

Révisions 2026
jeudi 28 mai 2026

941

Exercice 1 (*Mines-Telecom MP 2024*)

On dispose de N coffres.

La probabilité que le trésor se trouve dans ces coffres est p .

Les coffres ont chacun la même probabilité de contenir le trésor.

Sachant que le trésor n'était pas dans les $N - 1$ premiers coffres, quelle est la probabilité qu'il soit dans le dernier ?

Correction

On note X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si le i -ème coffre contient le trésor et 0 sinon.

Les X_i ne sont pas indépendantes : $P((X_1 = 1) \cap (X_2 = 1)) = 0$ (si il n'y a qu'un seul trésor) et $P(X_1 = 1) \times P(X_2 = 1) > 0$.

L'évènement "le trésor est dans l'un des coffres" s'écrit $\bigcup_{i=1}^N (X_i = 1)$ et il y a incompatibilité.

$$\text{Donc } p = \sum_{i=1}^N P(X_i = 1)$$

Les coffres ont chacun la même probabilité de contenir le trésor donc $p = NP(X_1 = 1)$: chaque coffre a une probabilité $\frac{p}{N}$ de contenir le coffre.

$$\text{On cherche } P\left(X_N = 1 \mid \bigcap_{i=1}^{N-1} X_i = 0\right).$$

$$\begin{aligned} P\left(X_N = 1 \mid \bigcap_{i=1}^{N-1} X_i = 0\right) &= \frac{P\left(X_N = 1 \cap \left(\bigcap_{i=1}^{N-1} X_i = 0\right)\right)}{P\left(\bigcap_{i=1}^{N-1} X_i = 0\right)} \\ &= \frac{P(X_N = 1)}{P\left((X_N = 1) \cup \left(\bigcap_{i=1}^N X_i = 0\right)\right)} \\ &= \frac{\frac{p}{N}}{P(X_N = 1) + P\left(\bigcap_{i=1}^N X_i = 0\right)} \\ &= \frac{\frac{p}{N}}{\frac{p}{N} + 1 - p} = \frac{p}{p + N(1 - p)} \end{aligned}$$

Si N est grand, cela fait environ $\frac{p}{N(1-p)}$ et cela tend vers 0 quand N tend vers l'infini : si on n'a pas trouvé le trésor après avoir vidé tous les coffres sauf 1, c'est sans doute parce que le coffre n'y est pas.

Si $p = 1$, on trouve 1 : c'est normal le trésor est dans un coffre et on les a tous regardé sauf le dernier donc il est dans le dernier.

Si $p = 0$, on trouve 0 : si le trésor n'est pas dans les coffres, avoir ouvert $N - 1$ coffres n'apporte aucune information.

Exercice 2 (Mines Telecom 2024)

On lance indéfiniment une pièce faisant Pile avec une probabilité $p \in]0, 1[$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n l'évènement « obtenir deux Pile consécutifs pour la première fois au bout du $n^{\text{ième}}$ lancer » et $a_n = P(A_n)$.

1. Calculer a_1, a_2, a_3 et a_4 .
2. Déterminer une relation entre a_{n+2}, a_{n+1} et a_n .
3. Montrer qu'il est quasi-certain qu'on obtienne deux Pile consécutifs.

Correction

1. $a_1 = 0$

On note $X_i = 1$ si on obtient Pile au $i^{\text{ième}}$ lancer, 0 sinon.

$(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes la loi de Bernoulli de paramètre p .

$$a_2 = P((X_1 = 1) \cap (X_2 = 1)) = P(X_1 = 1)P(X_2 = 1) = p^2$$

$$a_3 = P((X_1 = 0) \cap (X_2 = 1) \cap (X_3 = 1)) = qp^2 \text{ (on part des lancers 2 et 3 dont le résultat est imposé et on remonte)}$$

$$a_4 = P((X_2 = 0) \cap (X_3 = 1) \cap (X_4 = 1)) = qp^2 \text{ (on part des lancers 3 et 4 dont le résultat est imposé et on remonte)}$$

2. $\forall n \geq 3 \ P(A_n) = P(A_n \mid X_1 = 0)P(X_1 = 0) + P(A_n \mid (X_1, X_2) = (1, 0))P((X_1, X_2) = (1, 0)) + P(A_n \mid (X_1, X_2) = (1, 1))P((X_1, X_2) = (1, 1))$

On en déduit :

$$\forall n \geq 3 \ P(A_n) = qP(A_{n-1}) + pqP(A_{n-2})$$

Mais faut-il justifier $P(A_n \mid X_1 = 1) = P(A_{n-1})$?

