

X PC 2024

Corrigé

1 Préliminaires

- (1) $R \in O_d(\mathbb{R})$ donc $R^T R = I_d$.

On en déduit $1 = \det(I_n) = \det(R^T R) = \det(R^T) \det(R) = \det(R)^2$.

Donc $\det(R) \in \{-1; 1\}$.

- (2) L'application $(.,.)$ est bien définie.

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})^2$.

$A^T \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ donc $A^T B$ est bien définie et appartient à $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$. Sa trace est bien définie.

- **Symétrie**

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})^2 \quad (A, B) = \text{tr}(A^T B) = \text{tr}\left((A^T B)^T\right) = \text{tr}(B^T A) = (B, A)$$

- **Linéarité à droite**

$$\begin{aligned} \forall (A, B_1, B_2) \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})^3 \quad \forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \quad (A, \lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2) &= \text{tr}\left(A^T(\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2)\right) \\ &= \text{tr}(\lambda_1 A^T B_1 + \lambda_2 A^T B_2) \\ &= \lambda_1 \text{tr}(A^T B_1) + \lambda_2 \text{tr}(A^T B_2) \\ &= \lambda_1 (A, B_1) + \lambda_2 (A, B_2) \end{aligned}$$

- On en déduit la linéarité à gauche (grâce à la symétrie).

- Avant d'aller plus loin, on va développer (A, B) .

$$\begin{aligned} \forall (A, B) \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})^2 \quad (A, B) &= \text{tr}(A^T B) = \text{tr}\left(\left(\sum_{k=1}^n (A^T)_{i,k} b_{k,j}\right)_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq p}}\right) \\ &= \text{tr}\left(\left(\sum_{k=1}^n a_{k,i} b_{k,j}\right)_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq p}}\right) = \sum_{i=1}^p \left(\sum_{k=1}^n a_{k,i} b_{k,i}\right) \\ &= \sum_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq k \leq n}} a_{k,i} b_{k,i} \end{aligned}$$

En particulier :

$$\forall A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R}) \quad (A, A) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} a_{i,j}^2 \geq 0$$

De plus :

$$\begin{aligned} (A, A) = 0 &\iff \forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket \times \llbracket 1; p \rrbracket \quad a_{i,j}^2 = 0 \\ &\iff \forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket \times \llbracket 1; p \rrbracket \quad a_{i,j} = 0 \end{aligned}$$

(3) (a) On note $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_d \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_d \end{pmatrix}$.

Av est la colonne $\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^d A_{1,j}v_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^d A_{d,j}v_j \end{pmatrix}$ donc :

$$\langle u, Av \rangle_{\mathbb{R}^d} = \sum_{i=1}^d \left(u_i \sum_{j=1}^d A_{i,j}v_j \right) = \sum_{1 \leq i, j \leq d} A_{i,j}v_i v_j$$

$v^T \in \mathcal{M}_{1,d}(\mathbb{R})$ donc uv^T est bien une matrice de $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$.

Le coefficient situé à l'intersection de la i -ème ligne et de la j -ème colonne de uv^T est $u_i v_j$.

D'après la formule vue question (2) :

$$(uv^T, A) = \sum_{1 \leq i, j \leq d} u_i v_j A_{i,j}$$

(b) On note $C = AB$ et $D = BA$.

$$\forall i \in \llbracket 1; d \rrbracket \quad c_{i,i} = \sum_{k=1}^d a_{i,k} b_{k,i}$$

$$\begin{aligned} \text{tr}(C) &= \sum_{i=1}^d \sum_{k=1}^d a_{i,k} b_{k,i} = \sum_{k=1}^d \sum_{i=1}^d a_{i,k} b_{k,i} \\ &= \sum_{k=1}^d \sum_{i=1}^d b_{k,i} a_{i,k} = \sum_{k=1}^d d_{k,k} \\ &= \text{tr}(D) \end{aligned}$$

(c) Soit $(A, B, C) \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})^3$.

$$(A, BC) = \text{tr}(A^T BC)$$

$$(B^T A, C) = \text{tr}((B^T A)^T C) = \text{tr}(A^T (B^T)^T C) = \text{tr}(A^T BC)$$

$$(AC^T, B) = \text{tr}(AC^T)^T B) = \text{tr}(CA^T B) = \text{tr}(C(A^T B)) = \text{tr}((A^T B)C) = \text{tr}(A^T BC)$$

Il y a bien égalité entre les trois produits scalaires de l'énoncé.

(4) (a) Soit $i \in \llbracket 1; d \rrbracket$.

Le coefficient situé à l'intersection de la i -ème ligne et de la i -ème colonne de la matrice $I_d = R^T R$ vaut :

$$1 = \sum_{j=1}^d (R^T)_{i,j} R_{j,i} = \sum_{j=1}^d R_{j,i}^2 = R_{i,i}^2 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^d R_{j,i}^2$$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^d R_{j,i}^2 \geq 0 \text{ donc } R_{i,i}^2 \leq 1.$$

On en déduit $|R_{i,i}| \leq 1$.

