagonalisable, ce qui entraîne que φ_A est aussi diagonalisable. Dans ce cas, multiplicité et dimension du sous-espace propre associé à une valeur propre sont les mêmes donc :

$$\begin{aligned} \text{tr}(\varphi_A) &= \sum_{\lambda \in \text{Sp}(\varphi_A)} \lambda \dim(E_\lambda(\varphi_A)) \\ &= \sum_{\lambda \in \text{Sp}(A)} \lambda \dim(E_\lambda(\varphi_A)) \quad \text{car } \text{Sp}(\varphi_A) = \text{Sp}(A) \\ &= \sum_{\lambda \in \text{Sp}(A)} n \lambda \dim(E_\lambda(A)) = n \sum_{\lambda \in \text{Sp}(A)} \lambda \dim(E_\lambda(A)) \\ &= n \text{tr}(A) \end{aligned}$$

De même avec le produit à la place de la somme :

$$\begin{aligned} \det(\varphi_A) &= \prod_{\lambda \in \text{Sp}(\varphi_A)} \lambda^{\dim(E_\lambda(\varphi_A))} \\ &= \prod_{\lambda \in \text{Sp}(A)} \lambda^{\dim(E_\lambda(\varphi_A))} \quad \text{car } \text{Sp}(\varphi_A) = \text{Sp}(A) \\ &= \prod_{\lambda \in \text{Sp}(A)} \lambda^{n \dim(E_\lambda(A))} = \left(\prod_{\lambda \in \text{Sp}(A)} \lambda^{\dim(E_\lambda(A))} \right)^n \\ &= (\det(A))^n \end{aligned}$$

Exercice 2

Q14 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto t^n e^{-t^2} \end{cases}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

f_n est continue sur $\mathbb{R}$.

$\forall t \geq 0 \quad t^2 f_n(t) = t^{n+2} e^{-t^2} = (t^2)^{(n+2)/2} e^{-t^2} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$ par croissance comparée.

Donc $f_n(t) = o_{+\infty} \left(\frac{1}{t^2} \right)$

La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable en $+\infty$ donc f_n est intégrable en $+\infty$.

On en déduit que f_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

La fonction f_n étant paire si n est pair, impair si n est impair, f_n est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Q15 Soient $R \in \mathbb{R}[X]$ et $f \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto R(t) e^{-t^2} \end{cases}$.

$$\exists d \in \mathbb{N} \exists (c_0, \dots, c_d) \in \mathbb{C}^{d+1} \text{ tq } R = \sum_{k=0}^d c_k X^k$$

$f = \sum_{k=0}^d c_k f_k$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ comme combinaison linéaire de fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$.

Q16 • Linéarité à droite

$$\begin{aligned}
 & \forall (P, Q_1, Q_2) \in \mathbb{R}[X]^3 \quad \forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \\
 \varphi(P, \lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} P(t) (\lambda_1 Q_1(t) + \lambda_2 Q_2(t)) dt \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda_1 P(t) Q_1(t) + \lambda_2 P(t) Q_2(t)) dt \\
 &= \lambda_1 \int_{-\infty}^{+\infty} P(t) Q_1(t) dt + \lambda_2 \int_{-\infty}^{+\infty} P(t) Q_2(t) dt \\
 &= \lambda_1 \varphi(P, Q_1) + \lambda_2 \varphi(P, Q_2)
 \end{aligned}$$

• **Symétrie**

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2 \quad \varphi(P, Q) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t) Q(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} Q(t) P(t) dt = \varphi(Q, P)$$

• **Linéarité à gauche**

Elle se déduit de la linéarité à droite grâce à la symétrie.

• **Positivité**

Si $P \in \mathbb{R}[X]$, la fonction $t \mapsto P(t)^2$ est continue et positive sur $\mathbb{R}$ donc :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X] \quad \varphi(P, P) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)^2 dt \geq 0$$

avec égalité si, et seulement si, $P(t)^2 = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Mais P est un polynôme donc dire que P s'annule en tout point de $\mathbb{R}$ qui contient une infinité d'éléments revient à dire que P est le polynôme nul.

