CCP 2023 PSI
Correction

941

1 Exercice : fonction de Bessel

Q1 Soit $x \in \mathbb{R}$.
La fonction $t \mapsto \cos(x\sin(t))$ est continue sur le *segment* $[0;\pi]$ donc $f(x)$ est défini.

Q2 Soit $g \begin{cases} \mathbb{R}\times[0;\pi] \to \mathbb{R} \\ (x,t) \mapsto \cos(x\sin(t)) \end{cases}$.

— g est de classe $\mathcal{C}^2$ par rapport à x et :

$$\begin{aligned} \forall (x,t) \in \mathbb{R}\times[0;\pi]\ \frac{\partial g}{\partial x}(x,t) &= -\sin(t)\sin(x\sin(t)) \\ \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t) &= -\sin^2(t)\cos(x\sin(t)) \end{aligned}$$

— Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $g(x,.)$ est continue et intégrable sur $[0;\pi]$ (fonction continue sur un segment).

— Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $\frac{\partial g}{\partial x}(x,.)$ est continue et intégrable sur $[0;\pi]$ (fonction continue sur un segment)0

— Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,.)$ est continue sur $[0;\pi]$.

— **Domination**
$\forall (x,t) \in \mathbb{R}\times[0;\pi]\ \left|\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)\right| \leq 1$
avec $t \mapsto 1$ continue, positive et intégrable sur $[0;\pi]$.

Donc f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}\ f'(x) &= -\int_0^\pi \sin(t)\sin(x\sin(t))\,\mathrm{d}t \\ f''(x) &= -\int_0^\pi \sin^2(t)\cos(x\sin(t))\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Q3 Les fonctions $\begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,t) \mapsto x \end{cases}$ et $\begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,t) \mapsto t \end{cases}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ car polynomiales.

La fonction sin est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc par composition, la fonction $\begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,t) \mapsto \sin(t) \end{cases}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Par produit, la fonction $\begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,t) \mapsto x\sin(t) \end{cases}$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

On poursuit ainsi et on montre sans difficulté que h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

En particulier, sa dérivée partielle $\dfrac{\partial h}{\partial t}$ est définie sur $\mathbb{R}^2$.

$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2 \ \dfrac{\partial h}{\partial t}(x,t) = -\sin(t)\sin(x\sin(t)) + x\cos^2(t)\cos(x\sin(t))$

Q4

$$\begin{array}{rcl}\forall x \in \mathbb{R}\ xf''(x)+f'(x)+xf(x) &=& \displaystyle\int_0^\pi \Big(x(1-\sin^2(t))\cos(x\sin(t)) - \sin(t)\sin(x\sin(t))\Big)\,\mathrm{d}t \\ &=& \displaystyle\int_0^\pi \Big(x\cos^2(t)\cos(x\sin(t)) - \sin(t)\sin(x\sin(t))\Big)\,\mathrm{d}t \\ &=& \displaystyle\int_0^\pi \frac{\partial h}{\partial t}(x,t)\,\mathrm{d}t = [h(x,t)]_0^\pi \\ &=& 0\end{array}$$

Q5

$$\begin{array}{rcl}\forall x \in]-R;R[\ S(x) &=& \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\ S'(x) &=& \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \\ S''(x) &=& \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}\end{array}$$

On a donc pour tout $x \in]-R;R[$:

$$\begin{array}{rcl}0 &=& xf''(x)+f'(x)+xf(x) \\ &=& \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} \\ &=& \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1)a_{n+1} x^{n} + \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^{n} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^{n} \\ &=& \displaystyle a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(n(n+1)a_{n+1} + (n+1)a_{n+1} + a_{n-1}\right) x^n \\ &=& \displaystyle a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \Big((n+1)^2 a_{n+1} + a_{n-1}\Big) x^n\end{array}$$

Donc $a_1 = 0$ et :
$\forall n \in \mathbb{N}^*\ a_{n+1} = -\dfrac{a_{n-1}}{(n+1)^2}$
ce qui équivaut à :
$\forall n \geq 2\ a_n = -\dfrac{a_{n-2}}{n^2}$

Q6 $\forall z \in \mathbb{R}\ \cos(z) = \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p)!} z^{2p}$

Donc :
$\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) = \displaystyle\int_0^\pi \left(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p)!} x^{2p} \sin^{2p}(t)\right)\mathrm{d}t$

On fixe $x \in \mathbb{R}$ et on définit pour tout $p \in \mathbb{N}$: $f_p \begin{cases} [0;\pi] \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \dfrac{(-1)^p}{(2p)!} x^{2p} \sin^{2p}(t) \end{cases}$.