(b) D'après la formule vue question (2) :

$$(D, R) = \sum_{i=1}^d \alpha_i R_{i,i}$$

Pour tout i compris entre 1 et d , $R_{i,i} \leq 1$ car $|R_{i,i}| \leq 1$.

On peut multiplier cette inégalité par $\alpha_i \geq 0$: $\alpha_i R_{i,i} \leq \alpha_i$.

Sommer des inégalités ne pose pas de problème donc :

$$(D, R) \leq \sum_{i=1}^d \alpha_i = \text{tr}(D)$$

2 Ensemble des déplacements de $\mathbb{R}^d$

(5) (a) Soit $g = (\tau, r) \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$.

$$\begin{aligned} \forall (a, b) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \quad |\phi_g(a) - \phi_g(b)| &= |Ra + \tau - (Rb + \tau)| = |Ra - Rb| = |R(a - b)| \\ &= |a - b| \quad \text{car } R \in O(d) \end{aligned}$$

Cela me paraît suffisant.

On peut aussi revenir aux définitions de l'énoncé :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}^d \quad \|Rx\|^2 &= (Rx)^T Rx = x^T R^T Rx = x^T I_d x = x^T x \\ &= \|x\|^2 \end{aligned}$$

(b) Evidemment, si $g = g'$ alors $\phi_g = \phi_{g'}$.

Réciproquement, soit $g = (\tau, R)$ et $g' = (\tau', R') \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$ tels que $\phi_g = \phi_{g'}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}^d \quad \tau + Rx = \tau' + R'x$$

On évalue en $x = 0$: $\tau = \tau'$.

Il reste :

$$\forall x \in \mathbb{R}^d \quad Rx = R'x$$

En prenant pour x le j -ème vecteur de la base canonique, on trouve que la j -ème colonne de R est égale à la j -ème colonne de R' .

En faisant varier j , on en déduit que les colonnes de R et de R' sont identiques.

Finalement, $R = R'$ et $g = g'$.

(c) $e = (0, I_d)$ convient et il n'y en a pas d'autre d'après la question précédente.

(6) (a) Soit $g = (\tau, R)$ et $g' = (\tau', R') \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$.

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}^d \quad (\phi_{g'} \circ \phi_g)(x) &= \phi_{g'}(\phi_g(x)) = \phi_{g'}(\tau + Rx) \\ &= \tau' + R'(\tau + Rx) = \tau' + R'\tau + R'R x \end{aligned}$$

Le produit de deux matrices de $SO_d(\mathbb{R})$ étant une matrice de $SO_d(\mathbb{R})$, $g'' = (\tau' + R'\tau, R'R) \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$.

On vient de montrer $\phi_{g'} \circ \phi_g = \phi_{g''}$ d'où l'existence.

L'unicité découle de la question (5)(b).

(b) Soient $g_1, g_2, g_3 \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$.

$$(\phi_{g_1} \circ \phi_{g_2}) \circ \phi_{g_3} = \phi_{g_1}(\phi_{g_2} \circ \phi_{g_3}) \text{ donc :}$$

$$\phi_{g_1 g_2} \circ \phi_{g_3} = \phi_{g_1} \circ \phi_{g_2 g_3}$$

On en déduit $\phi_{(g_1 g_2) g_3} = \phi_{g_1 (g_2 g_3)}$ puis $(g_1 g_2) g_3 = g_1 (g_2 g_3)$.

- (7) (a) On revient à la définition d'une bijection : tout élément de l'ensemble d'arrivée possède un antécédent et un seul dans l'ensemble de départ.
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$.

$$\begin{aligned}\phi_g(x) = y &\iff \tau + Rx = y \\ &\iff Rx = y - \tau \\ &\iff x = R^{-1}(y - \tau) = R^T(y - \tau) = R^T y - R^T \tau\end{aligned}$$

$R^{-1} = R^T$ étant une matrice de $SO_d(\mathbb{R})$, on a prouvé que ϕ_g était une bijection et que $\phi_g^{-1} = \phi_{(-R^T \tau, R^T)}$.

- (b) L'existence a été prouvée dans la question précédente, l'unicité découle de la question (5)(b).
- (c) $\phi_{ge} = \phi_g \circ \phi_e = \phi_g \circ id_{\mathbb{R}^d} = \phi_g$ donc $ge = g$
 $\phi_{eg} = \phi_e \circ \phi_g = id_{\mathbb{R}^d} \circ \phi_g = \phi_g$ donc $eg = g$
 $\phi_{gg^{-1}} = \phi_g \circ \phi_{g^{-1}} = \phi_g \circ \phi_g^{-1} = id_{\mathbb{R}^d} = \phi_e$ donc $gg^{-1} = e$
 $\phi_{g^{-1}g} = \phi_{g^{-1}} \circ \phi_g = \phi_g^{-1} \circ \phi_g = id_{\mathbb{R}^d} = \phi_e$ donc $g^{-1}g = e$
- (8) Soit $R = (r)$ une matrice de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$.
 $R^T R = (r^2)$ et $\det(R) = r$ donc il y a une seule matrice dans $SO_1(\mathbb{R}) : I_1 = (1)$.
 Les déplacements de $\mathbb{R}$ sont donc les couples (τ, I_1) avec $\tau \in \mathbb{R}$.
 Soient $g = (\tau, I_1)$ et $g' = (\tau', I_1)$ deux déplacements de $\mathbb{R}$.
 $g'g = (\tau' + I_1 \tau, I_1 I_1) = (\tau' + \tau, I_1)$
 $gg' = (\tau + I_1 \tau', I_1 I_1) = (\tau + \tau', I_1)$
 Donc $gg' = g'g$.