On introduit $\mathcal{F}_k = \{(\epsilon_1, \dots, \epsilon_k) \in \{0; 1\}^k \text{ tq } \forall l \in \llbracket 1; k-2 \rrbracket (\epsilon_l, \epsilon_{l+1}) \neq (1, 1) \text{ et } (\epsilon_{k-1}, \epsilon_k) = (1, 1)\}$

On écrit plutôt la formule des probabilités totales sous la forme :

$$\forall n \geq 3 \ P(A_n) = P(A_n \cap (X_1 = 0)) + P(A_n \cap ((X_1, X_2) = (1, 0))) + P(A_n \cap ((X_1, X_2) = (1, 1)))$$

(1, 1))

$$\begin{aligned}
& \forall n \geq 3 P(A_n \cap (X_1 = 0)) \\
&= P\left(\bigcup_{\substack{(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) \in \mathcal{F}_n \\ \epsilon_1 = 0}} ((X_1, \dots, X_n) = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n))\right) \\
&= P\left(\bigcup_{(\epsilon_2, \dots, \epsilon_n) \in \mathcal{F}_{n-1}} ((X_1 = 0) \cap ((X_2, \dots, X_n) = (\epsilon_2, \dots, \epsilon_n)))\right) \\
&= \sum_{(\epsilon_2, \dots, \epsilon_n) \in \mathcal{F}_{n-1}} P((X_1 = 0) \cap ((X_2, \dots, X_n) = (\epsilon_2, \dots, \epsilon_n))) \text{ par incompatibilité} \\
&= \sum_{(\epsilon_2, \dots, \epsilon_n) \in \mathcal{F}_{n-1}} \left(P(X_1 = 0) \prod_{i=2}^n P(X_i = \epsilon_i)\right) \text{ par indépendance} \\
&= q \sum_{(\epsilon_2, \dots, \epsilon_n) \in \mathcal{F}_{n-1}} \left(\prod_{i=2}^n P(X_{i-1} = \epsilon_i)\right) \text{ car } X_i \sim X_{i-1} \\
&= qP\left(\bigcup_{(\epsilon_2, \dots, \epsilon_n) \in \mathcal{F}_{n-1}} (X_1, \dots, X_{n-1}) = (\epsilon_2, \dots, \epsilon_n)\right) \\
&= qP((X_1, \dots, X_{n-1}) \in \mathcal{F}_{n-1}) \\
&= qP(A_{n-1})
\end{aligned}$$

3. L'évènement « On obtient deux piles consécutifs » s'écrit aussi $\bigcup_{n=2}^{+\infty} A_n$.

Si on note x sa probabilité, on a :

$$\begin{aligned}
x &= \sum_{n=2}^{+\infty} P(A_n) \text{ par incompatibilité} \\
&= P(A_2) + \sum_{n=3}^{+\infty} (qP(A_{n-1}) + pqP(A_{n-2})) = p^2 + q \sum_{n=3}^{+\infty} P(A_{n-1}) + pq \sum_{n=3}^{+\infty} P(A_{n-2}) \\
&= p^2 + q \sum_{n=2}^{+\infty} P(A_n) + pq \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n) \\
&= p^2 + qx + pqx + pqP(A_1) = p^2 + (q + pq)x
\end{aligned}$$

Donc :

$$p^2 = (1 - q - pq)x = (p - pq)x = p(1 - q)x = p^2x$$

On en déduit $x = 1$.

Exercice 3 (Ens 2025)

On joue à pile ou face et on note p la probabilité d'avoir "Face", $q = 1 - p$ la probabilité d'avoir "Pile" et l'évènement

$$A_n = \{\text{"il n'y a pas eu 2 résultats "Face" de suite lors des } n \text{ premiers lancers"}\}$$

Donner un équivalent de $P(A_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Correction

On note Y_i la variable aléatoire qui vaut 1 si le i -ème lancer donne "Face" et 0 sinon.

$$A_n = \bigcap_{i=2}^n ((Y_{i-1}, Y_i) \neq (1, 1)).$$

$$P(A_0) = P(A_1) = 1.$$

$$P(A_2) = 1 - P(Y_1 = 1, Y_2 = 1) = 1 - p^2 = (1 - p)(1 + p) = q(1 + p)$$

$$P(A_3) = P((Y_1, Y_2, Y_3) \neq (1, 1, 0), (1, 1, 1), (0, 1, 1)) = 1 - 2p^2q - p^3 = 1 - 2p^2 + p^3$$