— Pour tout $p \in \mathbb{N}$, f_p est continue sur $[0;\pi]$.
— La série de fonctions $\sum\limits_{p\geq 0} f_p$ converge uniformément sur $[0;\pi]$.
En effet :
$\forall p \in \mathbb{N}\ \forall t \in [0;\pi]\ \ |f_p(t)| \leq \dfrac{x^{2p}}{(2p)!}$ indépendant de t et terme général d'une série convergente (de somme $\dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$)
Donc la série de fonctions $\sum\limits_{p\geq 0} f_p$ converge normalement sur $[0;\pi]$.
Donc la série de fonctions $\sum\limits_{p\geq 0} f_p$ converge uniformément sur $[0;\pi]$.

On a donc :

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^\pi \left(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p)!} x^{2p} \sin^{2p}(t)\right) \mathrm{d}t \\ &= \sum_{p=0}^{+\infty} \int_0^\pi \frac{(-1)^p}{(2p)!} x^{2p} \sin^{2p}(t)\, \mathrm{d}t \\ &= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p)!} W_p x^{2p} \end{aligned}$$

Q7 On vient de montrer que f est développable en série entière.
On a montré à la question 4 que f est solution de (E).
$f(0) = \displaystyle\int_0^\pi \cos(0\sin(t))\, \mathrm{d}t = \int_0^\pi \mathrm{d}t = \pi$
D'où l'existence.
Soit S une solution développable en série entière de (E) vérifiant $S(0) = \pi$.
Avec les notations de la question 5, on a $a_0 = S(0) = \pi$ et $a_1 = 0$.
De plus pour tout $n \geq 2$, $a_n = -\dfrac{a_{n-2}}{n^2}$ donc la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est parfaitement déterminée.
D'où l'unicité en cas d'existence.

L'équation (E) possède donc une et une seule solution prenant la valeur π en 0 et développable en série entière à savoir la fonction f.

Q8 Pour tout $p \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(p) : W_p = \dfrac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\pi$.
$W_0 = \displaystyle\int_0^\pi \mathrm{d}t = \pi$
$\dfrac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\pi = \dfrac{0!}{2^0(0!)^2}\pi = \pi$
Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

On suppose $\mathcal{P}(p)$ vraie.
f étant solution développable en série entière de (E), on a :
$\dfrac{(-1)^{p+1}}{(2p+2)!} W_{p+1} = \dfrac{-1}{(2p+2)^2} \dfrac{(-1)^p}{(2p)!} W_p$
On en déduit :
$W_{p+1} = \dfrac{(2p+2)!}{(2p+2)^2(2p)!} W_p = \dfrac{2p+1}{2p+2} \dfrac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\pi = \dfrac{(2p+1)!}{2^{2p+1}p!(p+1)!}\pi$
et il n'y a plus qu'à multiplier en haut et en bas par $2p$ pour montrer que $\mathcal{P}(p+1)$ est

vraie.

2 Problème 1 : marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$

2.1 Partie I : un développement en série entière

Q9 $\forall x \in]-1;1[\ (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$

le rayon de convergence de cette série entière étant égal à 1.

Q10 Soit $x \in]-1;1[$.

On applique la formule de la question précédente avec $\alpha = -\frac{1}{2}$ et $-x \in]-1;1[$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{1-x}} &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\frac{-1}{2} \times \frac{-3}{2} \times \cdots \times \frac{-2n+1}{2}}{n!}(-1)^n x^n \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2^n n!}x^n \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (2n-1) \times 2n}{2 \times 4 \times \cdots \times 2n \times 2^n n!}x^n \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^n n! \times 2^n n!}x^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}x^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}x^n
\end{aligned}$$

3 Partie II : probabilité de retour à l'origine

Q11 X_t prend les valeurs -1 et 1 donc $Y_t = \frac{X_t+1}{2}$ prend les valeurs 0 et 1 : Y_t suit une loi de Bernoulli.

