

CCP 2023 PC

Correction

941

1 Exercice 1, endomorphisme cyclique

1.1 Partie I : étude d'un premier exemple

Q1 $f(v) = (4, 1)$ n'est pas colinéaire à v donc la famille $(v, f(v))$ est libre. Comme c'est une famille de deux vecteurs dans un espace de dimension 2, c'est une base de cet espace.

Q2 La matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

On en déduit : $\chi_f = X^2 - \text{tr}(f)X + \det(f) = X^2 - 5X + 6$.

$\Delta = 5^2 - 4 \times 6 = 1$.

Donc χ_f a deux racines réelles simples : 2 et 3. Ce sont les valeurs propres de f .

$$\begin{aligned} (x, y) \in E_2(f) &\iff \begin{cases} 4x - 2y = 2x \\ x + y = 2y \end{cases} \iff \begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \\ &\iff x = y \end{aligned}$$

$((1, 1))$ est une base de $E_2(f)$.

$$\begin{aligned} (x, y) \in E_3(f) &\iff \begin{cases} 4x - 2y = 3x \\ x + y = 3y \end{cases} \iff \begin{cases} x - 2y = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \\ &\iff x = 2y \end{aligned}$$

$((2, 1))$ est une base de $E_3(f)$.

Q3 La réponse est oui : si w est un vecteur propre de f alors w est non nul et la famille $(w, f(w))$ n'est pas une base de $\mathbb{R}^2$ car elle est liée.

1.2 Partie II : étude d'un deuxième exemple

Q4 $M^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = M + 2I_3$ donc $g^2 = g + 2id_{\mathbb{R}^3}$.

Q5 Le polynôme $X^2 - X - 2 = (X + 1)(X - 2)$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$ donc g est diagonalisable.

De plus $\text{Sp}(g) \subset \{-1; 2\}$.

g étant diagonalisable sans être une homothétie, g a au moins deux valeurs propres distinctes.

Donc $\text{Sp}(g) = \{-1; 2\}$ et l'un des sous-espaces propres de g est de dimension 2, l'autre de dimension 1.

Q6 $\forall v \in \mathbb{R}^3 \ g^2(v) = g(v) + 2v$

Donc pour tout $v \in \mathbb{R}^3$, la famille $(v, g(v), g^2(v))$ est liée.
 g n'est pas cyclique.

1.3 Partie III : étude d'un troisième exemple

Q7 Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{R}_n[X]$.

$$\begin{aligned} \Delta(P) &= \sum_{k=0}^n a_k (X+1)^k - \sum_{k=0}^n a_k X^k = \sum_{k=0}^n a_k ((X+1)^k - X^k) \\ &= \sum_{k=1}^n \left(a_k \sum_{l=0}^{k-1} \binom{k}{l} X^l \right) \text{ par la formule du binôme de Newton} \\ &= \sum_{l=0}^{n-1} \left(\sum_{k=l+1}^n \binom{k}{l} a_k \right) X^l \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \subset \mathbb{R}_n[X] \end{aligned}$$

De plus Δ est linéaire :

Soient $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda P + \mu Q) &= (\lambda P + \mu Q)(X+1) - (\lambda P + \mu Q)(X) \\ &= \lambda P(X+1) + \mu Q(X+1) - \lambda P(X) - \mu Q(X) \\ &= \lambda(P(X+1) - P(X)) + \mu(Q(X+1) - Q(X)) \\ &= \lambda \Delta(P) + \mu \Delta(Q) \end{aligned}$$

Q8 Cela a été fait plus haut.

$$\Delta(X^0) = 0$$

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket \ \Delta(X^k) = \sum_{l=0}^{k-1} \binom{k}{l} X^l$$

Q9 Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ non constant.

Soit d le degré de P . On a $d \geq 1$.

D'après la question 7 :

$$\Delta(P) = \sum_{l=0}^{d-1} \left(\sum_{k=l+1}^d \binom{k}{l} a_k \right) X^l = da_d X^{d-1} + \sum_{l=0}^{d-2} \left(\sum_{k=l+1}^d \binom{k}{l} a_k \right) X^l$$

$da_d \neq 0$ donc $\Delta(P)$ est de degré $d-1$.

