# Révisions 2026
# mercredi 20 mai 2026

941

**Exercice 1** *(Mines Telecom 2024)*

Soit $f : x \mapsto x\,\mathrm{e}^{x^2}$. Montrer que $f$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et déterminer un DL à l'ordre 5 de $f^{-1}$ en 0.

**Correction**
$f$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et :
$\forall x \in \mathbb{R}\ f'(x) = \mathrm{e}^{x^2} + x\ 2x\,\mathrm{e}^{x^2} = (1+2x^2)\,\mathrm{e}^{x^2} > 0$
$f$ est donc continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
De plus $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ donc $f$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
Comme la dérivée de $f$ ne s'annule jamais, sa bijection réciproque est également de classe $\mathcal{C}^\infty$.
D'après la formule de Taylor-Young, $g = f^{-1}$ possède un développement limité à l'ordre 5 en 0.
$f(0) = 0$ donc $g(0) = 0$.
En fait, $f$ est impaire donc $g$ aussi.
$f'(0) = 1$ donc $g'(0) = \dfrac{1}{f'(0)} = 1$.
On a donc $g(x) = x + ax^3 + bx^5 + o(x^5)$.
$f(x) = x\,\mathrm{e}^{x^2} = x + x^3 + \dfrac{1}{2}x^5 + o(x^5)$
Donc :

$$\begin{aligned} x &= f(g(x)) = g(x) + g(x)^3 + \frac{1}{2}g(x)^5 + o(g(x)^5) \\ &= x + ax^3 + bx^5 + x^3 + 3ax^5 + \frac{1}{2}x^5 + o(x^5) \\ &= x + (a+1)x^3 + \left(b + 3a + \frac{1}{2}\right)x^5 + o(x^5) \end{aligned}$$

On en déduit $a = -1$ et $b = \dfrac{5}{2}$ et finalement :
$f^{-1}(x) = x - x^3 + \dfrac{5}{2}x^5 + o(x^5)$

**Exercice 2** *(CCP 2023)*

L'objectif de l'exercice est de déterminer toutes les fonctions $f$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telles que :

$$(*) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\ f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$$

1. Résoudre $\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}\ f''(x) = -\omega^2 f(x) \\ f(0) = 1 \\ f'(0) = 0 \end{cases}$.

2. Résoudre $\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}\ f''(x) = \omega^2 f(x) \\ f(0) = 1 \\ f'(0) = 0 \end{cases}$.
3. Montrer que la fonction cosinus hyperbolique vérifie $(*)$, en montrant au préalable :
   $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\ \cosh(x+y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y)$
4. On suppose que $f$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant $(*)$.
   Montrer que $f(0) \in \{0;1\}$ et que si $f(0) = 0$ alors $f$ est la fonction nulle.
   Montrer :
   $\forall x \in \mathbb{R}\ f''(x) = f''(0) f(x)$.
5. Conclure.

**Variante** (Ens 2025)
Trouver l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telles que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(x)f(y) = \frac{1}{2}\left(f(x+y) + f(x-y)\right)$$

**Correction**

1. L'énoncé ne le précise pas mais on suppose $\omega > 0$.
   On commence par déterminer la solution générale de l'équation différentielle $y'' = -\omega^2 y$.
   L'équation caractéristique est $r^2 = -\omega^2$, ses racines $i\omega$ et $-i\omega$.
   La solution générale de l'équation différentielle $y'' = -\omega^2 y$ est donc :
   $y = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$
   Les conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$ donnent alors $A = 1$ et $B = 0$.
   Finalement, le problème de Cauchy de l'énoncé a une et une seule solution : $f \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \cos(\omega x) \end{cases}$.
   On pourra observer :

$$\begin{aligned} & \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\ \cos(\omega(x+y)) + \cos(\omega(x-y)) \\ = \ & 2\cos\left(\frac{\omega(x+y+x-y)}{2}\right) + \cos\left(\frac{\omega(x+y-(x-y))}{2}\right) = 2\cos(\omega x)\cos(\omega y) \end{aligned}$$

2. On commence par déterminer la solution générale de l'équation différentielle $y'' = \omega^2 y$.
   L'équation caractéristique est $r^2 = \omega^2$, ses racines $\omega$ et $-\omega$.
   La solution générale de l'équation différentielle $y'' = \omega^2 y$ est donc :
   $y = A\,\mathrm{e}^{\omega t} + B\,\mathrm{e}^{-\omega t}$
   Les conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$ donnent alors $A = B = \frac{1}{2}$.
   Finalement, le problème de Cauchy de l'énoncé a une et une seule solution :
   $f \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{\omega x} + \mathrm{e}^{-\omega x}}{2} = \cosh(\omega x) \end{cases}$.
3. 