$P(Y_t = 1) = P(X_t = 1) = p$ donc $Y_t \sim \mathcal{B}(p)$

Soit $f \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1+x}{2} \end{cases}$.

Les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ étant mutuellement indépendantes, les variables aléatoires $f(X_1), \dots, f(X_n)$ sont mutuellement indépendantes.

On en déduit que $\Sigma_n = \sum_{t=1}^{n} \frac{X_t+1}{2} \sim \mathcal{B}(n,p)$.

Q12 $\Sigma_n = \frac{1}{2}S_n + \frac{n}{2}$

Donc $u_n = P(S_n = 0) = P\left(\Sigma_n = \frac{n}{2}\right)$ où $\Sigma_n \sim \mathcal{B}(n,p)$

Si n est impair $\frac{n}{2}$ n'est pas entier et $P\left(\Sigma_n = \frac{n}{2}\right) = 0$

Si n est pair, $\frac{n}{2}$ est un entier compris entre 0 et n et :

$P\left(\Sigma_n = \frac{n}{2}\right) = \binom{n}{n/2} p^{n/2}(1-p)^{n/2} = \binom{n}{n/2}\left(p(1-p)\right)^{n/2}$

Q13

$$\begin{aligned} u_{2n} &= \binom{2n}{n}(p(1-p))^n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}(p(1-p))^n \\ &\sim \frac{\sqrt{4\pi n}(2n)^{2n}\,\mathrm{e}^{-2n}}{2\pi n n^{2n}\,\mathrm{e}^{-2n}}(p(1-p))^n \\ &\sim \frac{(4p(1-p))^n}{\sqrt{\pi n}} \end{aligned}$$

Soit $g\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto 4x(1-x)\end{cases}$.

g est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et :

$\forall x\in\mathbb{R}\ g'(x) = 4(1-x-x) = 4(1-2x)$

Donc g est croissante sur $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$.

On en déduit :

$\forall x\in\mathbb{R}\ 4x(1-x)\leq 1$

On a donc $4p(1-p)\in[0;1]$ et la suite $\left((4p(1-p))^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Donc dans tous les cas, $u_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Comme $u_{2n+1} = 0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$: la probabilité d'être de retour à l'origine après n déplacements tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

4 Partie III : nombre de passages par l'origine

Q14 La particule ne pouvant pas se trouver à l'origine après un nombre impair de déplacements, $T_n - 1$ compte le nombre de passages par l'origine au cours des $2n$ premiers déplacements de la particule.

Q15 Pour $j\geq 1$, O_{2j} ne prend que les valeurs 0 et 1 donc elle suit une loi de Bernoulli de paramètre $P(O_{2j}=1) = P(S_{2j}=0) = \binom{2j}{j}(p(1-p))^j$. Son espérance est $\binom{2j}{j}(p(1-p))^j$.

$O_{2\times 0}$ est une variable aléatoire constante égale à 1. Son espérance est 1 et on remarque que $\binom{2j}{j}(p(1-p))^j$ vaut 1 lorsque $j=0$.

Par linéarité de l'espérance :

$E(T_n) = \sum_{j=0}^{n} E(O_{2j}) = \sum_{j=0}^{n}\binom{2j}{j}(p(1-p))^j$

Q16 Si $p\neq\frac{1}{2}$ alors $4p(1-p)\in]0;1[$ et la série de terme général $\frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}(4p(1-p))^n = \binom{2n}{n}(p(1-p))^n$ converge.

On en déduit que :

$E(T_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{\sqrt{1-4p(1-p)}}$
En moyenne, on ne passe par l'origine qu'un nombre fini de fois.
Q17 $T_{n+1} = T_n + O_{2n+2}$ donc par linéarité de l'espérance :
$E_(T_{n+1}) = E(T_n) + E(O_{2n+2}) = E(T_n) + \dbinom{2n+2}{n+1}\dfrac{1}{4^{n+1}}$
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n)$: $E(T_n) = \dfrac{2n+1}{2^{2n}}\dbinom{2n}{n}$.
$T_0 = 1$ donc $E(T_0) = 1$ et $\dfrac{2n+1}{2^{2n}}\dbinom{2n}{n} = 1$ pour $n = 0$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie :

$$\begin{aligned}
E(T_{n+1}) &= \frac{2n+1}{2^{2n}}\binom{2n}{n} + \binom{2n+2}{n+1}\frac{1}{4^{n+1}} \\
&= \frac{(2n+1)!}{2^{2n}n!n!} + \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!2^{2n+2}} \\
&= \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!2^{2n+2}}\left(1 + \frac{4(n+1)^2}{2n+2}\right) \\
&= \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!2^{2n+2}}(1+2n+2) \\
&= \frac{2n+3}{2^{2(n+1)}}\binom{2(n+1)}{n+1}
\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned}
E(T_n) &\sim \frac{2n}{2^{2n}}\frac{\sqrt{4\pi n}(2n)^{2n}\,\mathrm{e}^{-2n}}{2\pi n n^{2n}\,\mathrm{e}^{-2n}} \\
&\sim 2\sqrt{\frac{n}{\pi}}
\end{aligned}$$

Donc $E(T_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

5 Problème 2 : puissances de matrices et limites de suites de matrices

5.1 Partie I : diagonalisation et puissances d'une matrice particulière

Q18 Si a et b sont réels alors $M(a,b)$ est une matrice symétrique réelle. D'après le théorème spectral elle est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Q19 Le coefficient de MV situé sur la i-ème ligne est la somme des coefficients de la i-ème ligne de la matrice M. Or sur chaque ligne de M il y a un b et $n-1$ a donc :
$M(a,b)V = ((n-1)a+b)V$
V étant non nul, V est un vecteur propre de $M(a,b)$ associé à la valeur propre $b+(n-1)a$.

Q20

$$\begin{aligned}
\forall \lambda \in \mathbb{C}\ P_{1,0}(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & \lambda & -1 & \dots & -1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -1 & \dots & -1 & \lambda & -1 \\ -1 & \dots & -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \lambda-(n-1) & \lambda-(n-1) & \lambda-(n-1) & \dots & \lambda-(n-1) \\ -1 & \lambda & -1 & \dots & -1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -1 & \dots & -1 & \lambda & -1 \\ -1 & \dots & -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} \\
&\quad \text{en ajoutant toutes les lignes à la première} \\
&= (\lambda-(n-1)) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & \lambda & -1 & \dots & -1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -1 & \dots & -1 & \lambda & -1 \\ -1 & \dots & -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} \\
&= (\lambda-(n-1)) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & \lambda+1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda+1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda+1 \end{vmatrix} \\
&\quad \text{en ajoutant la première ligne à toutes les autres} \\
&= (\lambda-(n-1))(\lambda+1)^{n-1} \text{ déterminant d'une matrice triangulaire}
\end{aligned}$$

Donc $P_{1,0} = (X-(n-1))(X+1)^{n-1}$

Q21

$$\begin{aligned}
\forall \lambda \in \mathbb{C}\ P_{a,b}(\lambda) &= \det(\lambda I_n - M(a,b)) = \det(\lambda I_n - bI_n - aM(1,0)) \\
&= \det((\lambda-b)I_n - aM(1,0)) = \det\left(a\left(\frac{\lambda-b}{a}I_n - M(1,0)\right)\right) \\
&= a^n \det\left(\frac{\lambda-b}{a}I_n - M(1,0)\right) = a^n P_{1,0}\left(\frac{\lambda-b}{a}\right)
\end{aligned}$$

Donc $P_{a,b}(X) = a^n P_{1,0}\left(\dfrac{X-b}{a}\right)$.

On en déduit :

$$\begin{aligned}
P_{a,b}(X) &= a^n\left(\frac{X-b}{a}-(n-1)\right)\left(\frac{X-b}{a}+1\right)^{n-1} \\
&= (X-b-a(n-1))(X-b+a)^{n-1}
\end{aligned}$$

a étant supposé non nul, $b+(n-1)a \neq b-a$ et les valeurs propres de $M(a,b)$ sont $b+(n-1)a$ simple et $b-a$ de multiplicité $n-1$.

Q22 $Q_{a,b} = X^2 - (2b+(n-2)a)X + (b-a)(b+(n-1)a)$ et il s'agit de montrer que : $M(a,b)^2 = (2b+(n-2)a)M(a,b) - (b-a)(b+(n-1)a)I_n$.