Soit $d \geq 2$.

Il existe dans $SO_d(\mathbb{R})$ une matrice différente de I_d , par exemple $R = \text{Diag}(-1, -1, 1, \dots, 1)$.
 On prend $g = (0, R)$ et $g' = (\tau', I_d)$ avec $\tau' = (1, 0, 0, \dots, 0)$.
 $g'g = (\tau' + Id\tau, I_d R) = (\tau', R)$
 $gg' = (\tau + R\tau', I_d R) = (-\tau', R)$
 Donc $gg' \neq g'g$.

3 Distance à déplacement près

- (9) (a) Soit $g, g' \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$ et $z = (z_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathcal{E}_d^n(\mathbb{R})$.
 $g'.z = (\phi_{g'}(z_i))_{1 \leq i \leq n} \in \mathcal{E}_d^n(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}g.(g'.z) &= (\phi_g(\phi_{g'}(z_i)))_{1 \leq i \leq n} = ((\phi_g \circ \phi_{g'})(z_i))_{1 \leq i \leq n} = (\phi_{gg'}(z_i))_{1 \leq i \leq n} \\ &= (gg').z\end{aligned}$$

- (b) Soient $x, y \in \mathcal{E}_d^n(\mathbb{R})$ et $g \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$ tels que $x = g.y$.
 $g^{-1}.x = g^{-1}.(g.y) = (g^{-1}g).y = e.y$
 Mais si on note $y = (y_i)_{1 \leq i \leq n}$ alors :
 $e.y = (\phi_e(y_i))_{1 \leq i \leq n} = (Id y_i)_{1 \leq i \leq n} = (y_i)_{1 \leq i \leq n} = y$

(10) (a) Soient $x, y \in \mathcal{E}_d^n(\mathbb{R})$ et $g \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$.

$$\begin{aligned} \|g.y - g.x\| &= \sqrt{\sum_{i=1}^n |\phi_g(y_i) - \phi_g(x_i)|} \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^n |y_i - x_i|} \text{ d'après (5)(a)} \\ &= \|y - x\| \end{aligned}$$

(b) Soient $x, y \in \mathcal{E}_d^n(\mathbb{R})$.

$\forall g \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d) \quad \|x - g.y\| = \|g^{-1}.x - g^{-1}.(g.y)\| = \|g^{-1}.x - y\| = \|y - g^{-1}.x\| \geq \delta(x, y)$ indépendant de g

Donc $\delta(x, y)$ est un minorant de $\{x - gy, g \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)\}$. $\delta(x, y)$ est donc plus petit que la borne inférieure de cet ensemble : $\delta(x, y) \leq \delta(y, x)$

En inversant les rôles de x et de y , on obtient $\delta(y, x) \leq \delta(x, y)$.

Finalement : $\delta(x, y) = \delta(y, x)$

(c) Soient $x, y, z \in \mathcal{E}_d^n(\mathbb{R})$ et $g, g' \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$.

Il est écrit dans l'énoncé que $\|\cdot\|$ est une norme. On peut donc lui appliquer l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} \|z - g.x\| &= \|z - (gg').y + (gg').y - g.x\| \\ &\leq \|z - (gg').y\| + \|(gg').y - g.x\| = \|z - (gg').y\| + \|g.(g'.y) - g.x\| \\ &\leq \|z - (gg').y\| + \|g'.y - x\| \end{aligned}$$

(d) Soient $x, y, z \in \mathcal{E}_d^n(\mathbb{R})$.

$\forall g \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d) \quad \|z - gx\| \geq \delta(x, z)$ donc :

$\forall (g, g') \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)^2 \quad \delta(x, z) \leq \|z - (gg').y\| + \|g'.y - x\|$

Soit $\epsilon > 0$.

$\exists (g_1, g_2) \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)^2$ tq $\|z - g_1.y\| \leq \delta(y, z) + \epsilon$ et $\|g_2.y - x\| = \|x - g_2.y\| \leq \delta(y, x) + \epsilon = \delta(x, y) + \epsilon$

On prend $g' = g_2$ et $g = g_1 g_2^{-1}$ de sorte que :

$$gg' = (g_1 g_2^{-1}) g_1 = g_1 (g_2^{-1} g_2) = g_1 e = g_1$$

On a donc :

$$\delta(x, z) \leq \delta(y, z) + \epsilon + \delta(x, y) + \epsilon$$

et il ne reste plus qu'à faire tendre ϵ vers 0.