$$\begin{aligned} & \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y) \\ = \ & \frac{1}{4}\left(\left(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\right)\left(\mathrm{e}^y + \mathrm{e}^{-y}\right) + \left(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}\right)\left(\mathrm{e}^y - \mathrm{e}^{-y}\right)\right) \\ = \ & \frac{1}{4}\left(\mathrm{e}^{x+y} + \mathrm{e}^{x-y} + \mathrm{e}^{-x+y} + \mathrm{e}^{-x-y} + \mathrm{e}^{x+y} - \mathrm{e}^{x-y} - \mathrm{e}^{-x+y} + \mathrm{e}^{-x-y}\right) \\ = \ & \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{x+y} + \mathrm{e}^{-x-y}\right) = \cosh(x+y) \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} & \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \cosh(x+y) + \cosh(x-y) \\ = \ & \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y) + \cosh(x)\cosh(-y) + \sinh(x)\sinh(-y) \\ = \ & 2\cosh(x)\cosh(y) \end{aligned}$$

et plus généralement si $\omega \in \mathbb{R}_+^*$ :

$$\begin{aligned} & \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \cosh(\omega(x+y)) + \cosh(\omega(x-y)) \\ = \ & \cosh(\omega x + \omega y) + \cosh(\omega x - \omega y) \\ = \ & 2\cosh(\omega x)\cosh(\omega y) \end{aligned}$$

En d'autres termes, la fonction $x \mapsto \cosh(\omega x)$ vérifie $(*)$.

4. On prend $x = y = 0$ : $2f(0) = 2f(0)^2$ donc $f(0) \in \{0;1\}$.
Supposons $f(0) = 0$.
On prend $y = 0$ :
$\forall x \in \mathbb{R}\ 2f(x) = 2f(x)f(0) = 0$
Donc $f$ est la fonction nulle.
La fonction nulle vérifie $f''(x) = f''(0)f(x)$.
On suppose $f(0) = 1$.
On fixe $x$ et on dérive par rapport à $y$ :
$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\ f'(x+y) - f'(x-y) = 2f(x)f'(y)$
En prenant $x = y = 0$, on obtient : $0 = 2f'(0)$ donc $f'(0) = 0$.
On fixe de nouveau $x$ et on dérive par rapport à $y$ :
$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\ f''(x+y) + f''(x-y) = 2f(x)f''(y)$.
En prenant $y = 0$, on obtient :
$\forall x \in \mathbb{R}\ 2f''(x) = 2f(x)f''(0)$

5. Soit $f$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant $(*)$.
$f(0) \in \{0;1\}$
Si $f(0) = 0$ alors $f$ est la fonction nulle.
Réciproquement, la fonction nulle est bien de classe $\mathcal{C}^2$ et vérifie $(*)$.
Si $f(0) = 1$ alors $f'(0) = 0$ et $f$ vérifie :
$\forall x \in \mathbb{R}\ f''(x) = f''(0)f(x)$
Si $f''(0) = 0$ alors $f$ est une fonction affine.
Comme $f'(0) = 0$ et $f(0) = 1$, $f$ est la fonction constante égale à 1.
Réciproquement, la fonction constante égale à 1 est bien de classe $\mathcal{C}^2$ et vérifie $(*)$.
Si $f''(0) < 0$, on pose $\omega = \sqrt{-f''(0)}$ de sorte que $f''(0) = -\omega^2$
D'après la première question :
$\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) = \cos(\omega x)$
et la réciproque a été faite à la question 1.
Si $f''(0) > 0$, on pose $\omega = \sqrt{f''(0)}$ de sorte que $f''(0) = \omega^2$
D'après la deuxième question :
$\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) = \cosh(\omega x)$
et la réciproque a été faite à la question 3.

**Exercice 3** *(Mines 2024)*

On considère le problème de Cauchy sur $\mathbb{R}$ : $\begin{cases} y'(x) + 2xy(x) = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$

1. Ecrire la solution $\varphi$ sous la forme d'une intégrale.
2. Sachant que si $x > 0$ et $t \in [0; x]$, $t^2 \leq xt$, déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x)$.
3. Montrer $\mathrm{e}^{-x^2} \displaystyle\int_{x/2}^{x} \frac{\mathrm{e}^{t^2}}{t^2}\,\mathrm{d}t = o_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)$
4. En déduire un équivalent de $\varphi(x)$ en $+\infty$.
5. Montrer que $\varphi$ possède un maximum global en $x_0 > 0$ et étudier les variations de $\varphi$.

**Correction**

1. L'équation homogène associée est $y'(x) + 2xy(x) = 0$.
   Sa solution générale est $y(x) = C\,\mathrm{e}^{-x^2}$.
   On cherche ensuite une solution particulière de l'équation avec second membre de la forme $y(x) = C(x)\,\mathrm{e}^{-x^2}$ avec $C \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}\ y'(x) + 2xy(x) &= C'(x)\,\mathrm{e}^{-x^2} - 2xC(x)\,\mathrm{e}^{x^2} + 2xC(x)\,\mathrm{e}^{x^2}\\ &= C'(x)\,\mathrm{e}^{-x^2}\end{aligned}$$