Par la formule des probabilités totales, pour $n \geq 4$:

$$\begin{aligned} P(A_n) &= P(A_n \cap (Y_n = 0)) + P(A_n \cap (Y_n = 1)) \\ &= P\left((Y_n = 0) \cap \left(\bigcap_{i=2}^n ((Y_{i-1}, Y_i) \neq (1, 1))\right)\right) + P\left((Y_n = 1) \cap \bigcap_{i=2}^n ((Y_{i-1}, Y_i) \neq (1, 1))\right) \\ &= P\left((Y_n = 0) \cap ((Y_{n-1}, Y_n) \neq (1, 1)) \cap \left(\bigcap_{i=2}^{n-1} ((Y_{i-1}, Y_i) \neq (1, 1))\right)\right) \\ &\quad + P\left((Y_n = 1) \cap ((Y_{n-1}, Y_n) \neq (1, 1)) \cap \left(\bigcap_{i=2}^{n-1} ((Y_{i-1}, Y_i) \neq (1, 1))\right)\right) \\ &= P\left((Y_n = 0) \cap \left(\bigcap_{i=2}^{n-1} ((Y_{i-1}, Y_i) \neq (1, 1))\right)\right) \\ &\quad + P\left((Y_n = 1) \cap (Y_{n-1} = 0) \cap \left(\bigcap_{i=2}^{n-1} ((Y_{i-1}, Y_i) \neq (1, 1))\right)\right) \\ &= P(Y_n = 0)P\left(\bigcap_{i=2}^{n-1} ((Y_{i-1}, Y_i) \neq (1, 1))\right) \\ &\quad + P\left((Y_n = 1) \cap (Y_{n-1} = 0) \cap \left(\bigcap_{i=2}^{n-2} ((Y_{i-1}, Y_i) \neq (1, 1))\right)\right) \\ &= qP(A_{n-1}) + pqP(A_{n-2}) \end{aligned}$$

Et on vérifie que la relation est vérifiée dans les cas où $n = 2$ ou 3 .

L'équation caractéristique est $r^2 - qr - pq = 0$.

Son discriminant est $q^2 + 4pq = q(q + 4p) = (1 - p)(3p + 1) > 0$ (on suppose $p \in]0; 1[$).

Donc l'équation caractéristique a deux racines réelles distinctes ! :

$$r_1 = \frac{q - \sqrt{\Delta}}{2} \text{ et } r_2 = \frac{q + \sqrt{\Delta}}{2}$$

$$r_1 < r_2 \text{ et } r_1 r_2 = -pq < 0 \text{ donc } r_1 < 0 < r_2.$$

$$\text{Le milieu de } [r_1; r_2] \text{ est } \frac{q}{2} > 0 \text{ donc } |r_1| < r_2.$$

$$\exists (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } \forall n \in \mathbb{N} P(A_n) = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$$

$$\text{Les conditions initiales donnent } \begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ r_1 C_1 + r_2 C_2 = 1 \end{cases}$$

$$\text{Donc } C_2 = \frac{1 - r_1}{r_2 - r_1}.$$

$$1 - q - pq = p - pq = p^2 \neq 0 \text{ donc } r_1 \neq 1 \text{ et } C_2 > 0.$$

$$\text{Comme } |r_1| < r_2, P(A_n) \sim C_2 r_2^n.$$

On peut exprimer C_2 en fonction de p .

$$1 - r_1 = \frac{1 + p + \sqrt{\Delta}}{2} \text{ et } r_2 - r_1 = \sqrt{\Delta}$$

Exercice 4 (CCP 2024)

On a une pièce non truquée.

Soit X la variable aléatoire égale au rang où on obtient pour la première fois pile.

Soit Y une variable aléatoire telle que la loi de Y conditionnellement à l'évènement $X = n$ est la loi uniforme sur $\llbracket 1; n \rrbracket$.

1. Donner la loi et l'espérance de X .
2. Soit $(n, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.
 - (a) Calculer $P(X = n, Y = k)$.
 - (b) En déduire, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P(Y = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}$
 X et Y sont-elles indépendantes ?
3. (a) Trouver une relation entre $P(Y = k)$ et $P(Y = k + 1)$.
 (b) Rappeler le développement en série entière de $x \mapsto \ln(1 + x)$.
 En déduire $P(Y = 1)$.
4. Montrer :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad P(Y = k) = \int_0^{1/2} \frac{t^{k-1}}{1-t} dt.$$
5. Calculer $E(Y)$.