(11) (a) On suppose $c(x) \cap c(y) \neq \emptyset$.

Il existe donc $z \in \mathbb{R}^d$ qui appartient à la fois à $c(x)$ et à $c(y)$:

il existe deux déplacements g et h tels que $z = g.x = h.y$.

Mais alors $y = h^{-1}.z = (h^{-1}g).x$ et :

$$\forall g' \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d) \quad g'.y = (g'h^{-1}g).x \in c(x)$$

On en déduit $c(y) \subset c(x)$ et en inversant les rôles de x et de y : $c(x) \subset c(y)$.

D'où $c(x) = c(y)$.

(b) On suppose $c(x) = c(y)$.

$y = e.y \in c(y)$ donc $y \in c(x)$.

$\exists g_0 \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$ tq $y = g_0.x$.

$$\delta(x, y) \leq \|y - g_0.x\| = 0$$

Mais $\delta(x, y)$ est la borne inférieure d'une partie de $\mathbb{R}_+$ donc $\delta(x, y) \geq 0$.

On en déduit $\delta(x, y) = 0$.

4 Un problème d'optimisation

(12) (a)

$$\begin{aligned}
J(\tau, R) &= \sum_{i=1}^n |y_i - (Rx_i + \tau)|^2 \\
&= \sum_{i=1}^n |y_i - (Rx_i + \tau) - (\bar{y} - (R\bar{x} + \tau)) + (\bar{y} - (R\bar{x} + \tau))|^2 \\
&= \sum_{i=1}^n |y_i - \bar{y} - R(x_i - \bar{x}) + \bar{y} - (R\bar{x} + \tau)|^2 \\
&= \sum_{i=1}^n \left(|y_i - \bar{y} - R(x_i - \bar{x})|^2 + 2 \langle y_i - \bar{y} - R(x_i - \bar{x}), \bar{y} - (R\bar{x} + \tau) \rangle_{\mathbb{R}^d} + |\bar{y} - (R\bar{x} + \tau)|^2 \right) \\
&= \sum_{i=1}^n |y_i - \bar{y} - R(x_i - \bar{x})|^2 + 2 \sum_{i=1}^n \langle y_i - \bar{y} - R(x_i - \bar{x}), \bar{y} - (R\bar{x} + \tau) \rangle_{\mathbb{R}^d} + n |\bar{y} - (R\bar{x} + \tau)|^2 \\
&= \sum_{i=1}^n |y_i - \bar{y} - R(x_i - \bar{x})|^2 + 2 \left\langle \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y} - R(x_i - \bar{x})), \bar{y} - (R\bar{x} + \tau) \right\rangle_{\mathbb{R}^d} + n |\bar{y} - (R\bar{x} + \tau)|^2 \\
&= \sum_{i=1}^n |y_i - \bar{y} - R(x_i - \bar{x})|^2 + 2 \left\langle \sum_{i=1}^n y_i - n\bar{y} - R \sum_{i=1}^n x_i + nR\bar{x}, \bar{y} - (R\bar{x} + \tau) \right\rangle_{\mathbb{R}^d} + n |\bar{y} - (R\bar{x} + \tau)|^2 \\
&= \sum_{i=1}^n |y_i - \bar{y} - R(x_i - \bar{x})|^2 + 2 \langle n\bar{y} - n\bar{y} - R(n\bar{x}) + nR\bar{x}, \bar{y} - (R\bar{x} + \tau) \rangle_{\mathbb{R}^d} + n |\bar{y} - (R\bar{x} + \tau)|^2 \\
&= \sum_{i=1}^n |y_i - \bar{y} - R(x_i - \bar{x})|^2 + n |\bar{y} - (R\bar{x} + \tau)|^2
\end{aligned}$$

(b) On fixe donc R .

$$\forall \tau \in \mathbb{R}^d \quad J(\tau, R) \geq \sum_{i=1}^n |y_i - \bar{y} - R(x_i - \bar{x})|^2 \text{ avec égalité si, et seulement si, } \tau = \bar{y} - R\bar{x}.$$

D'où le résultat.

(13) (a) Les applications $f_1 \begin{cases} \mathcal{M}_d(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_d(\mathbb{R}) \\ M \mapsto M \end{cases}$ et $f_2 \begin{cases} \mathcal{M}_d(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_d(\mathbb{R}) \\ M \mapsto M^T \end{cases}$ sont continues car linéaires (en dimension finie).

Donc $f \begin{cases} \mathcal{M}_d(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_d(\mathbb{R}) \\ M \mapsto f_2(M)f_1(M) \end{cases}$ est continue.

(b) • $SO_d(\mathbb{R})$ est borné :

$\forall R \in SO_d(\mathbb{R}) \quad \|R\| = \sqrt{\text{tr}(R^T R)} = \sqrt{\text{tr}(I_d)} = \sqrt{d} : SO_d(\mathbb{R})$ est inclus dans la sphère de centre 0 et de rayon $\sqrt{d}$.