Q10 Les polynômes $X^n, \Delta(X^n), \dots, \Delta^n(X^n) = n!$ sont de degrés $n, n-1, \dots, 0$ (récurrence) donc forment une famille libre de $n+1$ éléments de $\mathbb{R}_n[X]$ qui est de dimension $n+1$. $(X^n, \Delta(X^n), \dots, \Delta^n(X^n) = n!)$ est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

On en déduit que Δ est cyclique.

1.4 Partie IV : cas d'un endomorphisme diagonalisable

Q11 Pour tout $p \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(p) : h^p(v) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \lambda_k^p v_k$.

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k \lambda_k^0 v_k = \sum_{k=1}^n \alpha_k v_k = v \text{ donc } \mathcal{P}(0) \text{ est vraie.}$$

On suppose $\mathcal{P}(k)$ vraie.

$$\begin{aligned}
 h^{p+1}(v) &= h(h^p(v)) = h\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k \lambda_k^p v_k\right) \\
 &= \sum_{k=1}^n \alpha_k \lambda_k^p h(v_k) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \lambda_k^p \lambda_k v_k \\
 &= \sum_{k=1}^n \alpha_k \lambda_k^{p+1} v_k
 \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(p+1)$ est vraie.

Q12

$$\begin{aligned}
 \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) &= \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_1 \lambda_1 & \dots & \alpha_1 \lambda_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_n & \alpha_n \lambda_n & \dots & \alpha_n \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} \\
 &= \alpha_1 \dots \alpha_n \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_n & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} \quad \text{linéarité du déterminant par rapport à chaque ligne} \\
 &= \alpha_1 \dots \alpha_n \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_j - \lambda_i) \quad \text{déterminant de Vandermonde}
 \end{aligned}$$

Q13 On suppose h cyclique.

Il existe donc $v \in E$ tel que la famille $\mathcal{F}$ soit une base de E .

Si on note $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ les coordonnées de v dans la base $\mathcal{B}$ alors $\alpha_1 \dots \alpha_n \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_j - \lambda_i) \neq 0$.

Tous les facteurs de ce produit sont donc non nuls et h admet n valeurs propres distinctes.

Réciproquement, on suppose que h admet n valeurs propres distinctes.

On prend $v = \sum_{k=1}^n v_k$.

$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_j - \lambda_i) \neq 0$ donc $\mathcal{F}$ est une base de E .

On en déduit que h est cyclique.

2 La fonction dilogarithme

2.1 Partie I : existence et premières propriétés de la fonction dilogarithme

Q14 Soit $(t, x) \in \mathbb{R}_+^* \times]-\infty; 1]$.

$t > 0$ donc $e^t > 1 \geq x$

Le dénominateur de f ne s'annulant pas, f est bien définie sur $\mathbb{R}_+^* \times]-\infty; 1]$.

Q15 Soit $g = f(., 1)$.

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^* \quad g(t) = \frac{t}{e^t - 1}$$

- g est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
 - g est prolongeable en une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$:
En 0 $e^t - 1 \sim t$ donc $g(t) \xrightarrow[t>0]{t \rightarrow 0} 1$
 - g est intégrable en $+\infty$:
 $t^2 g(t) \sim_{+\infty} t^3 e^{-t} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$
Donc $g(t) = o_{+\infty} \left(\frac{1}{t^2} \right)$ avec $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ intégrable en $+\infty$.
- On en déduit que g est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Q16 Soit $x \in]-\infty; 1]$.

La fonction $f(., x)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ (et même sur $\mathbb{R}_+$ si $x < 1$).

$$\forall t > 0 \quad 0 < e^t - 1 \leq e^t - x$$

Donc :

$$\forall t > 0 \quad 0 < \frac{1}{e^t - x} \leq \frac{1}{e^t - 1}$$

puis :

$$\forall t > 0 \quad 0 < f(t, x) \leq f(t, 1)$$

Donc :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^* \quad |f(t, x)| \leq |f(t, 1)|$$

La fonction $f(., 1)$ étant intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit que la fonction $f(., x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (et même sur $\mathbb{R}_+$ si $x < 1$).

Q17 Il suffit de montrer que la fonction $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} f(t, x) dt$ est continue sur $] -\infty; 1]$,

L étant le produit de cette fonction et de la fonction $x \mapsto x$, trivialement continue.

- La fonction f est continue par rapport à x .
- La fonction f est continue (par morceaux) par rapport à t .
- **Domination**

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^* \quad |f(t, x)| \leq |f(t, 1)| \text{ avec } f(., 1) \text{ continue, positive et intégrable sur } \mathbb{R}_+^*$$

D'après le théorème de continuité sous le signe $\int$, F est continue sur $] -\infty; 1]$.