Le coefficient à l'intersection de la ligne d'indice i et de la colonne d'indice i de $M(a,b)^2$ est :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} M(a,b)_{i,j}M(a,b)_{j,i} &= \sum_{i=1}^{n} M(a,b)_{i,j}^2 \text{ car } M(a,b) \text{ est symétrique}\\ &= (n-1)a^2+b^2\end{aligned}$$

Le même coefficient pour la matrice $(2b+(n-2)a)M(a,b)-(b-a)(b+(n-1)a)I_n$ vaut :

$$\begin{aligned}(2b+(n-2)a)b-(b-a)(b+(n-1)a) &= 2b^2+(n-2)ab-b^2-(n-1)ab+ab+(n-1)a^2\\ &= b^2+(n-1)a^2\end{aligned}$$

En dehors de la diagonale :

$$\begin{aligned}\left(M(a,b)^2\right)_{i,j} &= \sum_{k=1}^{n} M(a,b)_{i,k}M(a,b)_{k,j}\\ &= M(a,b)_{i,i}M(a,b)_{i,j}+M(a,b)_{j,i}M(a,b)_{j,j}+\sum_{\substack{k=1\\k\neq i,j}}^{n} M(a,b)_{i,k}M(a,b)_{k,j}\\ &= ba+ab+(n-2)a^2 = 2ab+(n-2)a^2=(2b+(n-2)a)\\ &= (2b+(n-2)a)M(a,b)_{i,j}\end{aligned}$$

et les coefficients de I_n sont nuls en dehors de la diagonale.
Les matrices $M(a,b)^2$ et $(2b+(n-2)a)M(a,b)-(b-a)(b+(n-1)a)I_n$ ont les mêmes coefficients donc elles sont égales.

Si $a\neq 0$ alors $b-a\neq b+(n-1)a$ donc $Q_{a,b}$ est scindé à racines simples et $M(a,b)$ est diagonalisable.
Si $a=0$, $Q_{a,b}=(X-b)^2$ n'est plus à racines simples mais $M(a,b)=M(0,b)=bI_n$ est diagonale donc diagonalisable.

Q23 Il existe un unique couple de polynômes (S_k,R_k) tel que $X^k=S_kQ_{a,b}+R_k$ avec R_k de degré strictement inférieur au degré de $Q_{a,b}$ et on cherche R_k.
R_k est de degré strictement inférieur à 2 donc R_k est de la forme c_kX+d_k.
$(b-a)^k=S_k(b-a)Q_{a,b}(b-a)+R_k(b-a)=c_k(b-a)+d_k$
$(b+(n-1)a)^k=S_k(b+(n-1)a)Q_{a,b}(b+(n-1)a)+R_k(b+(n-1)a)=c_k(b+(n-1)a)+d_k$
En faisant la différence, on obtient $c_k=\dfrac{1}{na}\left((b+(n-1)a)^k-(b-a)^k\right)$
On a ensuite :
$d_k=(b-a)^k-(b-a)c_k=\dfrac{1}{na}\left(((n-1)a+b)(b-a)^k-(b-a)(b+(n-1)a)^k\right)$

On en déduit :

$$\begin{aligned}M(a,b)^k &= S_k(M(a,b))Q_{a,b}(M(a,b))+R_k(M(a,b))=R_k(M(a,b))\\ &= \frac{1}{na}\left(\left((b+(n-1)a)^k-(b-a)^k\right)M(a,b)+\left(((n-1)a+b)(b-a)^k-(b-a)(b+(n-1)a)^k\right.\right.\end{aligned}$$

Q24 $|a-b|<1$ et $|b+(n-1)a|<1$ donc les deux suites géométriques $((a-b)^k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(((n-1)a+b)^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
Lorsque $a\neq 0$, l'expression de la question précédente permet de montrer que la suite de

matrices $\left(M(a,b)^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice nulle.
Si $a = 0$ alors $M(a,b) = bI_n$ avec $|b| < 1$ donc la suite $\left(M(a,b)^k\right)_{k\in\mathbb{N}} = (b^k I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge également vers la matrice nulle.

5.2 Partie II : limite des puissances d'une matrice

Q25 D'après la forme de la matrice $A = T$, $u(e_1) = \lambda_1 e_1$.
On en déduit par une récurrence élémentaire :
$\forall k \in \mathbb{N}\ u^k(e_1) = \lambda_1^k e_1$
Donc : $\left\|u^k(e_1)\right\| = |\lambda_1|^k \|e_1\| \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$ (car $|\lambda_1| < 1$)
D'après le point 2 au début de cette partie, $u^k(e_1) \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$.