• $SO_d(\mathbb{R})$ est fermé :

On utilise la caractérisation séquentielle des fermés.

Soit $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $SO_d(\mathbb{R})$ qui converge vers R .

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f(R_n) = I_d$$

Par continuité de la fonction f , on a en faisant tendre n vers $+\infty$: $f(R) = 0$.

R est donc une matrice orthogonale.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \det(R_n) = 1$$

Par continuité du déterminant, on a en faisant tendre n vers $+\infty$: $\det(\mathbb{R}) = 1$
 R appartient bien à $SO_d(\mathbb{R})$.

- (14) (a) Pour tout i compris entre 1 et n , la fonction $f_i \begin{cases} \mathcal{M}_d(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_d(\mathbb{R}) \\ R \mapsto R(x_i - \bar{x}) \end{cases}$ est continue car linéaire (en dimension finie).

On en déduit que pour tout i compris entre 1 et n , la fonction $g_i \begin{cases} \mathcal{M}_d(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_d(\mathbb{R}) \\ R \mapsto y_i - \bar{y} - R(x_i - \bar{x}) \end{cases}$ est continue.

Par composition, pour tout i compris entre 1 et n , la fonction $h_i \begin{cases} \mathcal{M}_d(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_d(\mathbb{R}) \\ R \mapsto |y_i - \bar{y} - R(x_i - \bar{x})|^2 \end{cases}$ est continue.

Enfin, par addition, la fonction $F \begin{cases} \mathcal{M}_d(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_d(\mathbb{R}) \\ R \mapsto \sum_{i=1}^n |y_i - \bar{y} - R(x_i - \bar{x})|^2 \end{cases}$

D'après le théorème des bornes atteintes, il existe $R_* \in SO_d(\mathbb{R})$ telle que :
 $\forall R \in SO_d(\mathbb{R}) \ F(R) \geq F(R_*)$

Soit $(\tau, R) \in SO_d(\mathbb{R})$.

$$J(\tau, R) \geq J(\tau(R), R) = F(R) \geq F(R_*) = J(\tau(R_*), R_*)$$

- (b) On prend $d = 3$, $n = 1$, $x = (1, 0, 0)$ et $y = (1, 0, 0)$.

$$J(0, I_3) = |y - (I_3 x + 0)|^2 = |y - x|^2 = 0$$

J étant à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, la matrice I_3 convient.

$$\text{Soit } R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

R aussi est une matrice de $SO_3(\mathbb{R})$ telle que $Rx = y$ donc $J(0, R) = 0$ et R convient également.

- (15) Soit $R \in SO_d(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} J(\tau(R), R) &= \sum_{i=1}^n |y_i - \bar{y} - R(x_i - \bar{x})|^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \left(|y_i - \bar{y}|^2 + |R(x_i - \bar{x})|^2 - 2 \langle y_i - \bar{y}, R(x_i - \bar{x}) \rangle_{\mathbb{R}^d} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n |y_i - \bar{y}|^2 + \sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}|^2 - 2 \sum_{i=1}^n \langle y_i - \bar{y}, R(x_i - \bar{x}) \rangle_{\mathbb{R}^d} \quad \text{car } R \text{ est une matrice orthogonale} \\ &= nV(y) + nV(x) - 2 \sum_{i=1}^n \langle (y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})^T, R \rangle \quad \text{Cf la question (3)(a)} \\ &= nV(x) + nV(y) - 2 \langle Z(x, y), R \rangle \quad \text{avec } Z(x, y) = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})^T \end{aligned}$$

Or $\delta(x, y) = \inf_{(\tau, R) \in Dep(\mathbb{R}^d)} J(\tau, R) = \inf_{R \in SO_d(\mathbb{R})} J(\tau(R), R)$ donc d'après la formule qu'on vient d'établir :

$$\delta(x, y) = nV(x) + nV(y) - 2 \sup_{R \in SO_d(\mathbb{R})} \langle Z(x, y), R \rangle$$

5 Calcul de $\delta(x, y)$ dans le cas où $\det(Z(x, y)) > 0$

- (16) S est symétrique réelle (à d lignes et d colonnes) donc il existe une BON $(u_1, \dots, u_d)$ de $\mathbb{R}^d$ formée de vecteurs propres de S .

$$\forall i \in \llbracket 1; d \rrbracket \exists \lambda_i \in \mathbb{R} \text{ tq } Su_i = \lambda_i u_i$$

Quitte à permuter ces vecteurs, on peut supposer $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_d$.

Mais en fait, S est symétrique définie positive :

Soit $v \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$.

$$v^T S v = v^T Z^T Z v = (Zv)^T (Zv) = |Zv|^2$$

Or Z est inversible et v non nul donc Zv est non nul.

On en déduit $v^T S v > 0$.

S étant symétrique définie positive, son spectre est inclus dans $\mathbb{R}_+^*$.

