Révisions 2026
lundi 1er juin 2026

941

Exercice 1 *(Ens 2024)*

Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $\{z \in \mathbb{C} \text{ tq } P(z) = 0\} = \{z \in \mathbb{C} \text{ tq } P \circ P(z) = 0\}$

Correction
Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\{z \in \mathbb{C} \text{ tq } P(z) = 0\} = \{z \in \mathbb{C} \text{ tq } P \circ P(z) = 0\}$
Si $P = 0$ alors $\{z \in \mathbb{C} \text{ tq } P(z) = 0\} = \{z \in \mathbb{C} \text{ tq } P \circ P(z) = 0\} = \mathbb{C}$ et P convient.
Si P est constant non nul alors $\{z \in \mathbb{C} \text{ tq } P(z) = 0\} = \{z \in \mathbb{C} \text{ tq } P \circ P(z) = 0\} = \emptyset$ et P convient.
On suppose P non constant.
P a au moins une racine z_0.
$z_0 \in \{z \in \mathbb{C} \text{ tq } P(z) = 0\} = \{z \in \mathbb{C} \text{ tq } P \circ P(z) = 0\}$ donc $P(0) = P(P(z_0)) = 0$
Le polynôme $P(X) - z_0$ n'est pas constant donc il a au moins une racine z_1.
$P(P(z_1)) = P(z_0) = 0$
Donc $z_1 \in \{z \in \mathbb{C} \text{ tq } P \circ P(z) = 0\} = \{z \in \mathbb{C} \text{ tq } P(z) = 0\}$ et $z_0 = P(z_1) = 0$
Donc 0 est la seule racine de P et $P(X) = aX^d$
Réciproquement, si $P(X) = aX^d$ alors $P(P(X)) = P(aX^d) = a^d X^{d^2}$ donc :
$\{z \in \mathbb{C} \text{ tq } P(z) = 0\} = \{z \in \mathbb{C} \text{ tq } P \circ P(z) = 0\} = \{0\}$ et P convient.

Exercice 2 *(Ens 2024)*

Soit A une partie de $\mathbb{N}$ contenant 0 et 1 et telle que $\dfrac{\operatorname{Card}(A \cap \{0, 1, \ldots, n\})}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe $j \in \mathbb{N}$ tel que $\operatorname{Card}(A \cap \{j, j+1, \ldots, j+k\}) = 2$.

Correction
La propriété est vraie pour $k = 1$ avec $j = 0$.
On suppose qu'il existe $k \geq 2$ telle que :
$\forall j \in \mathbb{N} \operatorname{Card}(A \cap \{j, j+1, \ldots, j+k\}) \neq 2$
Les éléments de A peuvent être rangés dans une suite strictement croissante $(a_p)_{p\in\mathbb{N}}$.
Pour tout $p \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(p)$ $a_{p+1} - a_p \leq k$
$a_0 = 0$ et $a_1 = 1$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
On suppose $\mathcal{P}(p)$ vraie.
Avec $j = a_p$, on a $\operatorname{Card}(A \cap \{a_p, a_p+1, \ldots, a_p+k\}) \neq 2$
Mais d'après l'hypothèse de récurrence $A \cap \{a_p, a_p+1, \ldots, a_p+k\}$ contient a_{p+1} (et a_p bien sûr) donc il contient un troisième élément de A et on a $a_p < a_{p+1} < a_{p+2} \leq a_p + k$.
On en déduit $a_{p+2} - a_{p+1} < k$ et $\mathcal{P}(p+1)$ est vraie.
On a donc prouvé :
$\forall p \in \mathbb{N}\ 1 \leq a_{p+1} - a_p \leq k$.

Soit $c_n = \dfrac{\operatorname{Card}(A \cap \{0,1,\dots,n\})}{n}$ de sorte que
$a_0 = 0 < a_1 = 1 < a_2 < \cdots < a_{c_n-1} \leq n < a_{c_n}$
$\displaystyle\sum_{p=0}^{c_n-2} (a_{p+1} - a_p) \leq \sum_{p=0}^{c_n-2} k$
Donc :
$a_{c_n-1} - a_0 \leq kc_{n-1}$
De plus $a_{c_{n-1}} \geq a_{c_n} - k > n - k$ donc $n - k = n - k - a_0 < a_{c_n-1} - a_0 \leq kc_{n-1}$
Donc $c_{n-1} > \dfrac{n}{k} - 1$ puis $c_n > \dfrac{n+1}{k} - 1$
On en déduit que $\dfrac{c_n}{n} > \dfrac{n+1}{n}\dfrac{1}{k} - 1$
En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient $0 > \dfrac{1}{k}$: c'est absurde.

