

# Révisions 2026

## mercredi 25 mars 2026

941

### Exercice 1 (Ens 2025)

Pour  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , on définit  $E_A = \{AM, M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\}$ .  
Que vaut  $\dim(E_A)$  ?

#### Correction

Soit  $\phi \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M \mapsto AM \end{cases}$ .

$\phi$  est une application linéaire dont l'image est  $E_A$ .

$M \in \text{Ker}(\phi) \iff \text{Im}(M) \subset \text{Ker}(A)$

On en déduit que  $\dim(\text{Ker}(\phi)) = \dim(\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \text{Ker}(A))) = n \dim(\text{Ker}(A))$

On en déduit avec le formule du rang :

$\dim(E_A) = n^2 - n \dim(\text{Ker}(A)) = n \text{rg}(A)$

### Exercice 2 (Mines 2024)

Soit  $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbf{R}$  continue et  $n \in \mathbf{N}^*$  tel que

$$\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, \quad \int_0^1 f(x)x^k dx = 0$$

Montrer que  $f$  admet au moins  $n + 1$  zéros dans  $[0, 1]$ .

Indication donnée : Raisonner par l'absurde et poser une fonction  $g(x)$  en fonction des  $x^k$  pour appliquer le théorème de positivité de l'intégrale à  $f(x)g(x)$ .

#### Correction

On suppose que  $f$  a un nombre de racines inférieur ou égal à  $n$ .

$f$  n'est donc pas la fonction nulle.

$\int_0^1 f(x) dx = 0$  avec  $f$  continue non nulle donc  $f$  ne peut pas être de signe constant.

On en déduit que  $f$  s'annule au moins une fois sur  $]0; 1[$  (théorème des valeurs intermédiaires).

Si  $f$  ne s'annule qu'une fois en  $x_0 \in ]0; 1[$ , elle est de signe constant sur  $[0, x_0]$  et sur  $[x_0, 1]$ , les signes sur ces intervalles étant opposés.

La fonction  $x \mapsto (x - x_0)f(x)$  est continue, non nulle et de signe constant donc

$$\int_0^1 (x - x_0)f(x) dx \neq 0.$$

$$\text{Mais } \int_0^1 (x - x_0)f(x) dx = \int_0^1 xf(x) dx - x_0 \int_0^1 f(x) dx = 0.$$

C'est absurde donc  $f$  s'annule au moins deux fois sur  $]0; 1[$ .

$f$  s'annule donc en  $x_1 < x_2 < \dots < x_p$  avec  $2 \leq p \leq n$ .

On note  $x_0 = 0$  et  $x_{p+1} = 1$  et on a  $x_0 < \dots < x_{p+1}$ .

D'après le théorème des valeurs intermédiaires,  $f$  est de signe constant sur  $]x_k; x_{k+1}[$ ,  $0 \leq k \leq p$ .

Soit  $g : x \mapsto \prod_{\substack{k=1 \\ f(x_k^-)f(x_k^+) < 0}}^p (x - x_k)$

La fonction  $fg$  est continue sur  $[0; 1]$  de signe constant et différente de la fonction nulle donc

$$\int_0^1 f(x)g(x) dx \neq 0$$

Mais  $g$  est une fonction polynomiale de degré  $p \leq n$  donc par linéarité de l'intégrale à partir des hypothèses de l'énoncé,  $\int_0^1 f(x)g(x) dx = 0$

On aboutit à une contradiction donc  $f$  s'annule au moins  $n + 1$  fois dans  $[0; 1]$ .

### Exercice 3

Résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} x'' = 3x + y + e^{2t} \\ y'' = 2x + 2y + 3e^t \end{cases}$$

#### Correction

Le système s'écrit matriciellement  $Y'' = AY + B(t)$  avec  $Y = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ,  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 3e^t \end{pmatrix}$ .

$$A = PDP^{-1} \text{ avec } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{On a } P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ (utile pour la suite)}$$

On fait le changement de fonction inconnue  $Z = P^{-1}Y$ .