Q17 La fonction $f_0 \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto e^{-t^2} \end{cases}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc d'après le théorème fondamental de l'analyse, u est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad u'(x) = e^{-x^2}$$

Q18 Soit $g \begin{cases} \mathbb{R} \times [0; 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) \mapsto \frac{e^{-(1+t^2)x^2}}{1+t^2} \end{cases}$

• g est $\mathcal{C}^1$ par rapport à x avec :

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [0; 1] \quad \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = -2x e^{-(1+t^2)x^2}$$

• Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $g(x, \cdot)$ est continue et intégrable sur $[0; 1]$ (la continuité entraîne l'intégrabilité sur un segment)

• Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $\frac{\partial g}{\partial x}(x, \cdot)$ est continue sur $[0; 1]$

• **Domination**

Soit $R > 0$.

$$\forall (x, t) \in [-R; R] \times [0; 1] \quad \left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| = 2|x| e^{-(1+t^2)x^2} \leq 2R$$

avec $t \mapsto 2R$ continue, positive et intégrable sur $[0; 1]$.

On en déduit que pour tout $R > 0$, v est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-R; R]$ avec :

$$\forall R > 0 \quad \forall x \in [-R; R] \quad v'(x) = -2x \int_0^1 e^{-(1+t^2)x^2} dt$$

On en déduit que v est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad v'(x) = -2x \int_0^1 e^{-(1+t^2)x^2} dt$$

Q19 La fonction $f = u^2 + v$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) &= 2u(x)u'(x) + v'(x) = 2e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt - 2x \int_0^1 e^{-(1+t^2)x^2} dt \\ &= 2e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt - 2x \int_0^1 e^{-x^2} e^{-x^2 t^2} dt \\ &= 2e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt - 2e^{-x^2} \int_0^1 e^{-(xt)^2} x dt \\ &= 2e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt - 2e^{-x^2} \int_0^x e^{-y^2} dy \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc la fonction f est constante sur $\mathbb{R}$.

Sa valeur est $f(0)$.

$$\begin{aligned} f(0) &= u(0)^2 + v(0) = v(0) = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = [\arctan(t)]_0^1 \\ &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Q20 Soit $g \begin{cases} \mathbb{R} \times [0; 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) \mapsto \frac{e^{-(1+t^2)x^2}}{1+t^2} \end{cases}$

- Pour tout $t \in [0; 1]$, $g(x, t) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} l(t) = 0$
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $g(x, \cdot)$ est continue sur $[0; 1]$.
- La fonction l est continue sur $[0; 1]$.
- **Domination**

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [0; 1] \quad |g(x, t)| = \frac{e^{-(1+t^2)x^2}}{1+t^2} \leq 1$$

avec $t \mapsto 1$ continue, positive et intégrable sur $[0; 1]$.

On en déduit que $v(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

$$\text{Donc } u(x)^2 = \frac{\pi}{4} - v(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{4}$$

u étant positive sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit $u(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

$$\text{Donc } \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

$$\text{Par parité, } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$$

Q21 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n) : H_n$ est de degré n et de coefficient dominant 2^n .

$H_0 = 1 = 2^0$ donc H_0 est de degré 0 et de coefficient dominant 2^0 : $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie.

Il existe Q_n de degré inférieur ou égal à $n - 1$ tel que $H_n = 2^n X^n + Q_n$.

$$\begin{aligned} H_{n+1} &= 2X(2^n X^n + Q_n) - 2^n n X^{n-1} - Q'_n \\ &= 2^{n+1} X^{n+1} + 2XQ_n - 2^n n X^{n-1} - Q'_n \end{aligned}$$

$2XQ_n$ est de degré inférieur ou égal à n , $2^n n X^{n-1}$ est de degré $n-1$ ($-\infty$ si $n=0$) et Q'_n est de degré au plus $n-2$.

On en déduit que H_{n+1} est de degré $n+1$ et de coefficient dominant 2^{n+1} .

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

On a donc prouvé par récurrence :

pour tout $n \in \mathbb{N}$, H_n est de degré n et de coefficient dominant 2^n .

Q22 f est clairement de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n) : \forall x \in \mathbb{R} f^{(n)}(x) = (-1)^n H_n(x) f(x)$

$f^{(0)} = f$, $(-1)^0 = 1$ et $H_0 = 1$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie.