Correction

1. X suit la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$.
 $E(X) = 2$
2. (a) $P(X = n, Y = k) = P(Y = k | X = n)P(X = n)$
 Donc $P(X = n, Y = k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k > n \\ \frac{1}{n2^n} & \text{si } k \leq n \end{cases}$
 (b) Par la formule des probabilités totales, avec le système complet d'évènements $((X = n))_{n \in \mathbb{N}^*}$:

$$P(Y = k) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X = n, Y = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}$$

$$P(X = 1, Y = 2) = 0$$

$$P(X = 1) = \frac{1}{2}$$

$$P(Y = 2) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n2^n} > 0$$

$$P(X = 1, Y = 2) \neq P(X = 1)P(Y = 2) \text{ donc } X \text{ et } Y \text{ ne sont pas indépendantes.}$$

3. (a) **Commentaire de la candidate :**

Il y a plusieurs possibilités. La réponse attendue est :

$$P(Y = k) = \frac{1}{k2^k} + P(Y = k + 1)$$

Cette relation est immédiate.

$$(b) \quad \forall x \in]-1; 1] \quad \ln(1 + x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$$

$$P(Y = 1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n} = -\ln\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \ln(2)$$

4. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, soit $\mathcal{P}(k) : P(Y = k) = \int_0^{1/2} \frac{t^{k-1}}{1-t} dt$.

$$\int_0^{1/2} \frac{dt}{1-t} = [-\ln(1-t)]_0^{1/2} = \ln(2) \text{ donc } \mathcal{P}(1) \text{ est vraie.}$$

On suppose $\mathcal{P}(k)$ vraie.

$$\begin{aligned} \int_0^{1/2} \frac{t^{k+1-1}}{1-t} dt &= \int_0^{1/2} \frac{t^k}{1-t} dt = \int_0^{1/2} \frac{t^k - t^{k-1} + t^{k-1}}{1-t} dt \\ &= \int_0^{1/2} t^{k-1} dt + P(Y = k) = \frac{1}{k2^k} + P(Y = k) \\ &= P(Y = k + 1) \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(k + 1)$ est vraie.

5. $0 \leq Y \leq X$ donc Y a une espérance et $E(Y) \leq E(X) = 2$.

$Y \geq 1$ donc $E(Y) \geq 1$.

$$E(Y) = \sum_{k=1}^{+\infty} kP(Y = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^{1/2} \frac{kt^{k-1}}{1-t} dt$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, soit $f_k \begin{cases} \left[0; \frac{1}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{kt^{k-1}}{1-t} \end{cases}$

- Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, f_k est continue sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$.

- La série de fonctions $\sum_{k \geq 1} f_k$ converge uniformément sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$:

$\forall k \in \mathbb{N}^* \forall t \in \left[0; \frac{1}{2}\right] |f_k(t)| = \frac{kt^{k-1}}{1-t} \leq 2 \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \frac{1}{2^{k-2}}$ indépendant de t et terme général d'une série convergente.

Donc la série de fonctions $\sum_{k \geq 1} f_k$ converge normalement sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$.

Donc la série de fonctions $\sum_{k \geq 1} f_k$ converge uniformément sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$.

Donc :

$$\begin{aligned} E(Y) &= \int_0^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{kt^{k-1}}{1-t} \right) dt \\ &= \int_0^{1/2} \frac{1}{(1-t)^3} dt = \left[\frac{1}{2(1-t)^2} \right]_0^{1/2} = 2 - \frac{1}{2} \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Exercice 5 (Mines Telecom 2024)

Soient X_1, \dots, X_n n variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant la loi uniforme sur $\{-1; 1\}$.

Soit $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

1. Espérance et variance de S_n ?

2. Loi de S_n ?

Correction

$$\begin{aligned} 1. E(X_i) &= \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times (-1) = 0 \\ E(X_i^2) &= E(1) = 1 \\ V(X_i) &= E(X_i^2) - E(X_i)^2 = 1 \end{aligned}$$

$$\text{Par linéarité de l'espérance : } E(S_n) = \sum_{i=1}^n E(X_i) = 0$$

$$\text{Par indépendance : } V(S_n) = \sum_{i=1}^n V(X_i) = n$$

$$2. \text{ Soit } Y_i = \frac{1 + X_i}{2}$$

Y_1, \dots, Y_n sont mutuellement indépendantes et suivent la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i = \sum_{i=1}^n (2Y_i - 1) = 2 \sum_{i=1}^n Y_i - n \text{ où } \Sigma_n = \sum_{i=1}^n Y_i \text{ suit la loi binomiale de paramètres } n \text{ et } \frac{1}{2}.$$

$$\Sigma_n(\Omega) = \llbracket 0; n \rrbracket \text{ donc } S_n(\Omega) = \{-n; -n+2; \dots; n-2; n\}$$

Soit $s \in \{-n; -n+2; \dots; n-2; n\}$.

$$\begin{aligned} P(S_n = s) &= P(2\Sigma_n - n = s) = P\left(\Sigma_n = \frac{s+n}{2}\right) \\ &= \binom{n}{\frac{n+s}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n+s}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-\frac{n+s}{2}} \\ &= \binom{n}{\frac{n+s}{2}} \frac{1}{2^n} \end{aligned}$$

Exercice 6 (Ens 2025)

Soit N une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre λ .