Exercice 3 *(X 2024)*

Calculer $A = \left|\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{k^2}\right|$ avec $\omega = \mathrm{e}^{2i\pi/n}$.
Variante (Ens 2025)
Soit $p > 2$ un nombre impair. Montrer que

$$\left|\sum_{k=0}^{p-1} \mathrm{e}^{\frac{2\pi i k^2}{p}}\right| = \sqrt{p}$$

Correction
$A^2 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{k^2} \times \overline{\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{k^2}} = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{k^2} \sum_{l=0}^{n-1} \omega^{-l^2} = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{n-1} \omega^{(k-l)(k+l)}$
$a = k - l$ décrit $[\![-(n-1);(n-1)]\!]$.
$k + l = k + k - a = 2k - a$
a étant fixé, on a $0 \leq k \leq n-1$ et $0 \leq l = k - a \leq n-1$ soit $a \leq k \leq n-1+a$

$$\begin{aligned}
A^2 &= \sum_{a=-(n-1)}^{-1} \left(\sum_{k=0}^{n-1+a} (\omega^a)^{2k-a}\right) + \sum_{k=0}^{n-1} 1 + \sum_{a=1}^{n-1}\left(\sum_{k=a}^{n-1} (\omega^a)^{2k-a}\right) \\
&= \sum_{b=1}^{n-1}\left(\sum_{k=0}^{b-1} \left(\omega^b\right)^{2k-b}\right) + n + \sum_{a=1}^{n-1}\left(\sum_{l=0}^{n-1-a} (\omega^a)^{2l+a}\right) \qquad b = a+n, l = k-a \\
&= n + \sum_{a=1}^{n-1}\left(\omega^{-a^2}\sum_{k=0}^{a-1}\left(\omega^{2a}\right)^k\right) + \sum_{a=1}^{n-1}\left(\omega^{a^2}\sum_{k=0}^{n-1-a}\left(\omega^{2a}\right)^k\right)
\end{aligned}$$

$\omega^{2a} = 1 \iff n | 2a$
- **Premier cas :** n est impair
  $\omega^{2a} = 1 \iff n | a$ ce qui est impossible pour $a \in [\![1; n-1]\!]$.

Donc :

$$\begin{aligned}A^2 &= n+\sum_{a=1}^{n-1}\omega^{-a^2}\frac{\omega^{2a^2}-1}{\omega^{2a}-1}+\sum_{a=1}^{n-1}\omega^{a^2}\frac{\omega^{-2a^2}-1}{\omega^{2a}-1}\\ &= n+\sum_{a=1}^{n-1}\frac{\omega^{a^2}-\omega^{-a^2}}{\omega^{2a}-1}+\sum_{a=1}^{n-1}\frac{\omega^{-a^2}-\omega^{a^2}}{\omega^{2a}-1}\\ &= n\end{aligned}$$

- **Deuxième cas :** $n=4p+2$
$\omega^{2a}=1 \iff 4p+2|2a \iff 2p+1|a \iff a=2p+1$ car $1\le a\le 4p+1$

$$A^2 = n+\omega^{-(2p+1)^2}\sum_{l=0}^{2p}1+\omega^{(2p+1)^2}\sum_{l=0}^{2p}1 \text{ les autres termes se simplifiant comme dans le cas précédent}$$

$(2p+1)^2=4p^2+4p+1=p(4p+2)+2p+1=np+a$
Donc $A^2=n+a\left(\omega^a+\omega^{-a}\right)$
$\omega^a=\omega^{n/2}=\mathrm{e}^{i\pi}=1$ et $\omega^{-a}=\mathrm{e}^{-i\pi}=-1$
Donc $A^2=n-2a=0$
- **Troisième cas :** $n=4p$
$\omega^{2a}=1 \iff 4p|2a \iff 2p|a \iff a=2p$ car $1\le a\le 4p-1$
$a^2=4p^2=pn$ donc $\omega^{a^2}=1$
Donc $A^2=n+\sum_{k=0}^{2p-1}1+\sum_{k=0}^{2p-1}1=n+2p+2p=2n$

Exercice 4 *(X 2024)*

Soit $n\in\mathbb{N}$ avec $n\ge 2$.
Soient $u_1,\dots,u_n$ des nombres complexes de module 1.
Montrer que $\left(\prod_{i\ne j}|u_i-u_j|\right)^{\frac{1}{n(n-1)}}\le n^{\frac{1}{n-1}}$