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} f^{(n+1)}(x) &= \left(f^{(n)} \right)'(x) \\ &= (-1)^n (H'_n(x) f(x) + H_n(x) f'(x)) \text{ d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= (-1)^n (H'_n(x) f(x) + H_n(x) (-2x) f(x)) \\ &= (-1)^{n+1} f(x) (-H'_n(x) + 2x H_n(x)) \\ &= (-1)^{n+1} H_{n+1}(x) f(x) \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

On a donc prouvé par récurrence :

$\forall n \in \mathbb{N} \forall x \in \mathbb{R} f^{(n)}(x) = (-1)^n H_n(x) f(x)$

Q23 Si $q=0$ alors $p=k=0$ et la formule de l'énoncé devient :

$$\varphi(H_0, H_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} H_0(t) f(t) dt$$

Elle est vraie car :

$$\varphi(H_0, H_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} H_0(t) H_0(t) e^{-t^2} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} H_0(t) f(t) dt$$

On suppose $q > 0$ et on procède par récurrence finie.

Pour tout $k \in \llbracket 0; q \rrbracket$, soit $\mathcal{P}(k) : \varphi(H_p, H_q) = (-1)^{q-k} \int_{-\infty}^{+\infty} H_p^{(k)}(t) f^{(q-k)}(t) dt$

$$\begin{aligned} \varphi(H_p, H_q) &= \int_{-\infty}^{+\infty} H_p(t) H_q(t) e^{-t^2} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} H_p(t) H_q(t) f(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} H_p(t) (-1)^q f^{(q)}(t) dt \text{ d'après la question précédente} \\ &= (-1)^{q-0} \int_{-\infty}^{+\infty} H_p^{(0)}(t) f^{(q-0)}(t) dt \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

On suppose $\mathcal{P}(k)$ vraie ($0 \leq k < q$).

On intègre par parties :

$$u(t) = H_p^{(k)}(t), u'(t) = H_p^{(k+1)}(t)$$

$$v'(t) = f^{(q-k)}(t), v(t) = f^{(q-k-1)}(t) \text{ (on a bien } q-k-1 \geq 0 \text{)}$$

u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et :

$u(t)v(t) = (-1)^{q-k-1} H_p^{(k+1)}(t) H_{q-k-1}(t) f(t)$ de la forme $P(t) e^{-t^2}$ avec P polynomiale donc $u(t)v(t) \xrightarrow[t \rightarrow \pm\infty]{} 0$

L'intégration par parties est donc justifiée et :

$$\begin{aligned}\varphi(H_p, H_q) &= (-1)^{q-k} \left(0 - \int_{-\infty}^{+\infty} H_p^{(k+1)}(t) f^{(q-k-1)}(t) dt \right) \\ &= (-1)^{q-k-1} \int_{-\infty}^{+\infty} H_p^{(k+1)}(t) f^{(q-k-1)}(t) dt\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

On a donc prouvé par récurrence :

$$\forall k \in \llbracket 0; q \rrbracket \quad \varphi(H_p, H_q) = (-1)^{q-k} \int_{-\infty}^{+\infty} H_p^{(k)}(t) f^{(q-k)}(t) dt$$

Q24 Soit $(p, q) \in \llbracket 0; d \rrbracket^2$ tel que $p < q$.

D'après la question précédente (avec $k = q$), $\varphi(H_p, H_q) = \int_{-\infty}^{+\infty} H_p^{(q)} f(t) dt$

Mais H_p est un polynôme de degré $p < q$ donc $H_p^{(q)} = 0$.

On en déduit $\varphi(H_p, H_q) = 0$.

La famille $(H_0, \dots, H_d)$ est donc orthogonale. Comme elle est formée de vecteurs non nuls, elle est libre.

Mais elle comporte $d+1 = \dim(\mathbb{R}_d[X])$ vecteurs de $\mathbb{R}_d[X]$ donc c'est une base (orthogonale) de $\mathbb{R}_d[X]$.

Q25 Toujours avec la question 23, on a :

$$\begin{aligned}\forall p \in \mathbb{N} \quad \|H_p\|^2 &= \varphi(H_p, H_p) = \int_{-\infty}^{+\infty} H_p^{(p)}(t) f(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} 2^p p! f(t) dt \text{ car } H_p \text{ est de degré } p \text{ et de coefficient dominant } 2^p \\ &= 2^p p! \sqrt{\pi}\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad \|H_p\| = \sqrt{2^p p! \sqrt{\pi}}$$

Q26 $\forall z \in \mathbb{C} \quad e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$

On en déduit :

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad e^{2xz} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n x^n}{n!} z^n$$

et le rayon de convergence est infini car la série converge pour tout $z \in \mathbb{C}$