   D'om $C'(x) = \mathrm{e}^{x^2}$ et par exemple $C(x) = \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t$.
   La solution générale de l'équation différentielle est donc :
   $y(x) = \mathrm{e}^{-x^2} \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t + C\,\mathrm{e}^{-x^2}$
   La condition $y(0) = 0$ donne $C = 0$ donc :
   $\forall x \in \mathbb{R}\ \varphi(x) = \mathrm{e}^{-x^2} \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t$
2. $$\begin{aligned}\forall x > 0\ 0 \leq \varphi(x) &\leq \mathrm{e}^{-x^2} \int_0^x \mathrm{e}^{xt}\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-x^2}\left[\frac{\mathrm{e}^{xt}}{x}\right]_0^x\\ &\leq \mathrm{e}^{-x^2}\frac{\mathrm{e}^{x^2}-1}{x} = \frac{1-\mathrm{e}^{-x^2}}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0\end{aligned}$$

   Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0$.
3. $$\begin{aligned}\forall x > 0\ 0 \leq x\,\mathrm{e}^{-x^2}\int_{x/2}^{x}\frac{\mathrm{e}^{t^2}}{t^2}\,\mathrm{d}t &= x\,\mathrm{e}^{-x^2}\int_{x/2}^{x}\frac{t\,\mathrm{e}^{t^2}}{t^3}\,\mathrm{d}t\\ &= x\,\mathrm{e}^{-x^2}\left(\left[\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{t^2}\frac{1}{t^3}\right]_{x/2}^{x} + \frac{3}{2}\int_{x/2}^{x}\frac{\mathrm{e}^{t^2}}{t^4}\,\mathrm{d}t\right)\\ &= \frac{1}{2x^2} - \frac{4}{x^2}\,\mathrm{e}^{-3/4x^2} + \frac{3x}{2}\,\mathrm{e}^{-x^2}\int_{x/2}^{x}\frac{\mathrm{e}^{t^2}}{t^4}\,\mathrm{d}t\\ &\leq \frac{1}{2x^2} + \frac{3x}{2}\,\mathrm{e}^{-x^2}\frac{x}{2}\,\mathrm{e}^{x^2}\frac{16}{x^4}\\ &\leq \frac{1}{2x^2} + \frac{12}{x^2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0\end{aligned}$$

   Donc $x\,\mathrm{e}^{-x^2}\displaystyle\int_{x/2}^{x}\frac{\mathrm{e}^{t^2}}{t^2}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ et $\mathrm{e}^{-x^2}\displaystyle\int_{x/2}^{x}\frac{\mathrm{e}^{t^2}}{t^2}\,\mathrm{d}t = o_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)$

4. $\forall x > 0\ 0 \leq \mathrm{e}^{-x^2} \displaystyle\int_0^{x/2} \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t \leq \mathrm{e}^{-x^2}\frac{x}{2}\mathrm{e}^{x^2/4} = \frac{x}{2}\mathrm{e}^{-3/4x^2}$
   Donc $\mathrm{e}^{-x^2} \displaystyle\int_0^{x/2} \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t = o_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)$

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}_+^*\ \mathrm{e}^{-x^2}\int_{x/2}^{x} \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t &= \mathrm{e}^{-x^2}\int_{x/2}^{x} \frac{t\,\mathrm{e}^{t^2}}{t}\,\mathrm{d}t \\
&= \mathrm{e}^{-x^2}\left(\left[\frac{\mathrm{e}^{t^2}}{2t}\right]_{x/2}^{x} + \int_{x/2}^{x}\frac{\mathrm{e}^{t^2}}{2t^2}\,\mathrm{d}t\right) \\
&= \frac{1}{2x} - \frac{\mathrm{e}^{-3/4x^2}}{x} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2}\int_{x/2}^{x}\frac{\mathrm{e}^{t^2}}{t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2x} + o_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right) + o_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)
\end{aligned}$$

   Finalement en $+\infty$, $\varphi(x) \sim \dfrac{1}{2x}$.

5. $\forall x < 0\ \varphi(x) < 0$
   $\varphi(1) > 0$
   $\varphi(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ donc :
   $\exists a > 1$ tq $\forall x \in [a;+\infty[\ \varphi(x) \leq \varphi(1)$
   D'après le théorème des bornes atteintes :
   $\exists x_0 \in [0;a]$ tq $\forall x \in [0;a]\ \varphi(x) \leq \varphi(x_0)$
   $1 \in [0;a]$ donc $\varphi(1) \leq \varphi(x_0)$
   On en déduit :
   $\forall x \in \mathbb{R}\ \varphi(x) \leq \varphi(x_0)$
   On a déjà $x_0 \geq 0$. $x_0$ ne peut pas être nul car $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(1) > 0$.

   Passons aux variations de $\varphi$.

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}\ \varphi(-x) &= \mathrm{e}^{-x^2}\int_0^{-x} \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \mathrm{e}^{-x^2}\int_0^{x} \mathrm{e}^{y^2}(-\,\mathrm{d}y) \text{ changement de variable } y = -t \\
&= -\varphi(x)
\end{aligned}$$

   La fonction $\varphi$ est impaire, on peut se contenter d'étudier ses variations sur $\mathbb{R}_+$.