2.2 Partie II : développement en série entière

Q18 La fonction s_n est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $t^2 s_n(t) = x^n t^3 e^{-(n+1)t} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$ (car $n+1 > 0$)
donc en raisonnant comme pour la fonction $f(., 1)$, s_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

On en déduit que l'intégrale $\int_0^{+\infty} s_n(t) dt$ converge.

Pour le calcul, on procède à une intégration par parties :

$$u(t) = t, \quad u'(t) = 1$$

$$v'(t) = e^{-(n+1)t}, \quad v(t) = -\frac{e^{-(n+1)t}}{n+1}$$

u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et $u(t)v(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$: l'intégration par parties est justifiée.

Comme de plus $u(0) = 0$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} s_n(t) dt &= x^n \int_0^{+\infty} t e^{-(n+1)t} dt = \frac{x^n}{n+1} \int_0^{+\infty} e^{-(n+1)t} dt \\ &= \frac{x^n}{n+1} \left[-\frac{e^{-(n+1)t}}{n+1} \right]_0^{+\infty} = \frac{x^n}{(n+1)^2} \end{aligned}$$

Q19 Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N} \quad s_n(t) &= t e^{-t} (x e^{-t})^n \\ |x e^{-t}| &= |x| e^{-t} \leq e^{-t} \text{ car } x \in [-1; 1] \\ t > 0 \text{ donc } |x e^{-t}| &< 1\end{aligned}$$

On en déduit que la série géométrique de terme général $s_n(t)$ converge.

On peut déjà affirmer que la série de fonctions de terme général s_n converge.

De plus :

$$\begin{aligned}\forall t > 0 \quad \sum_{n=0}^{+\infty} s_n(t) &= t e^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} (x e^{-t})^n = \frac{t e^{-t}}{1 - x e^{-t}} \\ &= \frac{t}{e^t - x} \text{ en multipliant en haut et en bas par } e^t\end{aligned}$$

Q20 $\forall n \in \mathbb{N} \quad \left| \frac{x^n}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2} \text{ car } x \in [-1; 1]$

Or la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ converge donc la série de terme général $\frac{x^n}{n^2}$ converge absolument donc converge.

On applique ensuite le théorème N1.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction s_n est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ cf la question 18.
- La série de fonctions de terme général s_n converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa somme, la fonction $f(., x)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
- La série de terme général $\int_0^{+\infty} |s_n(t)| dt$ converge.

En effet :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq \int_0^{+\infty} |s_n(t)| dt = \int_0^{+\infty} t e^{-(n+1)t} |x|^n dt = \frac{|x|^n}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{(n+1)^2} \text{ terme}$$

général d'une série convergente

On en déduit :

$$\begin{aligned}L(x) &= x \int_0^{+\infty} f(t, x) dt = x \int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} s_n(t) \right) dt \\ &= x \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} s_n(t) dt = x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)^2} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}\end{aligned}$$

Q21

$$\begin{aligned}\forall x \in [-1; 1] \quad L(x) + L(-x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n^2} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1 + (-1)^n) x^n}{n^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2x^{2k}}{(2k)^2} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{k^2} = \frac{1}{2} L(x^2)\end{aligned}$$

Q22 D'après l'énoncé, $L(1) = \frac{\pi^2}{6}$.

D'après la question précédente (avec $x = 1$), $L(-1) = -\frac{1}{2}L(1) = -\frac{\pi^2}{12}$

2.3 Partie III : Une autre propriété

Q23 Le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n^2}$ est supérieur ou égal à 1 car elle converge pour tout $x \in [-1; 1]$ (en fait on peut facilement montrer qu'il vaut 1).
En tout cas, $] -1; 1[\subset] -R; R[$, ce qui légitime la dérivation terme à terme.

$$\begin{aligned} \forall x \in] -1; 1[\quad L'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1} n \\ &= 1 \text{ si } x = 0 \\ &= \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \text{ si } x \neq 0 \\ &= x \times \frac{-\ln(1-x)}{x} \end{aligned}$$

Q24 Par composition et opérations algébriques, h est $\mathcal{C}^1$ sur $]0; 1[$ et :

$$\begin{aligned} \forall x \in]0; 1[\quad h'(x) &= L'(x) - L'(1-x) + \frac{\ln(1-x)}{x} - \frac{\ln(x)}{1-x} \\ &= \frac{-\ln(1-x)}{x} + \frac{\ln(x)}{1-x} + \frac{\ln(1-x)}{x} - \frac{\ln(x)}{1-x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc h est constante sur $]0; 1[$.