- (17) (a) Soit $(i, j) \in \llbracket 1; d \rrbracket^2$.

$$\begin{aligned} \langle v_i, v_j \rangle_{\mathbb{R}^d} &= v_i^T v_j = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i \lambda_j}} (Zu_i)^T (Zu_j) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\lambda_i \lambda_j}} u_i^T Z^T Z u_j = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i \lambda_j}} u_i^T S u_j \\ &= \frac{1}{\sqrt{\lambda_i \lambda_j}} u_i^T (\lambda_j u_j) = \frac{\lambda_j}{\sqrt{\lambda_i \lambda_j}} \langle u_i, u_j \rangle_{\mathbb{R}^d} \end{aligned}$$

Donc si $i \neq j$, $\langle v_i, v_j \rangle_{\mathbb{R}^d} = 0$ et si $i = j$, $\langle v_i, v_j \rangle_{\mathbb{R}^d} = \frac{\lambda_j}{\sqrt{\lambda_j^2}} = 1$ car $\lambda_j > 0$.

La famille $(v_1, \dots, v_d)$ est donc une famille orthonormée de $\mathbb{R}^d$.

On en déduit que c'est une famille libre de d vecteurs de $\mathbb{R}^d$ de dimension d donc une base de $\mathbb{R}^d$.

- (b) On note Can la base canonique de $\mathbb{R}^d$ et f l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice Z .

$Z = \text{Mat}_{Can}(f) = PMQ$ où : P est la matrice de passage de la base canonique vers $(v_1, \dots, v_d)$ ie $P = V$

M est la matrice de f dans les bases $(u_1, \dots, u_d)$ (au départ) et $(v_1, \dots, v_d)$ (à l'arrivée) ie $M = D$

Q est l'inverse de la matrice passage de la base canonique vers $(u_1, \dots, u_d)$ ie $Q = U^{-1}$

Mais ce sont deux bases orthonormées donc $U \in O_d(\mathbb{R})$ et $Q = U^T$

$$(18) \quad Z_1^T Z_1 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$Z_1^T Z_1$ étant diagonale, on immédiatement $\lambda_1 = 4$ et $\lambda_2 = 1$.

On peut prendre $u_1 = (1, 0)$ et $u_2 = (0, 1)$.

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} Z_1 u_1 = \frac{1}{2} (0, 2) = (0, 1)$$

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} Z_1 u_2 = (1, 0)$$

$$\text{Donc } V = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } Z_1 = V D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Z_2^T Z_2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$Z_2^T Z_2$ étant diagonale, on immédiatement $\lambda_1 = 4$ et $\lambda_2 = 1$.

On peut prendre $u_1 = (1, 0)$ et $u_2 = (0, 1)$.

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} Z_2 u_1 = \frac{1}{2} (0, -2) = (0, -1)$$

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} Z_2 u_2 = (1, 0)$$

$$\text{Donc } V = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } Z_2 = VD = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(19) (a) $Z = VDU^T$ donc $\det(Z) = \det(V) \det(D) \det(U^T) = \det(V) \det(D) \det(U)$.

Par hypothèse, $\det(Z) > 0$.

$\det(D) = \prod_{i=1}^n \sqrt{\lambda_i}$ est un produit de nombres strictement positifs donc $\det(D) > 0$.

On en déduit $\det(V) \det(U) > 0$.

Mais le déterminant d'une matrice orthogonale vaut 1 ou -1 donc $\det(V) \det(U) = 1$.

Soit $R \in SO_d(\mathbb{R})$.

La matrice ${}^T V R U$ est un produit de matrices orthogonales donc c'est une matrice orthogonale.

De plus :

$$\det({}^T V R U) = \det({}^T V) \det(R) \det(U) = \det(V) \det(R) \det(U) = \det(R) = 1 \text{ car } \det(V) \det(U) = 1.$$

La matrice ${}^T V R U$ appartient bien à $SO_d(\mathbb{R})$.

(b) On note $A = \sup_{R \in SO_d(\mathbb{R})} \langle Z, R \rangle$ et $B = \sup_{R \in SO_d(\mathbb{R})} \langle D, R \rangle$.

Soit $R \in SO_d(\mathbb{R})$.

D'après la question (3) :

$$\langle Z, R \rangle = \langle V D U^T, R \rangle = \langle D U^T, V^T R \rangle = \langle D, V^T R U \rangle$$

$V^T R U \in SO_d(\mathbb{R})$ donc $\langle Z, R \rangle \leq B$ indépendant de Z .

On en déduit $A \leq B$.

On montre comme dans la question précédente que $V R U^T$ appartient à $SO_d(\mathbb{R})$.

On en déduit :

$$\langle Z, V R U^T \rangle \leq A$$

Mais avec le calcul précédent :

$$\langle Z, V R U^T \rangle = \langle D, V^T V R U^T U \rangle = \langle D, R \rangle$$

Donc $\langle D, R \rangle \leq A$ indépendant de R .

On en déduit $B \leq A$ puis $B = A$.