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}_+\ \varphi'(x) &= 1 - 2x\varphi(x) = 1 - 2x\,\mathrm{e}^{-x^2}\int_0^{x} \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \mathrm{e}^{-x^2} f(x) \text{ avec } f(x) = \mathrm{e}^{x^2} - 2x\int_0^{x} \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t \\
f'(x) &= 2x\,\mathrm{e}^{x^2} - 2x\,\mathrm{e}^{x^2} - 2\int_0^{x} \mathrm{e}^{t^2} \\
&= -2\int_0^{x} \mathrm{e}^{t^2} < 0 \text{ si } x > 0
\end{aligned}$$

   Donc $f$ s'annule au plus une fois sur $\mathbb{R}_+$.
   Donc $\varphi'$ s'annule au plus une fois sur $\mathbb{R}_+$.

D'après le début de la question, $\varphi'$ s'annule en $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$ donc $\varphi'$ s'annule une fois et une seule sur $\mathbb{R}_+^*$.
$\varphi$ est donc strictement décroissante sur $]-\infty;-x_0]$, strictement croissante sur $[-x_0;x_0]$ et strictement décroissante sur $[x_0;+\infty[$.

**Exercice 4** *(Mines 2024)*

Pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, on pose $u_{n,p} = \dfrac{1}{p^n}\left(\sqrt[n]{1+\dfrac{1}{p}} + \sqrt[n]{1+\dfrac{2}{p}} + \cdots + \sqrt[n]{1+\dfrac{p}{p}}\right)^n$.
Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\lim\limits_{p\to+\infty} u_{n,p}\right)$ et $\lim\limits_{p\to+\infty}\left(\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n,p}\right)$

**Correction**
On commence par fixer $n \in \mathbb{N}^*$.
$u_{n,p} = \left(\dfrac{1}{p}\displaystyle\sum_{k=1}^{p}\sqrt[n]{1+\dfrac{k}{p}}\right)^n$
On reconnnaît une somme de Riemann donc :
$\dfrac{1}{p}\displaystyle\sum_{k=1}^{p}\sqrt[n]{1+\dfrac{k}{p}} \xrightarrow[p\to+\infty]{} \int_0^1 \sqrt[n]{1+t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 (1+t)^{1/n}\,\mathrm{d}t = \left[\dfrac{(1+t)^{1+1/n}}{1+1/n}\right]_0^1 = \dfrac{2^{1+1/n}-1}{1+1/n}$
On cherche ensuite la limite de $v_n = \left(\dfrac{2^{1+1/n}-1}{1+1/n}\right)^n$.

$$\begin{aligned}
\ln(v_n) &= n\left(\ln\left(2^{1+1/n}-1\right) - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)\\
&= n\left(\ln\left(2\,\mathrm{e}^{\ln(2)/n}-1\right) - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\
&= n\left(\ln\left(2\left(1+\frac{\ln(2)}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)-1\right) - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\
&= n\left(\ln\left(1+\frac{2\ln(2)}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\
&= n\left(\frac{2\ln(2)-1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\
&= 2\ln(2) - 1 + o(1)
\end{aligned}$$

On en déduit $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\lim\limits_{p\to+\infty} u_{n,p}\right) = \dfrac{4}{\mathrm{e}}$

On fixe $p > 0$.

$$\begin{aligned} u_{n,p} &= \left(\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}\sqrt[n]{1+\frac{k}{p}}\right)^n = \left(\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}\exp\left(\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{k}{p}\right)\right)\right)^n \\ &= \left(\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}\left(1+\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{k}{p}\right)+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)^n \\ &= \left(1+\frac{1}{n}\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}\ln\left(1+\frac{k}{p}\right)+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \\ &= \exp\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}\ln\left(1+\frac{k}{p}\right)+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) \\ &= \exp\left(n\left(\frac{1}{n}\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}\ln\left(1+\frac{k}{p}\right)+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) \end{aligned}$$

Donc $u_{n,p} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \exp\left(\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}\ln\left(1+\frac{k}{p}\right)\right)$
Mais avec les sommes de Riemann :

$$\begin{aligned} \lim_{p\to+\infty}\left(\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}\ln\left(1+\frac{k}{p}\right)\right) &= \int_0^1 \ln(1+t)\,\mathrm{d}t = \int_1^2 \ln(x)\,\mathrm{d}x \\ &= [x\ln(x)-x]_1^2 = 2\ln(2)-1 \end{aligned}$$

On en déduit $\lim_{p\to+\infty}\left(\lim_{n\to+\infty} u_{n,p}\right) = \frac{4}{\mathrm{e}}$

**Exercice 5** *(Mines 2022, 2024)*

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ continue telle que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f(f(x)) = x$
Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) = x$.

**Correction**
Sur $\mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ convient donc il faut faire quelque chose de 0. Si $f(x) = f(y)$ alors $x = f(f(x)) = f(f(y)) = y$ donc $f$ est injective.
$f$ étant continue, elle est alors strictement monotone.
Supposons $f$ strictement décroissante.
$\forall x \in \mathbb{R}_+\ f(x) \leq f(0)$.
Donc $f(\mathbb{R}_+) \subset [0; f(0)]$.
Donc $\mathbb{R}_+ = f(f(\mathbb{R}_+)) \subset f([0; f(0)])$ qui est un segment. C'est absurde donc $f$ est strictement croissante.
Supposons $f(x) > x$.
$f(f(x)) > f(x)$ ie $x > f(x)$ : absurde.
Supposons $f(x) < x$.
$x = f(f(x)) < f(x)$ : absurde.
Donc $f(x) = x$ pour tout $x$.

**Exercice 6** *(Ens 2025)*

Trouver les fonctions $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$f(x) = \frac{n}{2}\int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} f(t)\,\mathrm{d}t$$

**Variante**
Trouver les fonctions $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$f(x) = \frac{n}{2}\int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} f(t)\,\mathrm{d}t$$

**Correction**
Soit $F$ une primitive de $f$. $F$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, on peut lui appliquer la formule de Taylor-Young.
A $x$ fixé quand $n$ tend vers $+\infty$ :

$$\begin{aligned}
& f(x) = \frac{n}{2}\left(F\left(x+\frac{1}{n}\right) - F\left(x-\frac{1}{n}\right)\right)\\
= \;& \frac{n}{2}\left(F(x) + F'(x)\frac{1}{n} + \frac{F''(x)}{2}\frac{1}{n^2} + \frac{F^{(3)}(x)}{6}\frac{1}{n^3} - \left(F(x) - F'(x)\frac{1}{n} + \frac{F''(x)}{2}\frac{1}{n^2} - \frac{F^{(3)}(x)}{6}\frac{1}{n^3}\right) + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\\
= \;& \frac{n}{2}\left(2f(x)\frac{1}{n} + \frac{F^{(3)}(x)}{3}\frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\\
= \;& f(x) + \frac{F^{(3)}(x)}{6}\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

On en déduit :
$\frac{F^{(3)}(x)}{6}\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = 0$
En multipliant par $n^2$ et en faisant tendre $n$ vers l'infini, on obtient $F^{(3)}(x) = 0$.
Comme c'est vrai pour tout $x$ de $\mathbb{R}$, on a :
$\forall x \in \mathbb{R}\ f''(x) = F^{(3)}(x) = 0$
Donc $f$ est une fonction affine.

Réciproquement, supposons $f$ affine :
$\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2$ tq $\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) = ax + b$.

$$\begin{aligned}
\forall (x,n) \in \mathbb{R}\times\mathbb{N}^*\ \frac{n}{2}\int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} f(t)\,\mathrm{d}t &= \frac{n}{2}\int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} (at+b)\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{n}{2}\left[\frac{a}{2}t^2 + bt\right]_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}}\\
&= \frac{an}{4}\left(\left(x+\frac{1}{n}\right)^2 - \left(x-\frac{1}{n}\right)^2\right) + \frac{nb}{2}\left(x+\frac{1}{n} - \left(x-\frac{1}{n}\right)\right)\\
&= ax + b
\end{aligned}$$

Les fonctions cherchées sont donc les fonctions affines.

**Variante**
Les correcteurs proposent une solution compliquée, différente de la première alors que la variante n'en est pas une.

Soit $f$ de classe $\mathcal{C}^1$ solution.
Soit $F$ une primitive de $f$. $F$ est de classe $\mathcal{C}^2$.
$\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) = \dfrac{F(x+1) - F(x-1)}{2}$
On en déduit que $f$ est de classe $\mathcal{C}^2$ puis $F$ de classe $\mathcal{C}^3$...
On peut donc montrer par récurrence que $f$ est de classe $\mathcal{C}^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
Donc $f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

**Exercice 7** *(Ens 2024)*

Soient $a_1, \dots, a_N$ des réels avec $a_N \neq 0$.
Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{N} a_k \sin(2\pi k x)$.
Pour tout $j \in \mathbb{N}$, on note $f^{(j)}$ la dérivée $j$-ème de $f$.
On note $n_j$ le nombre de zéros de $f^{(j)}$ sur $[0;1[$.
Montrer que la suite $(n_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est croissante et converge vers $2N$.

**Correction**

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) &= \sum_{k=1}^{N} a_k \frac{\mathrm{e}^{2i\pi kx} - \mathrm{e}^{-2ik\pi x}}{2i} = \frac{1}{2i}\left(\sum_{k=1}^{N} a_k \mathrm{e}^{2i\pi kx} - \sum_{k=1}^{N} a_k \mathrm{e}^{-2i\pi kx}\right) \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-2i\pi Nx}}{2i}\left(\sum_{k=1}^{N} a_k \mathrm{e}^{2i\pi (k+N)x} - \sum_{k=1}^{N} a_k \mathrm{e}^{2i\pi (N-k)x}\right) \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-2i\pi Nx}}{2i}\left(\sum_{k=N+1}^{2N} a_{k-N} \mathrm{e}^{2i\pi kx} - \sum_{k=0}^{N-1} a_{N-k} \mathrm{e}^{2i\pi kx}\right) \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-2i\pi Nx}}{2i} P\left(\mathrm{e}^{2i\pi x}\right)
\end{aligned}$$

avec $P = \displaystyle\sum_{k=N+1}^{2N} a_{k-N} X^k - \sum_{k=0}^{N-1} a_{N-k} X^k \in \mathbb{C}[X]$
$P$ est de degré $2N$ (car $a_N \neq 0$) donc $P$ a au plus $2N$ racines (comptées sans leurs multiplicités).
La fonction $\begin{cases} [0;1[ \to \mathbb{C} \\ x \mapsto \mathrm{e}^{2i\pi x} \end{cases}$ est injective donc $f$ a bien un nombre fini, noté $n_0$, de racines. Il est majoré par $2n$.

$\forall j \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{R}\ f^{(2j)}(x) = (-1)^j \displaystyle\sum_{k=1}^{N} a_k (2\pi k)^{2j} \sin(2\pi k x)$
Donc $f^{(2j)}$ a bien un nombre fini, noté $n_{2j}$, de racines. Il est majoré par $2n$.

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R}\ f'(x) &= \sum_{k=1}^{N} a_k \frac{\mathrm{e}^{2i\pi kx}+\mathrm{e}^{-2ik\pi x}}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{N} a_k\,\mathrm{e}^{2i\pi kx}+\sum_{k=1}^{N} a_k\,\mathrm{e}^{-2i\pi kx}\right)\\ &= \frac{\mathrm{e}^{-2i\pi Nx}}{2}\left(\sum_{k=1}^{N} a_k\,\mathrm{e}^{2i\pi(k+N)x}+\sum_{k=1}^{N} a_k\,\mathrm{e}^{2i\pi(N-k)x}\right)\\ &= \frac{\mathrm{e}^{-2i\pi Nx}}{2}\left(\sum_{k=N+1}^{2N} a_{k-N}\,\mathrm{e}^{2i\pi kx}+\sum_{k=0}^{N-1} a_{N-k}\,\mathrm{e}^{2i\pi kx}\right)\\ &= \frac{\mathrm{e}^{-2i\pi Nx}}{2}P\left(\mathrm{e}^{2i\pi x}\right)\end{aligned}$$

avec $P=\sum_{k=N+1}^{2N} a_{k-N}X^k+\sum_{k=0}^{N-1} a_{N-k}X^k\in\mathbb{C}[X]$
$P$ est de degré $2N$ (car $a_N\neq 0$) donc $P$ a au plus $2N$ racines (comptées sans leurs multiplicités).
La fonction $\begin{cases}[0;1[\to\mathbb{C}\\ x\mapsto \mathrm{e}^{2i\pi x}\end{cases}$ est injective donc $f'$ a bien un nombre fini, noté $n_1$, de racines. Il est majoré par $2n$.

$\forall j\in\mathbb{N}\ \forall x\in\mathbb{R}\ f^{(2j+1)}(x)=(-1)^j\sum_{k=1}^{N} a_k(2\pi k)^{2j}\cos(2\pi kx)$
Donc $f^{(2j+1)}$ a bien un nombre fini, noté $n_{2j+1}$, de racines. Il est majoré par $2n$.

Si $n_0=0$ alors $n_1\geq n_0$.
Si $n_0=1$, $f$ s'annule en $x_1\in[0;1[$.
$f$ est 1-périodique donc $f$ s'annule en $x_1+1\geq 1>x_1$.
D'après le théorème de Rolle, $f'$ s'annule en $y_1$ tel que $x_1<y_1<x_1+1$.
Si $y_1\in[0;1[$ alors $n_1\geq 1=n_0$.
Si $y_1\in[1;x_0+1[$ alors, $f'$ étant également 1-périodique, $f'$ s'annule en $y_1-1\in[0;x_0[\subset[0;1[$.
Donc $n_1\geq 1=n_0$.
On suppose $n_0\geq 2$.
Notons $x_1,\dots,x_{n_0}$ avec $0\leq x_1<\dots<x_{n_0}<1$ les racines de $f$.
$f$ est 1-périodique donc $f$ s'annule en $x_1+1\geq 1>x_{n_0}$.
D'après le théorème de Rolle $f'$ s'annule en $y_1,\dots,y_{n_0}$ avec :
$x_1<y_1<x_2<\dots<y_{n_0-1}<x_{n_0}<y_{n_0}<x_1+1$
Si $y_{n_0}<1$ alors on peut affirmer $n_1\geq n_0$.
Si$y_{n_0}\geq 1$, $f'$ étant également 1-périodique, $f'$ s'annule en $y_{n_0}-1$ avec $0\leq y_{n_0}-1<x_1<y_1$ donc on a aussi $n_1\geq n_0$.

Le même raisonnement vaut pour $f^{(j)}$ à la place de $f$ donc :
$\forall j\in\mathbb{N}\ n_{j+1}\geq n_j$

La suite $(n_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par $2N$ donc elle converge vers $l\leq 2N$.
$a_N\neq 0$ donc :
$$\frac{\sum_{k=1}^{N-1}|a_k|(2\pi k)^{2j}}{|a_N|(2\pi N)^{2j}}=\frac{1}{|a_N|}\sum_{k=1}^{N-1}|a_k|\left(\frac{k}{N}\right)^{2j}\xrightarrow[j\to+\infty]{}0$$

Par conséquent :
$\exists j_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall j \geq j_0 \ \sum_{k=1}^{N-1} |a_k| (2\pi k)^{2j} < |a_n| (2\pi N)^{2j}$
Pourt tout $l \in [\![0; 2N]\!]$, soit $x_l = \dfrac{l}{2N}$.
On a $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_{2N} = 1$
Soit $j \geq j_0 + 1$.
On sait déjà que $n_{2j+1} \leq 2N$.
$f^{(2j+1)}(x_l) = (-1)^j \left( \sum_{k=1}^{N-1} a_k (2\pi k)^{2j} \cos(2\pi k x_l) + a_N (2\pi N)^{2j} (-1)^l \right)$
$\left| \sum_{k=1}^{N-1} a_k (2\pi k)^{2j} \cos(2\pi k x_l) \right| \leq \sum_{k=1}^{N-1} |a_k| (2\pi k)^{2j} < |a_n| (2\pi N)^{2j}$
Donc $f^{(2j+1)}(x_l)$ a le signe de $(-1)^{j+l}$.
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, $f^{(2j+1)}$ s'annule sur $]x_l; x_{l+1}[$, $0 \leq l \leq 2N-1$.
On en déduit $n_{2j+1} \geq 2N$.
Donc :
$\forall j \geq j_0 \ n_{2j+1} = 2N$
Mais par extraction, $n_{2j+1} \xrightarrow[j \to +\infty]{} l$ donc $l = 2N$.

**Exercice 8** *(Ens 2025)*

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ avec $f(x) = 0$ pour tout $x \notin [0; 1]$.
On pose pour tout $y \in \mathbb{R}$ :

$$g(y) = \int_0^1 |y - x| f(x) \, \mathrm{d}x$$

Montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}$, $g''(y) = 2f(y)$.
A quelle condition a-t-on $g$ bornée ?

**Correction**
$\forall y \geq 1 \ g(y) = \int_0^1 (y - x) f(x) \, \mathrm{d}x = y \int_0^1 f(x) \, \mathrm{d}x - \int_0^1 x f(x) \, \mathrm{d}x$
On en déduit :

- $g$ est bornée sur $[1; +\infty[$ si, et seulement si, $\int_0^1 f(x) \, \mathrm{d}x = 0$
- La restriction de $g$ à $[1; +\infty[$ est de classe $\mathcal{C}^2$ et :
  $\forall x \in ]1; +\infty[ \ g''(x) = 0 = f''(x)$ (car $f$ est nulle sur $]1; +\infty[$)
  La dérivée seconde à droite en 1 de $g$ est nulle, tout comme $2f$ par continuité.

$$\begin{aligned} \forall y \in [0; 1] \ g(y) &= \int_0^y (y - x) f(x) \, \mathrm{d}x + \int_y^1 (x - y) f(x) \, \mathrm{d}x \\ &= y \int_0^y f(x) \, \mathrm{d}x - \int_0^y x f(x) \, \mathrm{d}x - \int_1^y x f(x) \, \mathrm{d}x + y \int_1^y f(x) \, \mathrm{d}x \end{aligned}$$

D'après le théorème fondamental de l'analyse, $g$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[0; 1]$ et :

$$\begin{aligned} \forall y \in [0; 1] \ g'(y) &= \int_0^y f(x) \, \mathrm{d}x + y f(y) - y f(y) - y f(y) + y f(y) + \int_1^y f(x) \, \mathrm{d}x \\ &= \int_0^y f(x) \, \mathrm{d}x + \int_1^y f(x) \, \mathrm{d}x \end{aligned}$$

En 0, il s'agit d'une dérivée à droite et en 1 d'une dérivée à gauche.
Toujours, d'après le théorème fondamental de l'analyse, $g$ est $\mathcal{C}^2$ sur $[0;1]$ et :
$\forall y \in [0;1]\ g''(y) = 2f(y)$
En 1 à gauche , la dérivée seconde est nulle des deux côtés et la dérivée première vaut $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ des deux côtés.
$g$ qui est continue est évidemment bornée sur $[0;1]$.
$\forall y \leq -1\ g(y) = \displaystyle\int_0^1 (x-y)f(x)\,\mathrm{d}x = -y\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x$
On en déduit :

- $g$ est bornée sur $]-\infty;-1]$ si, et seulement si, $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$
- La restriction de $g$ à $]-\infty;-1]$ est de classe $\mathcal{C}^2$ et :
  $\forall x \in ]-\infty;-1[\ g''(x) = 0 = f''(x)$ (car $f$ est nulle sur $]-\infty;-1[$)
  La dérivée seconde à gauche en -1 de $g$ est nulle, tout comme $2f$ par continuité.
- La dérivée à gauche en 0 de $g$ vaut $-\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ comme la dérivée à droite.

On a donc $g$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ avec :
$\forall x \in \mathbb{R}\ g''(x) = 2f(x)$
et :
$g$ bornée $\iff \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$

**Exercice 9** *(Ens 2025)*

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs qui converge vers 0.
On suppose :
$\exists c > 0$ tq $\forall n \in \mathbb{N}\ |a_{n+1} - a_n| \leq ca_n^2$
Montrer :
$\exists d > 0$ tq $\forall n \in \mathbb{N}^*\ a_n \geq \dfrac{d}{n}$

**Correction**
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $b_n = \dfrac{1}{a_n}$
On a :
$\forall n \in \mathbb{N}\ \left|\dfrac{1}{b_{n+1}} - \dfrac{1}{b_n}\right| \leq \dfrac{c}{b_n^2}$
On en déduit :
$\forall n \in \mathbb{N}\ |b_{n+1} - b_n| \leq c\dfrac{b_{n+1}}{b_n} = c\dfrac{a_n}{a_{n+1}}$
Mais :
$\forall n \in \mathbb{N}\ \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n} - 1\right| \leq ca_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$
Donc :
$\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq n_0\ \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geq \dfrac{1}{2}$
Donc :
$\forall n \geq n_0\ |b_{n+1} - b_n| \leq 2c$
On note $C = \max\left(|b_1 - b_0|, |b_2 - b_1|, \ldots, |b_{n_0} - b_{n_0-1}|, 2c\right)$ de sorte que :
$\forall n \in \mathbb{N}\ |b_{n+1} - b_n| \leq C$
On a alors :

$\forall n \in \mathbb{N}^*\ |b_n| = \left|b_0 + \sum_{k=0}^{n-1} b_{k+1} - b_k\right| \leq |b_0| + \sum_{k=0}^{n-1} |b_{k+1} - b_k| \leq b_0 + nC$
Si on pose $D = b_0 + C$ alors :
$\forall n \in \mathbb{N}^*\ b_n \leq Dn$
$d = \dfrac{1}{D}$ répond à la question.

**Exercice 10** *(Ens 2025)*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, positive, telle que $f''$ soit bornée. Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \left|f'(x)\right|^2 \leq Cf(x)$$

**Correction**
$\forall x \in \mathbb{R}\ |f'(x)|^2 = f'(x)^2$
On suppose dans l'énoncé :
$\exists M \in \mathbb{R}$ tq $\forall x \in \mathbb{R}\ |f''(x)| \leq M$
Quitte à augmenter $M$, on peut le supposer strictement positif.

- **Première méthode**
  D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange :
  $\forall (x,h) \in \mathbb{R}^2\ |f(x+h) - f(x) - hf'(x)| \leq \dfrac{M}{2}h^2$
  D'où :
  $\forall (x,h) \in \mathbb{R}^2\ f(x+h) - f(x) - hf'(x) \leq \dfrac{M}{2}h^2$
  Donc :
  $\forall (x,h) \in \mathbb{R}^2\ \dfrac{M}{2}h^2 + hf'(x) + f(x) \geq f(x+h) \geq 0$
  Pour tout $x \in \mathbb{R}$, le trinôme $\dfrac{M}{2}X^2 + f'(x)X + f(x)$ est de signe constant donc son discriminant est négatif :
  $\forall x \in \mathbb{R}\ f'(x)^2 - 2Mf(x) \leq 0$
  D'où le résultat avec $C = 2M > 0$
- **Deuxième méthode**
  Soit $x \in \mathbb{R}$.
  Supposons $f'(x) < 0$.
  $\forall t \in \mathbb{R}_+\ f''(x+t) \leq M$
  D'où :
  $\forall t \in \mathbb{R}_+\ f'(x+t) = f'(x) + \displaystyle\int_x^{x+t} f''(y)\,\mathrm{d}y \leq f'(x) + Mt$
  et en intégrant une seconde fois :

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}_+\ f(x+t) &= f(x) + \int_x^{x+t} f'(y)\,\mathrm{d}y = f(x) + \int_0^t f'(t+y)\,\mathrm{d}y \\ &\leq f(x) + tf'(x) + \frac{M}{2}t^2 \end{aligned}$$

  On prend alors $t = -\dfrac{f'(x)}{M} \geq 0$ :
  $0 \leq f(x+t) \leq f(x) - \dfrac{f'(x)^2}{2M}$
  ce qui donne $f'(x)^2 \leq 2Mf(x)$
  Si $f'(x) > 0$, on fait le même raisonnement mais en considérant $t \leq 0$.
  Enfin si $f'(t) = 0$, l'inégalité $f'(x)^2 \leq 2Mf(x)$ est évidente car $f$ est positive.