Q25 $\exists C \in \mathbb{R}$ tq $\forall x \in]0; 1[\quad h(x) = C$

L est continue sur $] -\infty; 1]$ donc $L(x) + L(1-x) \xrightarrow[x>0]{x \rightarrow 0} L(0) + L(1) = L(1)$

De plus $\ln(x) \ln(1-x) \sim_{0+} -x \ln(x) \xrightarrow[x>0]{x \rightarrow 0} 0$

Donc $C = L(1) = \frac{\pi^2}{6}$

Q26 $\forall t \in \mathbb{R}_+^* \quad \frac{t}{2e^t - 1} = \frac{1}{2} \frac{t}{e^t - 1/2}$

Donc $\int_0^{+\infty} \frac{t}{2e^t - 1} dt$ converge et vaut $L\left(\frac{1}{2}\right)$.

Or :

$$L\left(\frac{1}{2}\right) + L\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\ln\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\text{Donc } L\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2} (\ln(2))^2$$

3 Exercice 3 : un jeu de société

3.1 Partie I : préliminaires

3.1.1 Modélisation

Q26 Au cours du n -ième déplacement, le pion avance de X_n cases.

A l'issue du n -ième déplacement, le pion se trouve sur la case qui porte le numéro S_n .

Q27 Si le pion atteint ou dépasse la case qui porte le numéro A , T est le nombre de tours qui ont été nécessaires.

Si le pion n'atteint jamais cette case, $T = 0$.

3.1.2 Calcul de la somme d'une série entière

- La fonction $x \mapsto 1 - x$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ car polynomiale et ne s'annule pas sur $] - 1; 1[$ donc la fonction f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $] - 1; 1[$.

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(p) : \forall x \in] - 1; 1[f^{(p)}(x) = \frac{p!}{(1-x)^{p+1}}$

$\mathcal{P}(0)$ est vraie :

$$\forall x \in] - 1; 1[f^{(0)}(x) = f(x) = \frac{1}{1-x} = \frac{0!}{(1-x)^{0+1}}$$

On suppose $\mathcal{P}(p)$ vraie.

$$\forall x \in] - 1; 1[f^{(p)}(x) = \frac{p!}{(1-x)^{p+1}} = p!(1-x)^{-p-1}$$

Donc :

$$\forall x \in] - 1; 1[f^{(p+1)}(x) = p! \times (-1) \times (-p-1) \times (1-x)^{-p-1-1} = \frac{(p+1)!}{(1-x)^{p+2}}$$

Donc $\mathcal{P}(p+1)$ est vraie.

Q29 Soit $r > 0$.

$$\forall n \geq p \quad u_n = \binom{n}{p} r^n = \frac{n!}{p!(n-p)!} r^n > 0$$

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+1)!}{p!(n+1-p)!} \frac{p!(n-p)!}{n!} r = \frac{(n+1)!}{n!} \frac{(n-p)!}{(n+1-p)!} r \\ &= \frac{n+1}{n+1-p} r \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} r \end{aligned}$$

Par la règle de d'Alembert :

Si $r > 1$ alors la série de terme général $\binom{n}{p} r^n$ diverge.

Si $r < 1$ alors la série de terme général $\binom{n}{p} r^n$ converge.

Donc le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq p} \binom{n}{p} x^n$ vaut 1.

Q30 $\forall x \in] - 1; 1[f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$

Le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} x^n$ vaut 1 donc on peut dériver terme à terme sur $] - 1; 1[$.

$$\begin{aligned} \forall x \in] - 1; 1[\quad \frac{p!}{(1-x)^{p+1}} &= \sum_{n=p}^{+\infty} \frac{n!}{(n-p)!} x^{n-p} \\ \frac{x^p}{(1-x)^{p+1}} &= \sum_{n=p}^{+\infty} \frac{n!}{(n-p)! p!} x^n \\ &= \sum_{n=p}^{+\infty} \binom{n}{p} x^n \end{aligned}$$

3.2 Partie II : étude d'un premier cas

3.2.1 Loi des variables aléatoires S_n et T

Q31 Les variables aléatoires X_k suivent la loi uniforme sur $\{0; 1\}$ ie la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.

