Révisions 2026
jeudi 28 mai 2026

941

Exercice 1 *(Mines-Telecom MP 2024)*

On dispose de N coffres.
La probabilité que le trésor se trouve dans ces coffres est p.
Les coffres ont chacun la même probabilité de contenir le trésor.
Sachant que le trésor n'était pas dans les $N-1$ premiers coffres, quelle est la probabilité qu'il soit dans le dernier ?

Exercice 2 *(Mines Telecom 2024)*

On lance indéfiniment une piéce faisant Pile avec une probabilité $p \in]0,1[$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n l'évènement « obtenir deux Pile consécutifs pour la premiére fois au bout du $n^{\text{ième}}$ lancer »et $a_n = P(A_n)$.

1. Calculer a_1, a_2, a_3 et a_4.
2. Déterminer une relation entre a_{n+2}, a_{n+1} et a_n.
3. Montrer qu'il est quasi-certain qu'on obtienne deux Pile consécutifs.

Exercice 3 *(Ens 2025)*

On joue à pile ou face et on note p la probabilité d'avoir ”Face”, $q = 1-p$ la probabilité d'avoir ”Pile” et l'évènement

$$A_n = \{\text{”il n'y a pas eu 2 résultats”Face” de suite lors des } n \text{ premiers lancers”}\}$$

Donner un équivalent de $P(A_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 4 *(CCP 2024)*

On a une pièce non truquée.
Soit X la variable aléatoire égale au rang où on obtient pour la première fois pile.
Soit Y une variable aléatoire telle que la loi de Y conditionnellement à l'évènement $X = n$ est la loi uniforme sur $[\![1; n]\!]$.

1. Donner la loi et l'espérance de X.
2. Soit $(n, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.
   (a) Calculer $P(X = n, Y = k)$.
   (b) En déduire, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P(Y = k) = \displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}$
   X et Y sont-elles indépendantes ?

3. (a) Trouver une relation entre $P(Y=k)$ et $P(Y=k+1)$.
   (b) Rappeler le développement en série entière de $x \mapsto \ln(1+x)$.
   En déduire $P(Y=1)$.
4. Montrer :
   $\forall k \in \mathbb{N}^*\ P(Y=k) = \displaystyle\int_0^{1/2} \frac{t^{k-1}}{1-t}\,\mathrm{d}t.$
5. Calculer $E(Y)$.

Exercice 5 *(Mines Telecom 2024)*

Soient $X_1, \ldots, X_n$ n variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant la loi uniforme sur $\{-1;1\}$.
Soit $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$.

1. Espérance et variance de S_n ?
2. Loi de S_n ?

Exercice 6 *(Ens 2025)*

Soit N une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre λ.
On lance N fois une pièce équilibrée.
Quelle est la probabilité d'avoir un nombre pair de faces ?

Exercice 7 *(Mines 2024)*

Soit E un ensemble de cardinal n.
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathcal{P}(E)$ qui suivent la loi uniforme sur $\mathcal{P}(E)$.
Trouver la loi de $Z = \mathrm{Card}(X \cup Y)$.

Exercice 8 *(Mines 2024)*

Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes la loi uniforme sur $\{-1;1\}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.

1. Donner $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} X_k(\Omega) = X_1(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega)$ et la loi du n-uplet $(X_1, \ldots, X_n)$.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
   Donner $T_n(f) = E\left(f(S_n)\right)$ sous forme de somme.
3. En déduire la relation de récurrence : $T_n(f) = T_{n-1}(g)$ avec $g : x \mapsto \dfrac{f(x+1)+f(x-1)}{2}$.
4. Montrer que la suite $\left(E(|S_n|)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
5. Comparer $\left(E(|S_n|)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$.
6. Donner la loi de S_n.
7. Une question pour montrer qu'à l'infini S_n est presque nulle presque sûrement. (Cette question est supprimée).

Exercice 9 *(Ens 2024)*

On dispose d'une urne initialement vide, d'une boule rouge et d'un stock infini de boules blanches.
On commence par remplir l'urne : à chaque étape la probabilité de mettre la boule rouge est $\frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ et on s'arrête dès que la boule rouge a été placée dans l'urne.
On retire ensuite les boules une à une de l'urne et on s'arrête lorsqu'on tire la boule rouge.
Quelle est l'espérance du nombre de boules restant dans l'urne ?

Exercice 10 *(Ens 2024)*

Soient $n, k \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{N}$.
Soit X une partie aléatoire de cardinal k de $[\![1; k+a]\!]$. On suppose que X suit la loi uniforme sur l'ensemble des parties de cardinal k de $[\![1; k+a]\!]$.
Soit Y une partie aléatoire de cardinal n de $[\![1; k+n+a]\!]$. On suppose que Y suit la loi uniforme sur l'ensemble des parties de cardinal n de $[\![1; k+n+a]\!]$.
On suppose X et Y indépendantes.
Montrer que $P(\min(Y) > \max(X))$ est indépendant de a.