Révisions 2026
mercredi 20 mai 2026

941

Exercice 1 *(Mines Telecom 2024)*

Soit $f : x \mapsto x\,\mathrm{e}^{x^2}$. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et déterminer un DL à l'ordre 5 de f^{-1} en 0.

Exercice 2 *(CCP 2023)*

L'objectif de l'exercice est de déterminer toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telles que :

$$(*) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \; f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$$

1. Résoudre $\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \; f''(x) = -\omega^2 f(x) \\ f(0) = 1 \\ f'(0) = 0 \end{cases}$.
2. Résoudre $\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \; f''(x) = \omega^2 f(x) \\ f(0) = 1 \\ f'(0) = 0 \end{cases}$.
3. Montrer que la fonction cosinus hyperbolique vérifie $(*)$, en montrant au préalable :
   $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \; \cosh(x+y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y)$
4. On suppose que f est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant $(*)$.
   Montrer que $f(0) \in \{0;1\}$ et que si $f(0) = 0$ alors f est la fonction nulle.
   Montrer :
   $\forall x \in \mathbb{R} \; f''(x) = f''(0)f(x)$.
5. Conclure.

Variante (Ens 2025)
Trouver l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telles que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(x)f(y) = \frac{1}{2}\left(f(x+y) + f(x-y)\right)$$

Exercice 3 *(Mines 2024)*

On considère le problème de Cauchy sur $\mathbb{R}$: $\begin{cases} y'(x) + 2xy(x) = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$

1. Ecrire la solution φ sous la forme d'une intégrale.
2. Sachant que si $x > 0$ et $t \in [0;x]$, $t^2 \leq xt$, déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x)$.

3. Montrer $\mathrm{e}^{-x^2} \displaystyle\int_{x/2}^{x} \frac{\mathrm{e}^{t^2}}{t^2}\,\mathrm{d}t = o_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)$
4. En déduire un équivalent de $\varphi(x)$ en $+\infty$.
5. Montrer que φ possède un maximum global en $x_0 > 0$ et étudier les variations de φ.

Exercice 4 *(Mines 2024)*

Pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, on pose $u_{n,p} = \dfrac{1}{p^n}\left(\sqrt[n]{1+\dfrac{1}{p}} + \sqrt[n]{1+\dfrac{2}{p}} + \cdots + \sqrt[n]{1+\dfrac{p}{p}}\right)^n$.
Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{p\to+\infty} u_{n,p}\right)$ et $\displaystyle\lim_{p\to+\infty}\left(\lim_{n\to+\infty} u_{n,p}\right)$

Exercice 5 *(Mines 2022, 2024)*

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ continue telle que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f(f(x)) = x$
Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) = x$.

Exercice 6 *(Ens 2025)*

Trouver les fonctions $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f(x) = \frac{n}{2}\int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Variante
Trouver les fonctions $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f(x) = \frac{n}{2}\int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 7 *(Ens 2024)*

Soient $a_1, \dots, a_N$ des réels avec $a_N \neq 0$.
Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{N} a_k \sin(2\pi k x)$.
Pour tout $j \in \mathbb{N}$, on note $f^{(j)}$ la dérivée j-ème de f.
On note n_j le nombre de zéros de $f^{(j)}$ sur $[0;1[$.
Montrer que la suite $(n_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est croissante et converge vers $2N$.

Exercice 8 *(Ens 2025)*

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ avec $f(x) = 0$ pour tout $x \notin [0;1]$.
On pose pour tout $y \in \mathbb{R}$:

$$g(y) = \int_0^1 |y-x|\, f(x)\,\mathrm{d}x$$

Montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}$, $g''(y) = 2f(y)$.
A quelle condition a-t-on g bornée ?

Exercice 9 *(Ens 2025)*

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs qui converge vers 0.
On suppose :
$\exists c > 0$ tq $\forall n \in \mathbb{N}$ $|a_{n+1} - a_n| \leq c a_n^2$
Montrer :
$\exists d > 0$ tq $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $a_n \geq \dfrac{d}{n}$

Exercice 10 *(Ens 2025)*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, positive, telle que f'' soit bornée. Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \ \left|f'(x)\right|^2 \leq C f(x)$$