On lance N fois une pièce équilibrée.

Quelle est la probabilité d'avoir un nombre pair de faces ?

Correction

Soit X le nombre de faces.

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N} P(X = k) &= \sum_{l=0}^{+\infty} P(X = k \mid N = l) P(N = l) = \sum_{l=k}^{+\infty} \binom{l}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{l-k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^l}{l!} \\ &= e^{-\lambda} \sum_{l=k}^{+\infty} \binom{l}{k} \frac{\lambda^l}{2^l l!} = e^{-\lambda} \sum_{l=k}^{+\infty} \frac{l!}{k!(l-k)!} \frac{\lambda^l}{2^l l!} \\ &= \frac{e^{-\lambda}}{k!} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{i!} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{k+i} \quad i = l - k \\ &= \frac{e^{-\lambda}}{k!} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^k e^{\lambda/2} = \frac{e^{-\lambda/2}}{k!} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^k \end{aligned}$$

X suit une loi de Poisson de paramètre $\frac{\lambda}{2}$.

On a alors :

$$\begin{aligned} P(X \text{ pair}) &= \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = 2k) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2k} \frac{1}{(2k)!} e^{-\lambda/2} = e^{-\lambda/2} \cosh\left(\frac{\lambda}{2}\right) \\ &= \frac{1 + e^\lambda}{2} \end{aligned}$$

On a ici déterminé la loi de X en utilisant la loi de N mais c'est inutile.

En effet si $n \in \mathbb{N}^*$:

$$P(X \text{ pair} \mid N = n) = \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} \frac{1}{2^n}$$

Le calcul de cette somme est classique, elle vaut $\frac{1}{2}$.

Par contre, si $n = 0$ alors $P(X \text{ pair} \mid N = n) = 1$ car 0 est pair.

Donc :

$$\begin{aligned} P(X \text{ pair}) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(X \text{ pair} \mid N = n) P(N = n) \\ &= P(N = 0) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} P(N = n) = P(N = 0) + \frac{1}{2}(1 - P(N = 0)) \\ &= \frac{1}{2}(1 + P(N = 0)) = \frac{1 + e^\lambda}{2} \end{aligned}$$

Exercice 7 (Mines 2024)

Soit E un ensemble de cardinal n .

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathcal{P}(E)$ qui suivent la loi uniforme sur $\mathcal{P}(E)$.

Trouver la loi de $Z = \text{Card}(X \cup Y)$.

Correction

$$Z(\Omega) = \llbracket 0; n \rrbracket$$

On applique la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $((X = A))_{A \in \mathcal{P}(E)}$.

$$\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket P(Z = k) = \sum_{A \in \mathcal{P}(E)} P((Z = k) \cap (X = A))$$

$(Z = k) \cap (X = A)$ est impossible si $\text{Card}(A) > k$.

$$\begin{aligned}
\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket P(Z = k) &= \sum_{l=0}^k \sum_{\substack{A \in \mathcal{P}(E) \\ \text{Card}(A)=l}} P((Z = k) \cap (X = A)) \\
&= \sum_{l=0}^k \sum_{\substack{A \in \mathcal{P}(E) \\ \text{Card}(A)=l}} P((\text{Card}(Y \cap (E \setminus A)) = k - l) \cap (X = A)) \\
&= \sum_{l=0}^k \sum_{\substack{A \in \mathcal{P}(E) \\ \text{Card}(A)=l}} P(\text{Card}(Y \cap (E \setminus A)) = k - l) P(X = A) \\
&\quad \text{par indépendance} \\
&= \sum_{l=0}^k \sum_{\substack{A \in \mathcal{P}(E) \\ \text{Card}(A)=l}} \frac{\binom{n-l}{k-l} 2^l}{2^n} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{l=0}^k 2^l \binom{n}{l} \binom{n-l}{k-l} \\
&= \frac{1}{2^{2n}} \sum_{l=0}^k 2^l \frac{n!}{(n-l)! l!} \frac{(n-l)!}{(n-k)! (k-l)!} \\
&= \frac{1}{2^{2n}} \sum_{l=0}^k 2^l \frac{n!}{(n-k)! l! (k-l)!} \\
&= \frac{1}{2^{2n}} \frac{n!}{k! (n-k)!} \sum_{l=0}^k 2^l \frac{k!}{l! (k-l)!} \\
&= \frac{1}{2^{2n}} \binom{n}{k} \sum_{l=0}^k 2^l \binom{k}{l} \\
&= \binom{n}{k} \frac{3^k}{4^n} = \binom{n}{k} \left(\frac{3}{4}\right)^k \left(1 - \frac{3}{4}\right)^{n-k}
\end{aligned}$$