Le système devient  $Z'' = DZ + P^{-1}B(t)$ .

$$\text{On doit donc résoudre : } \begin{cases} z_1'' = z_1 + \frac{1}{3}e^{2t} - e^t \\ z_2'' = 4z_1 + \frac{2}{3}e^{2t} + e^t \end{cases}.$$

#### Résolution de la première équation

$$\text{ESSM : } z_1 = Ae^t + Be^{-t}$$

$$\text{Solution particulière de } z_1'' = z_1 + \frac{e^{2t}}{3}.$$

$$\text{On la cherche sous la forme } z_1 = ae^{2t}.$$

$$\text{On trouve } z_1 = \frac{e^{2t}}{9}.$$

$$\text{Solution particulière de } z_1'' = z_1 - e^t.$$

$$\text{On la cherche sous la forme } z_1 = ate^t.$$

$$\text{On trouve } z_1 = -\frac{t}{2}e^{-t}.$$

La solution générale de la première équation est donc :

$$z_1 = \left(A - \frac{t}{2}\right)e^t + Be^{-t} + \frac{e^{2t}}{9}$$

De même la solution générale de la deuxième équation est :

$$z_2 = \left(C + \frac{t}{6}\right)e^{2t} + De^{-2t} - \frac{e^t}{3}$$

D'où en revenant à  $x$  et  $y$  :

$$\begin{cases} x = \left(A - \frac{1}{3} - \frac{t}{2}\right) e^t + B e^{-t} + \left(C + \frac{1}{9} + \frac{t}{6}\right) e^{2t} + D e^{-2t} \\ y = \left(-2A - \frac{1}{3} + t\right) e^t - 2B e^{-t} + \left(C - \frac{2}{9} + \frac{t}{6}\right) e^{2t} + D e^{-2t} \end{cases}$$

#### Exercice 4 (Ens 2024)

Déterminer toutes les fonctions  $f$  de classe  $\mathcal{C}^2$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  telles que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f(t)^2 = f(t\sqrt{2})$$

#### Correction

Soit  $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  telle que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f(t)^2 = f(t\sqrt{2})$$

$t = 0$  donne  $f(0)^2 = f(0)$  donc  $f(0) = 0$  ou  $f(0) = 1$ .

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f(t) = f\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2$$

Par récurrence, on montre :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad f(t) = f\left(\frac{t}{2^{n/2}}\right)^{2^n}$$

On suppose d'abord  $f(0) = 0$ .

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f\left(\frac{t}{2^{n/2}}\right)^{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Donc  $f$  est la fonction nulle.

Réciproquement la fonction nulle convient.

On suppose ensuite  $f(0) = 1$ .

On fixe  $t \in \mathbb{R}$ .

Au voisinage de 0,  $f$  est strictement positive donc :

$$\begin{aligned} f(t) &= \exp\left(2^n \ln\left(f\left(\frac{t}{2^{n/2}}\right)\right)\right) \\ &= \exp\left(2^n \ln\left(f(0) + \frac{t}{2^{n/2}} f'(0) + \frac{t^2}{2^{n+1}} f''(0) + o\left(\frac{t}{2^n}\right)\right)\right) \end{aligned}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x)^2 = f(x\sqrt{2})$$

On dérive :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad 2f(x)f'(x) = \sqrt{2}f'(x\sqrt{2})$$

En 0 cela donne :  $2f'(0) = \sqrt{2}f'(0)$  donc  $f'(0) = 0$ .