Q26 $u(e_{i+1}) = \sum_{k=1}^{n} t_{k,i+1} e_k = \sum_{k=1}^{i+1} t_{k,i+1} e_k$ car T est triangulaire.

Donc $x = \sum_{k=1}^{i} t_{k,i+1} e_k$ convient.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, soit $\mathcal{P}(k)$: $u^k(e_{k+1}) = \lambda_{i+1}^k e_{i+1} + \sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x)$

Pour $k = 1$, $\lambda_{i+1}^k e_{i+1} + \sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x)$ vaut $\lambda_{i+1} e_{i+1} + x = u(x)$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

On suppose $\mathcal{P}(k)$ vraie.

$$\begin{aligned}
u^{k+1}(x) &= u\left(\lambda_{i+1}^k e_{i+1} + \sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x)\right) \\
&= \lambda_{i+1}^k u(e_{i+1}) + \sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^{m+1}(x) \\
&= \lambda_{i+1}^{k+1} e_{i+1} + \lambda_{i+1}^k x + \sum_{m=1}^{k} \lambda_{i+1}^{k-m} u^m(x) \\
&= \lambda_{i+1}^{k+1} e_{i+1} + \sum_{m=0}^{k} \lambda_{i+1}^{k-m} u^m(x)
\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

Q27 $u^k(x) = u^k\left(\sum_{j=1}^{i} t_{j,i+1} e_j\right) = \sum_{j=1}^{i} t_{j,i+1} u^k(e_j) \xrightarrow[k\to+\infty]{} \sum_{j=1}^{i} t_{j,i+1} \times 0 = 0$

La suite $\left(u^k(x)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge donc elle est bornée et :
$\exists M \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall k \in \mathbb{N}\ \left\|u^k(x)\right\| \leq M$.
Soit $\epsilon > 0$.

$\exists k_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall k \geq k_0$ $\left\|u^k(x)\right\| \leq \epsilon$

$$\begin{aligned}
\forall k \geq k_0 + 2 \ \left\|\sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x)\right\| &\leq \sum_{m=0}^{k-1} |\lambda_{i+1}|^{k-m-1} \|u^m(x)\| \\
&\leq \sum_{m=0}^{k_0} |\lambda_{i+1}|^{k-m-1} \|u^m(x)\| + \sum_{m=k_0+1}^{k-1} |\lambda_{i+1}|^{k-m-1} \|u^m(x)\| \\
&\leq M \sum_{m=0}^{k_0} |\lambda_{i+1}|^{k-m-1} + \epsilon \sum_{m=k_0+1}^{k-1} |\lambda_{i+1}|^{k-m-1} \\
&\leq M \sum_{l=k-1-k_0}^{k-1} |\lambda_{i+1}|^{l} + \epsilon \sum_{l=0}^{k-k_0-2} |\lambda_{i+1}|^{l} \\
&\leq M \sum_{l=k-1-k_0}^{+\infty} |\lambda_{i+1}|^{l} + \epsilon \sum_{l=0}^{+\infty} |\lambda_{i+1}|^{l} \\
&\leq \frac{1}{1-|\lambda_{i+1}|} \left(M |\lambda_{i+1}|^{k-1-k_0} + \epsilon\right)
\end{aligned}$$

$|\lambda_{i+1}|^{k-1-k_0} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$ donc il existe $k_1 \geq k_0 + 2$ tel que :
$\forall k \geq k_1$ $|\lambda_{i+1}|^{k-1-k_0} \leq \epsilon$
On en déduit :
$\forall k \geq k_1$ $\left\|\sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x)\right\| \leq \dfrac{M+1}{1-|\lambda_{i+1}|}\epsilon$ de la forme $C\epsilon$ avec C indépendant de k et de ϵ.
Donc $\sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x) \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$
$|\lambda_{i+1}| < 1$ donc $\lambda_{i+1}^k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$
Donc $u^k(e_{k+1}) = \lambda_{i+1}^k e_{i+1} + \sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x) \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$

Q28 On vient donc de démontrer par récurrence :
$\forall j \in [\![1;n]\!]$ $u^k(e_j) \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$
Donc pour tout $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$, la i-ème coordonnée du vecteur $u^k(e_j)$ tend vers 0 lorsque k tend vers $+\infty$. Mais cette coordonnée est le coefficient $\left(T^k\right)_{i,j}$ de la matrice T^k donc tous les coefficients de la matrice T^k convergent vers 0.
On en déduit que la suite de matrices $\left(T^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice nulle.