Z suit donc la loi binômiale de paramètres n et $\frac{3}{4}$.

On peut le démontrer autrement.

On prend, sans perte de généralité, $E = \llbracket 1; n \rrbracket$.

$$Z = \sum_{i=1}^n 1_{i \in X \cup Y}$$

Z est donc une somme de n variables aléatoires de Bernoulli.

Elles ont toutes le même paramètre :

$$\begin{aligned}
p &= P(1 \in X \cup Y) = 1 - P((1 \notin X) \cap (1 \notin Y)) \\
&= 1 - P(1 \notin X) P(1 \notin Y) = 1 - \left(\frac{2^{n-1}}{2^n}\right)^2 \\
&= \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

Elles sont mutuellement indépendantes :

Les $2n$ variables aléatoires $1_{i \in X}, 1_{i \in Y}, 1 \leq i \leq n$ sont mutuellement indépendantes :

Soit $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n, \eta_1, \dots, \eta_n) \in \{0; 1\}^{2n}$.

$$\begin{aligned}
 & P\left(\left(\bigcap_{i=1}^n (1_{i \in X} = \epsilon_i)\right) \cap \left(\bigcap_{i=1}^n (1_{i \in Y} = \delta_i)\right)\right) \\
 &= P((X = \{i \in \llbracket 1; n \rrbracket \text{ tq } \epsilon_i = 1\}) \cap (Y = \{i \in \llbracket 1; n \rrbracket \text{ tq } \eta_i = 1\})) \\
 &= P(X = \{i \in \llbracket 1; n \rrbracket \text{ tq } \epsilon_i = 1\}) P(Y = \{i \in \llbracket 1; n \rrbracket \text{ tq } \eta_i = 1\}) \text{ par indépendance} \\
 &= \frac{1}{2^n} \times \frac{1}{2^n} = \left(\prod_{i=1}^n \frac{1}{2}\right) \times \left(\prod_{i=1}^n \frac{1}{2}\right) \\
 &= \left(\prod_{i=1}^n P(1_{i \in X} = \epsilon_i)\right) \times \left(\prod_{i=1}^n P(1_{i \in Y} = \eta_i)\right)
 \end{aligned}$$

Par le lemme des coalitions, on en déduit que les variables aléatoires $1_{i \in X \cup Y} = \max(1_{i \in X}, 1_{i \in Y})$ sont indépendantes.

Exercice 8 (Mines 2024)

Soit $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes la loi uniforme sur $\{-1; 1\}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

1. Donner $\prod_{k=1}^n X_k(\Omega) = X_1(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega)$ et la loi du n -uplet (X_1, \dots, X_n) .
2. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
Donner $T_n(f) = E(f(S_n))$ sous forme de somme.
3. En déduire la relation de récurrence : $T_n(f) = T_{n-1}(g)$ avec $g : x \mapsto \frac{f(x+1) + f(x-1)}{2}$.
4. Montrer que la suite $(E(|S_n|))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.
5. Comparer $(E(|S_n|))_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(\sqrt{n})_{n \in \mathbb{N}^*}$.
6. Donner la loi de S_n .
7. Une question pour montrer qu'à l'infini S_n est presque nulle presque sûrement. (Cette question est supprimée).

Correction

1. $(X_1, \dots, X_n)(\Omega) = \prod_{k=1}^n X_k(\Omega) = \{-1; 1\}^n$

Par indépendance, pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \{-1; 1\}^n$:

$$\begin{aligned}
 P((X_1, \dots, X_n) = (x_1, \dots, x_n)) &= P\left(\bigcap_{k=1}^n (X_k = x_k)\right) = \prod_{k=1}^n P(X_k = x_k) \\
 &= \prod_{k=1}^n \frac{1}{2} = \frac{1}{2^n} \\
 &= \frac{1}{\text{Card}(\{-1; 1\}^n)}
 \end{aligned}$$

Donc (X_1, \dots, X_n) suit la loi uniforme sur $\{-1; 1\}^n$.