$S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ où $X_1, \dots, X_n$ sont n variables aléatoires mutuellement indépendantes qui suivent la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$. On en déduit que S_n suit la loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{2}$.

Q32 Le pion n'avance pas ou avance d'une seule case, il lui faut donc au moins A déplacements pour atteindre la case qui porte le numéro A .

$$T(\Omega) = \{0\} \cup \llbracket A; +\infty \rrbracket.$$

Q33 $(T = k) = (S_{k-1} = A - 1) \cap (X_k = 1)$.

En effet si $T = k$, le pion est situé sur une case de numéro strictement inférieur à k à l'instant $k - 1$ et le pion ne peut se déplacer que d'une case par tour. Donc $S_k = A$, $X_k = 1$ et $S_{k-1} = A - 1$.

Réciproquement si $S_{k-1} = A - 1$ et $X_k = 1$ alors $S_k = S_{k-1} + X_k = A$ et pour tout $l < k$, $S_l \leq S_{k-1} < A$ donc $T = k$.

$$P(T = k) = P((S_{k-1} = A - 1) \cap (X_k = 1))$$

Mais par le lemme des coalitions, $S_{k-1} = \sum_{l=1}^{k-1} X_l$ et X_k sont indépendantes donc :

$$\begin{aligned} \forall k \geq A \quad P(T = k) &= P(S_{k-1} = A - 1)P(X_k = 1) = \binom{k-1}{A-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{A-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1-(A-1)} \frac{1}{2} \\ &= \binom{k-1}{A-1} \frac{1}{2^k} \end{aligned}$$

Q34 $T(\Omega) = \{0\} \cup \llbracket A; +\infty \rrbracket$ donc :

$$\begin{aligned} P(T = 0) &= 1 - \sum_{k=A}^{+\infty} P(T = k) = 1 - \sum_{k=A}^{+\infty} \binom{k-1}{A-1} \frac{1}{2^k} \\ &= 1 - \sum_{l=A-1}^{+\infty} \binom{l}{A-1} \frac{1}{2^{l+1}} = 1 - \frac{1}{2} \sum_{l=A-1}^{+\infty} \binom{l}{A-1} \frac{1}{2^l} \\ &= 1 - \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{A-1}}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^A} = 1 - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^A}{\left(\frac{1}{2}\right)^A} = 1 - 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

3.2.2 Espérance de la variable aléatoire T

Q35 Soit $r > 0$.

$$\forall k \geq A \quad v_k = \binom{k-1}{A-1} \frac{1}{2^k} r^k > 0$$

$$\begin{aligned} \frac{v_{k+1}}{v_k} &= \frac{k!}{(A-1)!(k-A+1)!} \frac{(A-1)!(k-A)!}{(k-1)!} \frac{r}{2} \\ &= \frac{k}{k-A+1} \frac{r}{2} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \frac{r}{2} \end{aligned}$$

Par la règle de d'Alembert :

Si $r < 2$, la série de terme général $\binom{k-1}{A-1} \frac{1}{2^k} r^k$ converge.

Si $r > 2$, la série de terme général $\binom{k-1}{A-1} \frac{1}{2^k} r^k$ diverge.

Donc le rayon de convergence cherché vaut 2.

$$\begin{aligned} \forall x \in]-2; 2[\quad G_T(x) &= \sum_{k=A}^{+\infty} \binom{k-1}{A-1} \left(\frac{x}{2}\right)^k = \sum_{l=A-1}^{+\infty} \binom{l}{A-1} \left(\frac{x}{2}\right)^{l+1} \\ &= \frac{x}{2} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{A-1}}{\left(1 - \frac{x}{2}\right)^A} = \frac{\frac{x^A}{2^A}}{\frac{(2-x)^A}{2^A}} = \frac{x^A}{(2-x)^A} \\ &= \left(\frac{x}{2-x}\right)^A \end{aligned}$$

Q36 La fonction G_T est dérivable en 1 donc T a une espérance et $E(T) = G'_T(1)$.

$$\forall x \in]-2; 2[\quad G'_T(x) = A \frac{2-x+x}{(2-x)^2} \left(\frac{x}{2-x}\right)^{A-1} = \frac{2A}{(2-x)^2} \left(\frac{x}{2-x}\right)^{A-1}$$

On en déduit $E(T) = 2A$

Remarque

Si Y suit une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$ alors :

$$\forall x \in]-2; 2[\quad G_Y(x) = \frac{\frac{1}{2}x}{1 - \left(1 - \frac{1}{2}\right)x} = \frac{x}{2-x}$$

Donc $G_T = (G_Y)^A$ ie T a la même loi que la somme de A variables aléatoires mutuellement indépendantes qui suivent toutes la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$.