De même :

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad e^{-z^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} z^{2n}$$

et le rayon de convergence est infini car la série converge pour tout $z \in \mathbb{C}$

Q27 $\forall z \in \mathbb{C} \quad e^{-(x-z)^2} = e^{-x^2+2xz-z^2} = e^{-x^2} e^{2xz} e^{-z^2}$

Les deux fonctions $z \mapsto e^{2xz}$ et $z \mapsto e^{-z^2}$ sont développables en série entière avec un rayon de convergence infini. Par produit de Cauchy, on peut affirmer que leur produit est développable en série entière sur $\mathbb{C}$ donc avec un rayon de convergence infini.

Enfin, x étant fixé, e^{-x^2} est ici une constante donc la fonction $z \mapsto e^{-(x-z)^2}$ est développable en série entière sur $\mathbb{C}$ donc avec un rayon de convergence infini.

Q28 $\forall t \in \mathbb{R} \quad f(x-t) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n t^n$

On a donc en notant g la fonction $t \mapsto f(x-t)$:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad c_n = \frac{g^{(n)}(0)}{n!}$$

Mais :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad g^{(n)}(t) = (-1)^n f^{(n)}(x-t) = H_n(x-t) f(x-t) \text{ par la question 22}$$

Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad c_n = \frac{H_n(x)}{n!} f(x)$$

$f(x) = e^{-x^2}$ étant ici une constante strictement positive, on en déduit que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{H_n}{n!} t^n$ est le même que celui de la série entière $\sum_{n \geq 0} c_n t^n$

à savoir $+\infty$

Enfin, on a :

$$\begin{aligned} \forall z \in \mathbb{C} \quad e^{2xz-z^2} &= e^{x^2} e^{-(x-z)^2} = e^{x^2} \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n \\ &= e^{x^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{H_n(x)}{n!} f(x) z^n \\ &= e^{x^2} f(x) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{H_n(x)}{n!} z^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{H_n(x)}{n!} z^n \end{aligned}$$

Q29 x est toujours un réel fixé.

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall \theta \in [0; 2\pi] \quad |g_n(\theta)| = \frac{|H_n(x)|}{n!}$ indépendant de θ et terme général d'une série convergente.

En effet le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{H_n(x)}{n!} z^n$ est infini donc pour tout

$z \in \mathbb{C}$, la série $\sum_{n \geq 0} \frac{H_n(x)}{n!} z^n$ converge absolument. C'est le cas en particulier en $z = 1$.

On en déduit que la série de fonctions $\sum g_n$ converge normalement sur $[0; 2\pi]$.

Q30

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} G_x(e^{i\theta}) e^{-ip\theta} d\theta &= \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{H_n(x)}{n!} (e^{i\theta})^n e^{-ip\theta} d\theta \text{ d'après la question 28} \\ &= \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{H_n(x)}{n!} e^{i(n-p)\theta} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(\theta) d\theta \end{aligned}$$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, g_n est continue sur $[0; 2\pi]$.
- La série de fonctions $\sum g_n$ converge normalement sur $[0; 2\pi]$ donc converge uniformément sur $[0; 2\pi]$.

On en déduit :

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} G_x(e^{i\theta}) e^{-ip\theta} d\theta &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{2\pi} g_n(\theta) d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{H_p(x)}{p!} d\theta + \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq p}}^{+\infty} \int_0^{2\pi} \frac{H_n(x)}{n!} e^{i(n-p)\theta} d\theta \\
&= 2\pi \frac{H_p(x)}{p!} + \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq p}}^{+\infty} \left[\frac{H_n(x)}{n!} \frac{e^{i(n-p)\theta}}{i(n-p)} \right]_0^{2\pi} \\
&= 2\pi \frac{H_p(x)}{p!} + \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq p}}^{+\infty} 0 \\
&= 2\pi \frac{H_p(x)}{p!}
\end{aligned}$$

D'où le résultat en multipliant par $\frac{p!}{2\pi}$

Exercice 3

Q31 $\forall n \in \mathbb{N} \quad \bigcap_{k=1}^{n+1} B_k \subset \bigcap_{k=1}^n B_k$

Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad p_{n+1} = P\left(\bigcap_{k=1}^{n+1} B_k\right) \leq P\left(\bigcap_{k=1}^n B_k\right) = p_n$$