2. Par le théorème de transfert :

$$T_n(f) = \frac{1}{2^n} \sum_{(x_1, \dots, x_n) \in \{-1; 1\}^n} f(x_1 + \dots + x_n)$$

3.

$$\begin{aligned} & T_n(f) \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{(x_1, \dots, x_n) \in \{-1; 1\}^n} f(x_1 + \dots + x_n) \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{x_n \in \{-1; 1\}} \left(\sum_{(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \{-1; 1\}^{n-1}} f(x_1 + \dots + x_n) \right) \\ &= \frac{1}{2^n} \left(\sum_{(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \{-1; 1\}^{n-1}} f(x_1 + \dots + x_{n-1} + 1) + \sum_{(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \{-1; 1\}^{n-1}} f(x_1 + \dots + x_{n-1} - 1) \right) \\ &= \frac{1}{2^n} 2^{n-1} T_{n-1}(2g) = \frac{1}{2} T_{n-1}(2g) \\ &= T_{n-1}(g) \text{ car } T_{n-1} \text{ est linéaire} \end{aligned}$$

4. Ici $f : x \mapsto |x|$ et $g : x \mapsto \frac{|x-1| + |x+1|}{2}$.

$$E(|S_n|) - E(|S_{n-1}|) = T_{n-1}(g) - T_{n-1}(f) = T_{n-1}(g - f).$$

$$\text{Si } x \geq 1, g(x) - f(x) = \frac{x+1 + x-1}{2} - x = 0$$

$$\text{Si } x \in [0; 1], g(x) - f(x) = \frac{1-x + x+1}{2} - x = 1-x \geq 0$$

Enfin g et f sont paires.

Donc $g - f \geq 0$.

En revenant à la définition de T_k , on en déduit que $E(|S_n|) - E(|S_{n-1}|) \geq 0$.

En fait on peut être plus précis :

Si n est pair alors $E(|S_n|) = E(|S_{n-1}|)$

Si $n = 2p + 1$ est impair alors $E(|S_n|) = E(|S_{n-1}|) + \frac{\binom{2p}{p}}{2^p}$

5. Par Cauchy-Schwarz :

$$E(|S_n|) = E(|S_n| \times 1) \leq \sqrt{E(|S_n|^2)} \sqrt{E(1^2)} = \sqrt{E(S_n^2)}$$

Mais $V(X_k) = E(X_k^2) - E(X_k)^2 = 1$ et par indépendance :

$$V(S_n) = \sum_{k=1}^n V(X_k) = n$$

Par linéarité de l'espérance, $E(S_n) = \sum_{k=1}^n E(X_k) = 0$

On en déduit $E(S_n^2) = n$ puis : $E(|S_n|) \leq \sqrt{n}$.

Faut-il une minoration en utilisant les remarques de la fin de la question précédente ?

6. $S_n(\Omega) = \{n - 2k, k \in \llbracket 0; n \rrbracket\}$

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket P(S_n = n - 2k) = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}$$

$$\forall l \in S_n(\Omega) P(S_n = l) = \frac{\binom{n}{\frac{n-l}{2}}}{2^n}$$

Exercice 9 (Ens 2024)

On dispose d'une urne initialement vide, d'une boule rouge et d'un stock infini de boules blanches. On commence par remplir l'urne : à chaque étape la probabilité de mettre la boule rouge est $\frac{1}{n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) et on s'arrête dès que la boule rouge a été placée dans l'urne. On retire ensuite les boules une à une de l'urne et on s'arrête lorsqu'on tire la boule rouge. Quelle est l'espérance du nombre de boules restant dans l'urne ?

Correction

Après la phase de remplissage, il y a X boules dans l'urne, X suivant la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{n}$.

Si on note Y le nombre de boules restant dans l'urne après la seconde phase, la boule rouge a été tirée au $X - Y$ -ème tirage.

On doit donc commencer par le calcul suivant :

Soit une urne contenant $k - 1$ boules blanches et une boule rouge. On procède à un tirage sans remise jusqu'à obtenir la boule rouge. Quelle est la loi de Z le nombre de tirages nécessaires ?

Si $k = 1$ alors $Z = 1$.

On suppose $k \geq 2$.