Correction
Ma première idée est que cette inégalité est optimale, l'égalité étant réalisée lorsque les u_i sont les sommets d'un polygône régulier.
Pour $n=2$, l'inégalité est évidente : elle s'écrit $\left(|u_1-u_2|^2\right)^{1/2}\le 2$ ie $|u_1-u_2|\le 2$.
Si u_1 et u_2 sont de module 1, $|u_1-u_2|\le|u_1|+|u_2|=2$ avec égalité lorsque u_1 et u_2 sont opposés.
Si $n=3$, si u_1,u_2 et u_3 sont les sommets d'un triangle équilatéral, $|u_i-u_j|=\left|\mathrm{e}^{2i\pi/3}-1\right|=\left|-\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right|=\sqrt{\frac{9+3}{4}}=\sqrt{3}$
$A(u_1,u_2,u_3)=\left(\prod_{i\ne j}|u_i-u_j|\right)^{1/(3*(3-1))}$ vaut donc $\left(\sqrt{3}^6\right)^{1/6}=\sqrt{3}=3^{1/(3-1)}$
Si $n=4$ et si u_1,u_2,u_3,u_4 sont les sommets d'un carré alors $|u_2-u_1|=|u_3-u_2|=|u_4-u_3|=|u_1-u_4|=\sqrt{2}$ et $|u_3-u_1|=|u_4-u_2|=2$.
$A(u_1,u_2,u_3,u_4)$ donc $\left(\sqrt{2}^8 2^4\right)^{1/12}=2^{8/12}=2^{2/3}=4^{1/3}$

Montrons que lorsque $u_k = \mathrm{e}^{2ik\pi/n}$, $A(u_1,\dots,u_n) = n^{1/(n-1)}$.

On considère le polynôme $P = X^n - 1 = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(X - u_k)$.

En dérivant, on a :

$$nX^{n-1} = \sum_{k=1}^{n}\left(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(X-u_j)\right)$$

En particulier :

$$nu_i^{n-1} = \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(u_i-u_j)$$

En prenant le module, $\displaystyle\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|u_i-u_j| = n$

On en déduit $A(u_1,\dots,u_n) = \left(\displaystyle\prod_{i=1}^{n} n\right)^{1/(n(n-1))} = (n^n)^{1/(n(n-1))} = n^{1/(n-1)}$

Les inégalités qu'on va utiliser doivent donc être des égalités dans le cas d'un polygone régulier.

Par exemple, l'inégalité arithmético-géométrique ne fonctionne pas car les $|u_i - u_j|$ ne sont pas tous égaux si $n \geq 4$.

En effet :

$$A(u_1,\dots,u_n) \leq \frac{1}{n(n-1)}\sum_{i\neq j}|u_i-u_j|$$

Dans le cas $n = 4$, et pour les 4 points situés aux sommets d'un carré :

$$A(u_1,u_2,u_3,u_4) \leq \frac{1}{12}\left(8\sqrt{2}+4\times 2\right) = \frac{2}{3}\left(1+\sqrt{2}\right) \simeq 1,61 \text{ alors que } 4^{1/3} \simeq 1,59$$

Par contre dans le cas $n = 3$, cela permet de conclure :

$$A(u_1,u_2,u_3) \leq \frac{1}{3}\left(|u_2-u_1|+|u_3-u_2|+|u_1-u_3|\right)$$

On cherche à maximiser $|u_2-u_1|+|u_3-u_2|+|u_1-u_3|$ avec u_1,u_2,u_3 sur le cercle de centre 0 et de rayon 1.

L'existence d'un tel maximum est assuré par un argument de continuité : $\{(u_1,u_2,u_3) \in \mathbb{U}^3 \text{ tq } 0 \leq Arg(u_1) \leq Arg($

est une partie fermée et bornée de $\mathbb{C}^3$ et la fonction $(u_1,u_2,u_3) \mapsto |u_2-u_1|+|u_3-u_2|+|u_1-u_3|$ est continue.

Fixons $\theta \in [0;2\pi]$.

$$\begin{aligned}
\forall t \in [0;\theta] \quad \left|\mathrm{e}^{it}-1\right|+\left|\mathrm{e}^{i\theta}-\mathrm{e}^{it}\right| &= \left|\mathrm{e}^{it/2}\left(\mathrm{e}^{it/2}-\mathrm{e}^{-it/2}\right)\right|+\left|\mathrm{e}^{i(t+\theta)/2}\left(\mathrm{e}^{i(\theta-t)/2}-\mathrm{e}^{-i(\theta-t)/2}\right)\right| \\
&= 2\left(\left|\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right|+\left|\sin\left(\frac{\theta-t}{2}\right)\right|\right) \\
&= 2\left(\sin\left(\frac{t}{2}\right)+\sin\left(\frac{\theta-t}{2}\right)\right) \text{ car } \frac{t}{2} \text{ et } \frac{\theta-t}{2} \in [0;\pi] \\
&= 2\sin\left(\frac{\theta}{4}\right)\cos\left(\frac{2t-\theta}{4}\right)
\end{aligned}$$

$\left|\mathrm{e}^{it}-1\right|+\left|\mathrm{e}^{i\theta}-\mathrm{e}^{it}\right|$ est donc maximal pour $t = \dfrac{\theta}{2}$.