Q29 Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable donc :
$\exists P \in GL_n(\mathbb{C})$ tq $A = PTP^{-1}$
$\forall k \in \mathbb{N}$ $A^k = PT^kP^{-1} \xrightarrow[k\to+\infty]{} P \times 0 \times P^{-1} = 0$

5.3 Partie III : application à la méthode de Gauss-Seidel

Q30 Les coefficients diagonaux de M sont les nombres $a_{i,i}$.
Mais :

$\forall i \in [\![1;n]\!] \ \ |a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} |a_{i,j}| \geq 0$

Donc les $a_{i,i}$ sont tous non nuls.

M est donc une matrice triangulaire dont tous les coefficients diagonaux sont non nuls.

On en déduit que M est inversible.

Q31 $AX = Y$ donc $MX - FX = Y$ et $MX = Y + FX$ avec M inversible.

On en déduit $X = M^{-1}(Y + FX) = BX + M^{-1}Y$

Q32 $M^{-1}FV = BV = \lambda V$ donc $FV = \lambda mV$

On en déduit :

$\forall i \in [\![1;n]\!] \ \sum_{j=1}^{n} f_{i,j}v_j = \lambda \sum_{j=1}^{n} m_{i,j}v_j$

D'où :

$\forall i \in [\![1;n]\!] \ -\sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j}v_j = \lambda \sum_{j=1}^{i} a_{i,j}v_j$

On en déduit :

$\forall i \in [\![1;n]\!] \ \lambda a_{i,i}v_i = -\sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j}v_j - \lambda \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j}v_j$

D'où le résultat.

Q33 Tout ensemble fini non vide de réels possède un maximum donc :

$\exists i_0 \in [\![1;n]\!]$ tq $|v_{i_0}| = \max_{j\in[\![1;n]\!]} |v_j|$

V est un vecteur propre de B donc V est non nul et l'un au moins des v_j est non nul.

Par conséquent $v_{i_0} \neq 0$.

D'après la question précédente et par application de l'inégalité triangulaire :

$|\lambda a_{i_0,i_0}| \ \ |v_{i_0}| \leq \left(\sum_{j=i_0+1}^{n} |a_{i_0,j}|\,|v_j| + |\lambda| \sum_{j=1}^{i_0-1} |a_{i_0,j}|\,|v_j|\right) \leq |v_{i_0}| \left(\sum_{j=i_0+1}^{n} |a_{i_0,j}| + |\lambda| \sum_{j=1}^{i_0-1} |a_{i_0,j}|\right)$

$|v_{i_0}|$ étant strictement positif, on peut simplifier par $|v_{i_0}|$ et obtenir l'inégalité de l'énoncé.

Q34 On suppose $|\lambda| \geq 1$.

On a alors :

$|\lambda|\,|a_{i_0,i_0}| \leq |\lambda| \left(\sum_{j=i_0+1}^{n} |a_{i_0,j}| + \sum_{j=1}^{i_0-1} |a_{i_0,j}|\right)$

et comme $|\lambda| > 0$:

$|a_{i_0,i_0}| \leq \left(\sum_{j=i_0+1}^{n} |a_{i_0,j}| + \sum_{j=1}^{i_0-1} |a_{i_0,j}|\right) = \sum_{\substack{j=1\\j\neq i_0}}^{n} |a_{i_0,j}| < |a_{i_0,i_0}|$

C'est absurde donc $|\lambda| < 1$.

On déduit alors de la partie II : $B^k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$

Q35 $\forall k \in \mathbb{N} \ X_{k+1} - X = BX_k + M^{-1}Y - (BX + M^{-1}Y) = B(X_k - X)$

D'où par une récurrence élémentaire :

$\forall k \in \mathbb{N} \ X_k - X = B^k(X_0 - X)$.

$B^k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$ donc $X_k - X \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$ ie $X_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} X$