On note B_i l'évènement on tire une boule blanche au i -ème tirage.

$$Z(\Omega) = \llbracket 1; k \rrbracket$$

$P(Z = 1) = \frac{1}{k}$ et par la formule des probabilités composées pour $\forall l \in \llbracket 2; n \rrbracket$:

$$\begin{aligned} P(Z = l) &= P(B_1 \cap \dots \cap B_{l-1} \cap \overline{B_l}) \\ &= P(B_1) \times P(B_2 | B_1) \times \dots \times P(B_{l-1} | B_1 \cap \dots \cap B_{l-2}) \times P(\overline{B_l} | B_1 \cap \dots \cap B_{l-1}) \\ &= \frac{k-1}{k} \times \frac{k-2}{k-1} \times \dots \times \frac{k-(l-2)-1}{k-(l-2)} \times \frac{1}{k-(l-1)} \\ &= \frac{1}{k} \end{aligned}$$

formule valable dans les cas particuliers qui précèdent.

$Y(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} P(Y = k) &= \sum_{l=1}^{+\infty} P((Y = k) \cap (X = l)) \text{ par la formule des probabilités totales} \\ &= \sum_{l=k+1}^{+\infty} P((Y = k) \cap (X = l)) \text{ car } (Y = k) \cap (X = l) = \emptyset \text{ si } k \geq l \\ &= \sum_{l=k+1}^{+\infty} P((X - Y = l - k) \cap (X = l)) = \sum_{l=k+1}^{+\infty} P(X - Y = l - k | X = l) P(X = l) \\ &= \sum_{l=k+1}^{+\infty} \frac{1}{l} \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{l-1} \end{aligned}$$

Tout étant positif, les calculs qui suivent sont justifiés.

$$\begin{aligned}
 E(Y) &= \sum_{k=0}^{+\infty} kP(Y = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} kP(Y = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{l=k+1}^{+\infty} \frac{k}{l} \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{l-1} \\
 &= \sum_{l=2}^{+\infty} \sum_{k=1}^{l-1} \frac{k}{l} \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{l-1} = \sum_{l=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{nl} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{l-1} \sum_{k=1}^{l-1} k \right) \\
 &= \sum_{l=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{nl} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{l-1} \frac{l(l-1)}{2} \right) = \frac{1}{2} \sum_{l=2}^{+\infty} (l-1) \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{l-1} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{l=2}^{+\infty} (l-1) \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{l-1} = \frac{1}{2} E(X - 1) \\
 &= \frac{n-1}{2}
 \end{aligned}$$

Exercice 10 (Ens 2024)

Soient $n, k \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{N}$.

Soit X une partie aléatoire de cardinal k de $\llbracket 1; k+a \rrbracket$. On suppose que X suit la loi uniforme sur l'ensemble des parties de cardinal k de $\llbracket 1; k+a \rrbracket$.

Soit Y une partie aléatoire de cardinal n de $\llbracket 1; k+n+a \rrbracket$. On suppose que Y suit la loi uniforme sur l'ensemble des parties de cardinal n de $\llbracket 1; k+n+a \rrbracket$.

On suppose X et Y indépendantes.

Montrer que $P(\min(Y) > \max(X))$ est indépendant de a .

Correction

Indication fournie par l'examinateur

Est-ce qu'on peut prendre $k+n$ entiers de $\llbracket 1; k+n+a \rrbracket$ et les répartir pour former un couple (X, Y) qui vérifie la condition voulue ?

X et Y étant indépendantes, le couple (X, Y) suit la loi uniforme sur l'ensemble des couples (A, B) avec A une partie à k éléments de $\llbracket 1; k+a \rrbracket$ et B une partie à n éléments de $\llbracket 1; k+n+a \rrbracket$.

Il s'agit donc de compter le nombre de tels couples où $\max(A) < \min(B)$.

Choisir A puis B (ou B puis A) conduit à des calculs très compliqués.

La méthode suggérée par l'examinateur consiste à choisir une partie à $k+n$ éléments de $\llbracket 1; k+n+a \rrbracket$ et à mettre dans A les k plus petits et dans B les n plus grands.

Reste à vérifier que A est bien une partie de $\llbracket 1; k+a \rrbracket$.

Comme $\llbracket 1, k+n+a \rrbracket$ contient n éléments plus grands que le maximum de A , celui-ci est bien inférieur ou égal à $k+a$.

Le nombre de couples (A, B) cherché est donc $\binom{k+n+a}{k+n}$.

On en déduit :

$$\begin{aligned} P(\max(X) < \min(Y)) &= \frac{\binom{k+n+a}{k+n}}{\binom{k+a}{k} \binom{k+n+a}{n}} \\ &= \frac{(k+n+a)!}{(k+n)!a!} \times \frac{k!a!}{(k+a)!} \times \frac{n!(k+a)!}{(k+n+a)!} \\ &= \frac{k!n!}{(k+n)!} = \frac{1}{\binom{k+n}{k}} \end{aligned}$$