(20) D'après la question (4)(b) :

$$\forall R \in SO_d(\mathbb{R}) \quad \langle D, R \rangle \leq \text{tr}(D)$$

Il y a égalité pour $R = I_d$ donc : $\sup_{R \in SO_d(\mathbb{R})} \langle D, R \rangle = \text{tr}(D)$

D'après la question précédente, $\sup_{R \in SO_d(\mathbb{R})} \langle Z, R \rangle = \text{tr}(D)$ qui est la somme des valeurs singulières de la matrice Z .

Il n'y a plus qu'à invoquer la question (15) :

$$\delta(x, y) = nV(x) + nV(y) - 2\text{tr}(D)$$

6 Le cas où $\det(Z(x, y)) < 0$

- (21) (a) Soit λ une valeur propre réelle de R : cette précision manque dans l'énoncé.
 Il existe $X \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ tel que $RX = \lambda X$.
 R est une matrice orthogonale donc $|RX| = |X|$ et $|RX| = |\lambda X| = |\lambda| |X|$ donc $|\lambda| |X| = |X|$ avec $|X| > 0$ ce qui entraîne $|\lambda| = 1$.
 λ étant réel, $\lambda = \pm 1$.
- (b) $\det(R) \det(I + R^T) = \det(R(I + R^T)) = \det(R + RR^T)$
 R est une matrice orthogonale donc on a $R^T R = I_d$ mais aussi $RR^T = I_d$, ce qui permet de conclure.
- (c) $I + R^T = (I + R)^T$ donc $\det(I + R^T) = \det(I + R)$ et :
 $\det(I + R) = \det(R) \det(I + R)$ ou encore $\det(I + R)(\det(R) - 1)$
 On en déduit $\det(R) = 1$ ou $\det(I + R) = 0$.
 Donc si $\det(R) = -1$ alors $\det(I + R) = 0$ et -1 est valeur propre de R .
- (22) (a) Comme on vient de le remarquer, -1 est valeur propre de R .
 Soit u_d un vecteur propre unitaire de R associé à la valeur propre -1 .
 D'après le théorème de la base orthonormée incomplète, on peut trouver $d-1$ vecteurs $u_1, \dots, u_{d-1}$ tels que $(u_1, \dots, u_d)$ soit une BON de $\mathbb{R}^d$.
 Soit $x \in E_1 = \text{Vect}(u_1, \dots, u_{d-1})$.
 $u_d^T R x = (R^T u_d)^T x$
 R est une matrice orthogonale donc $R^T = R^{-1}$.
 $R u_d = -u_d$ donc en appliquant R^{-1} , on obtient : $u_d = -R^{-1} u_d$
 Donc $u_d^T R x = (-u_d)^T x = -u_d^T x = 0$ car x est combinaison linéaire de vecteurs orthogonaux à u_d .
- (b) Si $x \in E_1$ alors $R x \in u_d^\perp$.
 Mais $(u_1, \dots, u_d)$ étant une BON de $\mathbb{R}^d$, $u_d^\perp = E_1$ donc :
 si $x \in E_1$ alors $R x \in E_1$
 En d'autres termes, $R(E_1) \subset E_1$.
 Mais R est un automorphisme orthogonal de $\mathbb{R}^d$ donc un automorphisme de $\mathbb{R}^d$ et R conserve les dimensions.
 Donc $R(E_1)$ a la même dimension que E_1 et finalement $R(E_1) = E_1$.
- (23) (a) U est la matrice de passage de la base canonique qui est orthonormée vers la base $(u_1, \dots, u_d)$ qui est également orthonormée donc U est une matrice orthogonale.
- $$\begin{aligned} \langle S, R' \rangle &= \text{tr}(S^T R') = \text{tr}(U^T D^T U U^T R U) = \text{tr}(U^T D I_n R U) \\ &= \text{tr}(U^{-1} D R U) = \text{tr}(D R) \text{ car deux matrices semblables ont la même trace} \\ &= \text{tr}(D^T R) = \langle D, R \rangle \end{aligned}$$
- (b) Par les formules de changement de base, R' est la matrice de l'endomorphisme canoniquement associé à R dans la base $(u_1, \dots, u_d)$.
 D'après la question 22, R' s'écrit en blocs $R' = \begin{pmatrix} R_0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
 R' est un produit de matrices orthogonales donc R' est une matrice orthogonale : $(R')^T R' = I_d$.
 Mais $(R')^T R' = \begin{pmatrix} R_0^T & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_0^T R_0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ donc $R_0^T R_0 = I_{d-1}$ et $R_0 \in O_{d-1}(\mathbb{R})$

(Q24) (a) S est une matrice symétrique qu'on peut écrire en blocs $S = \begin{pmatrix} S_0 & C \\ C^T & S_{d,d} \end{pmatrix}$ où C est une colonne à $d-1$ lignes.

$$SR' = \begin{pmatrix} S_0 & C \\ C^T & S_{d,d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_0 R_0 & -C \\ C^T R_0 & -S_{d,d} \end{pmatrix}$$

On en déduit :

$$\langle D, R \rangle = \langle S, R' \rangle = \text{tr}(S^T R') = \text{tr}(SR') = \text{tr}(S_0 R_0) - S_{d,d}$$

(b) S est une matrice symétrique dont les valeurs propres sont positives : ce sont les α_i .