Cela peut s'intuiter sans calcul : T est le temps d'attente du A -ième succès dans une suite d'épreuve indépendantes où la probabilité de succès vaut $\frac{1}{2}$.

4 Partie III : étude d'un second cas

4.1 Calcul de la probabilité $P(S_n \leq k)$

Q37

$$\begin{aligned}
 \forall k \in \llbracket 0; A-1 \rrbracket \quad P(S_{n+1} \leq k) &= \sum_{l=0}^{M-1} P\left(\left(\sum_{i=1}^{n+1} X_i \leq k\right) \cap (X_{n+1} = l)\right) \\
 &= \sum_{l=0}^{M-1} P\left(\left(\sum_{i=1}^n X_i \leq k-l\right) \cap (X_{n+1} = l)\right) \\
 &= \sum_{l=0}^{M-1} P\left(\sum_{i=1}^n X_i \leq k-l\right) P(X_{n+1} = l) \\
 &\quad \text{par indépendance avec le lemme des coalitions} \\
 &= \sum_{l=0}^{M-1} P(S_n \leq k-l) \frac{1}{M} \\
 &= \frac{1}{M} \sum_{l=0}^k P(S_n \leq k-l) \quad \text{car } S_n \geq 0 \\
 &\quad \text{donc } (S_n \leq k-l) \text{ avec } k-l < 0 \text{ est impossible}
 \end{aligned}$$

Q38 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $\mathcal{P}(n) : \forall k \in \llbracket 0; A-1 \rrbracket; P(S_n \leq k) = \frac{1}{M^n} \binom{n+k}{n}$

Soit $k \in \llbracket 0; A-1 \rrbracket$.

$A \leq M$ donc $k \leq M-1$ et :

$$P(S_1 \leq k) = P(X_1 \leq k) = \frac{k+1}{M} = \frac{1}{M^1} \binom{n+1}{n}$$

Donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie.

$$\begin{aligned}
 \forall k \in \llbracket 0; A-1 \rrbracket \quad P(S_{n+1} \leq k) &= \frac{1}{M} \sum_{l=0}^k P(S_n \leq k-l) \\
 &= \frac{1}{M} \sum_{l=0}^k \frac{1}{M^n} \binom{n+k-l}{n} \quad \text{car } k-l \in \llbracket 0; A-1 \rrbracket \\
 &= \frac{1}{M^{n+1}} \binom{n+1+k}{n+1} \quad \text{d'après la formule fournie par l'énoncé}
 \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

4.2 Espérance de la variable aléatoire T

Q39 Les événements $(T > n)$ et $(S_n < A)$ sont identiques donc :

$$P(T > n) = P(S_n < A) = P(S_n \leq A-1) = \frac{1}{M^n} \binom{n+A-1}{n} = \frac{1}{M^n} \binom{n+A-1}{A-1}$$

Il est écrit dans l'énoncé que $M \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$ donc $M \geq 2$.

D'après la question 29, la série $\sum_{k \geq A-1} \binom{k}{A-1} \frac{1}{M^k}$ converge.

On en déduit que la série $\sum_{n \geq 0} \binom{n+A-1}{A-1} \frac{1}{M^{n+A-1}}$ converge.

Donc la série $\sum_{n \geq 0} \binom{n+A-1}{A-1} \frac{1}{M^n}$ converge et T a une espérance.

Le calcul de l'espérance se fait avec la question 30 :

$$\begin{aligned}
 E(T) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+A-1}{A-1} \frac{1}{M^n} = M^{A-1} \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+A-1}{A-1} \frac{1}{M^{n+A-1}} \\
 &= M^{A-1} \sum_{k=A-1}^{+\infty} \binom{k}{A-1} \left(\frac{1}{M}\right)^k \\
 &= M^{A-1} \frac{\left(\frac{1}{M}\right)^{A-1}}{\left(1 - \frac{1}{M}\right)^A} \\
 &= \left(\frac{M}{M-1}\right)^A
 \end{aligned}$$