On dérive une seconde fois :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad 2f'(x)^2 + 2f(x)f''(x) = 2f''(x\sqrt{2}), \text{ ce qui ne donne rien en 0.}$$

On note  $a = f''(0)$ .

$$\begin{aligned} f(t) &= \exp\left(2^n \ln\left(1 + a\frac{t^2}{2^{n+1}} + o\left(\frac{t}{2^n}\right)\right)\right) \\ &= \exp\left(2^n \left(a\frac{t^2}{2^{n+1}} + o\left(\frac{t}{2^n}\right)\right)\right) \\ &= \exp\left(\frac{at^2}{2} + o(1)\right) \end{aligned}$$

Donc :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f(t) = e^{at^2/2}$$

Réciproquement, supposons qu'il existe un réel  $a$  tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f(t) = e^{at^2/2}$$

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f(t)^2 = e^{at^2}$$

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f(t\sqrt{2}) = e^{at^2}$$

Donc  $f$  convient.

Finalement les fonctions cherchées sont la fonction nulle et les fonctions  $\begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto e^{at^2/2} \end{cases}$ . En particulier,  $a = 0$  donne la fonction constante égale à 1.

### Exercice 5 (Ens 2025)

Soit  $(x_n)_{n \geq 1}$  une suite de réels telle que la suite  $(y_n)_{n \geq 1}$  définie par

$$y_n = x_{n+1} - \frac{1}{2}x_n$$

satisfait

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = 0$$

Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$$

#### Correction

Les suites vérifiant  $x_{n+1} - \frac{1}{2}x_n = 0$  sont les suites géométriques de raison  $\frac{1}{2}$  ie les suites définies

par  $x_n = \frac{C}{2^n}$

On pose donc pour la suite  $(x_n)$  de l'énoncé, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $C_n = 2^n x_n$  (penser à la variation de la constante)

On a donc :

$$\forall n \geq 1 \quad \frac{C_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{C_n}{2^{n+1}} = y_n$$

On en déduit :

$$\forall n \geq 1 \quad C_{n+1} - C_n = 2^{n+1} y_n$$

On en déduit :

$$\forall n \geq 2 \quad C_n = \sum_{k=1}^{n-1} (C_{k+1} - C_k) + C_1 = C_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^{k+1} y_k$$

puis :

$$\forall n \geq 2 \quad x_n = \frac{C_1}{2^n} + \sum_{k=1}^{n-1} 2^{k+1-n} y_k$$

$$\frac{C_1}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ donc il s'agit de prouver } \sum_{k=1}^{n-1} 2^{k+1-n} y_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Soit  $\epsilon > 0$ .

$\exists n_0 \geq 2$  tq  $\forall n \geq n_0 \quad |y_n| \leq \epsilon$  (car  $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = 0$ )

$$\begin{aligned}
 \forall n \geq n_0 \quad \left| \sum_{k=1}^{n-1} 2^{k+1-n} y_k \right| &\leq \sum_{k=1}^{n-1} 2^{k+1-n} |y_k| \\
 &\leq \sum_{k=1}^{n_0} 2^{k+1-n} |y_k| + \sum_{k=n_0+1}^{n-1} 2^{k+1-n} \epsilon \\
 &\leq \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{n_0} 2^{k+1} |y_k| + \epsilon \sum_{l=0}^{n-n_0-2} 2^{l+n_0-n+2} \\
 &\leq \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{n_0} 2^{k+1} |y_k| + \epsilon 2^{n_0-n+2} \frac{2^{n-n_0-1} - 1}{2 - 1} \\
 &\leq \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{n_0} 2^{k+1} |y_k| + \epsilon (2 - 2^{n_0-n+2}) \\
 &\leq \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{n_0} 2^{k+1} |y_k| + 2\epsilon
 \end{aligned}$$

$\frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{n_0} 2^{k+1} |y_k| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  donc :

$\exists n_1 \geq n_0$  tq  $\forall n \geq n_1 \quad \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{n_0} 2^{k+1} |y_k| \leq \epsilon$

Donc :

$$\forall n \geq n_1 \quad \left| \sum_{k=1}^{n-1} 2^{k+1-n} y_k \right| \leq 3\epsilon$$

On a bien prouvé :  $\sum_{k=1}^{n-1} 2^{k+1-n} y_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .