Révisions 2026
jeudi 21 mai 2026

941

Exercice 1 *(CCP 2024)*

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.
Soit $(f,g) \in \mathcal{L}(E)^2$ tq $E = \mathrm{Ker}\,(f) + \mathrm{Ker}\,(g) = \mathrm{Im}\,(f) + \mathrm{Im}\,(g)$.
Montrer que ces sommes sont directes.

Exercice 2 *(Ens 2025)*

On définit la fonction Rev de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ par :
$\mathrm{Rev}(0) = 0$
si P est de degré $d \in \mathbb{N}$ ie $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ avec $a_d \neq 0$ alors $\mathrm{Rev}(P) = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_{d-k} X^k$

1. Rev est-elle linéaire ? bijective ?
2. Soit $d \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{Q}_d = \{P \in \mathbb{R}[X] \text{ tq } \deg(P) = d \text{ et } P(0) \neq 0\}$.
   Montrer que Rev induit une bijection de $\mathcal{Q}_d$ dans lui même.
3. Déterminer les polynômes P tels que $\mathrm{Rev}(P') = (\mathrm{Rev}(P))'$.

Exercice 3 *(Mines 2024)*

Soit S_n l'ensemble des permutations de $[\![1;n]\!]$.

1. Soit $\sigma \in S_n$.
   Montrer que $u \begin{cases} S_n \to S_n \\ s \mapsto s \circ \sigma \end{cases}$ est une permutation de S_n.
2. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
   Si $\sigma \in S_n$, on note f_σ l'unique endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ tel que :
   $\forall i \in [\![1;n]\!] \ f_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$
   Soit $p_n = \dfrac{1}{n!} \displaystyle\sum_{\sigma \in S_n} f_\sigma$
   Montrer que p_n est une projection, déterminer son noyau et son image.
3. Soit $H = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \text{ tq } x_1 + \cdots + x_n = 0\}$.
   Soit v un élément non nul de H.
   Montrer que les vecteurs $f_\sigma(v)$, $\sigma \in S_n$ engendrent H.

Exercice 4 *(Ens 2025)*

Soit D une matrice diagonale et E la matrice contenant un 1 en haut à droite et des 0 partout ailleurs.

1. Calculer $a_n \in \mathbb{R}$ tel que $(D+E)^n = D^n + a_n E$.
2. Déterminer un équivalent de a_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 5 *(Ens 2025)*

Soient N et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $\mathrm{rg}(M) = k$ et $\mathrm{rg}(N) = l$.
Quelles sont les valeurs possibles pour $\mathrm{rg}(NM)$?

Exercice 6 *(Ens 2025)*

Soit E un sous-espace vectoriel de dimension 4 de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
Soit $f_+ \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \mathrm{e}^x \end{cases}$ et $f_- \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \mathrm{e}^{-x} \end{cases}$.
Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, on note $L^\infty(I,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de E bornées sur I et $L^2(I,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de E dont le carré est intégrable sur I.

1. On suppose que
$$E = \mathrm{Vect}(f_+) + \mathrm{Vect}(f_-) + G \text{ où } G \subset L^\infty(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}) \text{ et } G \cap L^2(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}) = \{0\}$$
Montrer que $E \cap L^2(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \{0\}$.
2. On suppose de plus la propriété suivante :
$$E = F_1 + F_2 \text{ avec } \dim(F_1) = \dim(F_2) = 2, \quad F_1 \subset L^\infty(\mathbb{R}_-,\mathbb{R}) \text{ et } F_2 \cap L^\infty(\mathbb{R}_-,\mathbb{R}) = \{0\}$$
Montrer que $\dim(E \cap L^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})) = 1$.