La suite (p_n) est décroissante et minorée par 0 donc elle converge vers une limite l .

$$\text{Par continuité décroissante, } l = P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} \left(\bigcap_{k=1}^n B_k\right)\right) = P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n\right) = P(E)$$

Q32 Si l'évènement $\bigcap_{i=1}^k B_i$ est réalisé alors l'urne contient 1 boule rouge et S_k boules blanches.

$$\text{On en déduit } P\left(B_{k+1} \mid \bigcap_{i=1}^k B_i\right) = \frac{S_k}{S_k + 1}$$

Q33 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $\mathcal{P}(n) : p_n = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{S_k}{S_k + 1}$

Au départ, il y a une boule de chaque couleur donc $p_1 = P(B_1) = \frac{1}{2} = \frac{S_0}{S_0 + 1}$ car $S_0 = 1$

On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie.

$$\begin{aligned}
p_{n+1} &= P\left(\bigcap_{i=1}^{n+1} B_i\right) = P\left(B_{n+1} \cap \bigcap_{i=1}^n B_i\right) \\
&= P\left(B_{n+1} \mid \bigcap_{i=1}^n B_i\right) P\left(\bigcap_{i=1}^n B_i\right) = \frac{S_n}{S_n + 1} p_n \\
&= \frac{S_n}{S_n + 1} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{S_k}{S_k + 1} = \prod_{k=0}^n \frac{S_k}{S_k + 1}
\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

On a donc montré par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad p_n = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{S_k}{S_k + 1}$$

Q34 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n) : S_n \geq n+1$

$S_0 = 1$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie.

$S_{n+1} = S_n + u_{n+1}$ où u_{n+1} est un entier naturel non nul donc :

$$S_{n+1} \geq S_n + 1 \geq n+1+1$$

et $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

On a donc montré par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad S_n \geq n+1$$

On en déduit que la suite (S_n) diverge vers $+\infty$.

Q35 $\forall n \in \mathbb{N} \quad \ln\left(\frac{S_n}{S_n+1}\right) = -\ln\left(\frac{S_n+1}{S_n}\right) = -\ln\left(1 + \frac{1}{S_n}\right) \sim -\frac{1}{S_n}$ car $\frac{1}{S_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

De plus :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \ln\left(\frac{S_n}{S_n+1}\right) \leq 0 \text{ et } -\frac{1}{S_n} \leq 0$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \sum \ln\left(\frac{S_n}{S_n+1}\right) \text{ converge} &\iff \sum \frac{-1}{S_n} \text{ converge} \\ &\iff \sum \frac{1}{S_n} \text{ converge} \end{aligned}$$

Q36 • On suppose $P(E) = 0$.

$$\text{D'après la question 31, } \prod_{k=0}^n \frac{S_k}{S_k+1} = p_{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\text{On en déduit : } \sum_{k=0}^n \ln\left(\frac{S_k}{S_k+1}\right) = \ln(p_{n+1}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty$$

Donc la série $\sum \ln\left(\frac{S_n}{S_n+1}\right)$ diverge.

D'après la question précédente, la série $\sum \frac{1}{S_n}$ diverge.

• On suppose que la série $\sum \frac{1}{S_n}$ diverge.

D'après la question précédente, la série $\sum \ln\left(\frac{S_n}{S_n+1}\right)$ diverge.

Comme c'est une série à termes négatifs :

$$\ln(p_{n+1}) = \sum_{k=0}^n \ln\left(\frac{S_k}{S_k+1}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$$

$$\text{Donc } P(E) = \lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = 0$$

Q37 $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad S_n = 1 + \sum_{k=1}^n u_k = 1 + \sum_{k=1}^n 1 = n+1$

$$\text{Donc } \frac{1}{S_n} \sim \frac{1}{n}$$

De plus la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{1}{S_n} \geq 0 \text{ et } \frac{1}{n} \geq 0$$

donc la série $\sum \frac{1}{S_n}$ diverge et $P(E) = 0$

Q38 On prend $u_k = k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad S_n = 1 + \sum_{k=1}^n k = 1 + \frac{n(n+1)}{2} \geq \frac{n^2}{2}$$

Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 0 \leq \frac{1}{S_n} \leq \frac{2}{n^2}$$

On en déduit que la $\sum \frac{1}{S_n}$ converge.

D'après la question 36, $P(E)$ est non nul.