Donc S est une matrice symétrique positive.

S_0 est clairement symétrique, montrons qu'elle est positive.

Soit $X \in \mathbb{R}^{d-1}$.

Soit $Y = \begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^d$.

$$SY = \begin{pmatrix} S_0 X \\ C^T X \end{pmatrix} \text{ et } Y^T SY = X^T S_0 X$$

S étant positive, $Y^T SY \geq 0$.

On en déduit $X^T S_0 X \geq 0$.

S_0 est donc une matrice symétrique positive.

D'après le théorème spectral, il existe une matrice $\Omega \in O_{d-1}(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale à coefficients diagonaux positifs telles que $S_0 = \Omega^T \Delta \Omega$.

$\text{tr}(S_0 R_0) = \text{tr}(\Omega^T \Delta \Omega R_0) = \text{tr}(\Delta \Omega R_0 \Omega^T) = \text{tr}(\Delta \Omega R_0 \Omega^T)$ car Δ est diagonale donc symétrique.

Donc $\text{tr}(S_0 R_0) = \langle \Delta, \Omega R_0 \Omega^T \rangle$

$\Omega R_0 \Omega^T$ est une matrice orthogonale donc d'après la question (4) :

$$\langle \Delta, \Omega R_0 \Omega^T \rangle \leq \text{tr}(\Delta)$$

Mais Δ et S_0 sont semblables donc $\text{tr}(\Delta) = \text{tr}(S_0)$.

Finalement, on aboutit bien à $\text{tr}(S_0 R_0) \leq \text{tr}(S_0)$.

(c) $\text{tr}(S_0) + S_{d,d} = \text{tr}(S)$

S et D sont semblables donc $\text{tr}(S) = \text{tr}(D)$ et $\text{tr}(S_0) + S_{d,d} = \text{tr}(D)$

$$\begin{aligned} \langle D, R \rangle &= \text{tr}(S_0 R_0) - S_{d,d} \\ &\leq \text{tr}(S_0) - S_{d,d} \text{ avec la question (24)(b)} \\ &= \text{tr}(D) - S_{d,d} - S_{d,d} = \text{tr}(D) - 2S_{d,d} \end{aligned}$$

(Q25) (a) $S = U^T D U$ donc les formules du calcul matriciel donne :

$$\begin{aligned} S_{d,d} &= \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d (U^T)_{d,k} D_{k,l} U_{l,d} = \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d U_{k,d} D_{k,l} U_{l,d} \\ &= \sum_{k=1}^d U_{k,d} D_{k,k} U_{k,d} \text{ car } D_{k,l} = 0 \text{ si } l \neq k \\ &= \sum_{k=1}^d \alpha_k U_{k,d}^2 \end{aligned}$$

(b) $\forall j \in \llbracket 1; d \rrbracket \alpha_j \geq \alpha_d$: c'est une hypothèse de l'énoncé.

On peut multiplier par $U_{j,d}^2 \geq 0$.

$$\forall j \in \llbracket 1; d \rrbracket \alpha_j U_{j,d}^2 \geq \alpha_d U_{j,d}^2$$

En sommant, on obtient :

$$S_{d,d} \geq \alpha_d \sum_{j=1}^d U_{j,d}^2$$

Mais $\sum_{j=1}^d U_{j,d}^2$ est le carré de la norme du d -ème vecteur ligne de la matrice orthogonale

$$U \text{ donc } \sum_{j=1}^d U_{j,d}^2 = 1.$$

On en déduit : $S_{d,d} \geq \alpha_d$ puis :

$$\langle D, R \rangle = \text{tr}(D) - 2S_{d,d} \leq \sum_{i=1}^d \alpha_i - 2\alpha_d = \sum_{i=1}^{d-1} \alpha_i - \alpha_d$$

(26) Si on récapitule ce qui précède :

$$\forall R \in O_d(\mathbb{R}) \setminus SO_d(\mathbb{R}) \quad \langle D, R \rangle \leq \sum_{i=1}^{d-1} \alpha_i - \alpha_d \text{ valeur atteinte pour } R = \text{Diag}(1, \dots, 1, -1)$$

$$\text{Donc } \sup_{R \in O_d(\mathbb{R}) \setminus SO_d(\mathbb{R})} \langle D, R \rangle = \sum_{i=1}^{d-1} \alpha_i - \alpha_d$$

On revient alors à la question 19. En reprenant le même raisonnement, on montre :

$$\sup_{R \in SO_d(\mathbb{R})} \langle Z, R \rangle = \sup_{R \in O_d(\mathbb{R}) \setminus SO_d(\mathbb{R})} \langle D, R \rangle$$

et on obtient :

$$\delta(x, y) = nV(x) + nV(y) - 2 \left(\sum_{i=1}^{d-1} \sqrt{\lambda_i} - \sqrt{\lambda_d} \right)$$