A α et β fixés, $\left|\mathrm{e}^{it}-\mathrm{e}^{i\alpha}\right|+\left|\mathrm{e}^{i\beta}-\mathrm{e}^{it}\right| = \left|\mathrm{e}^{i(t-\alpha)}-1\right|+\left|\mathrm{e}^{i(\beta-\alpha)}-\mathrm{e}^{i(t-\alpha)}\right|$ est donc maximal

pour $t-\alpha=\dfrac{\beta-\alpha}{2}$ ie $t=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$.
On en déduit $\left|\,\mathrm{e}^{it}-\mathrm{e}^{i\alpha}\right|=\left|\mathrm{e}^{i(t-\alpha)}-1\right|=\left|\mathrm{e}^{i(\beta-\alpha)/2}-1\right|$
ainsi que $\left|\mathrm{e}^{i\beta}-\mathrm{e}^{it}\right|=\left|\mathrm{e}^{it}\left(\mathrm{e}^{i(\beta-t)}-1\right)\right|=\left|\mathrm{e}^{i(\beta-\alpha)/2}-1\right|$
On en déduit pour $|u_2-u_1|+|u_3-u_2|+|u_1-u_3|$ qu'au maximum $|u_2-u_1|=|u_3-u_2|=|u_1-u_3|$ ie les trois points sont au sommet d'un triangle équilatéral.
Compte tenu du calcul du début, on a montré l'inégalité dans la cas $n=3$.
Dans le cas général, on veut des inégalités qui sont des égalités dans le cas d'un polygone régulier.
Si on applique l'inégalité arithmético-géométrique, cela doit donc être à des nombres qui sont égaux dans la cas d'un polygone régulier.
Ce n'est pas le cas des distances entre les points mais c'est le cas des côtés $|u_{i+1}-u_i|$ mais aussi des segments qui joignent un sommet et non pas son plus proche voisin mais celui d'après.
Plus techniquement, on regroupe les couples (i,j) qui ont la même différence modulo n.
On note, pour k compris entre 1 et $n-1$, $E_k=\left\{(i,j)\neq [\![1;n]\!]^2 \text{ tq } j-i=k \text{ ou } k-n\right\}$.
Ce sont les couples $(1,k+1),(2,k+2),\ldots,(n-k,n),(n-k+1,1),\ldots,(n,k)$, il y en a n.
$\displaystyle\prod_{i\neq j}|u_i-u_j|=\prod_{k=1}^{n-1}\left(\prod_{(i,j)\in E_k}|u_i-u_j|\right)$
$\displaystyle\left(\prod_{(i,j)\in E_k}|u_i-u_j|\right)^{1/n}\leq\frac{1}{n}\sum_{(i,j)\in E_k}|u_i-u_j|$ qui est maximale lorsque les angles entre u_i et u_j sont constants (égaux à $\dfrac{2k\pi}{n}$)
$\displaystyle\left(\prod_{(i,j)\in E_k}|u_i-u_j|\right)^{1/n}$ est donc plus petit que le même produit pour les sommets d'un polygone régulier.
Autre méthode
$\displaystyle\prod_{i\neq j}|u_i-u_j|=\left(\prod_{1\leq j<i\leq n}|u_i-u_j|\right)^2=\left|\prod_{1\leq j<i\leq n}(u_i-u_j)\right|^2=|\det(M)|^2$
où M est la matrice de Vandermonde $\begin{pmatrix}1 & u_1 & \ldots & u_1^{n-1}\\ 1 & u_2 & \ldots & u_2^{n-1}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & u_n & \ldots & u_n^{n-1}\end{pmatrix}$
$\det(M)$ est aussi le produit de ses valeurs propres comptées avec leurs multiplicités.
Soit λ une valeur propre de M.
Soit $X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ un vecteur propre associé.
$\exists i\in[\![1;n]\!]$ tq $\forall j\in[\![1;n]\!]$ $|x_j|\leq|x_i|$
X est non nul (c'est un vecteur propre) donc $|x_i|>0$.
$AX=\lambda X$ donc :
$\displaystyle|\lambda|\,|x_1|=|\lambda x_i|=\left|\sum_{j=1}^{n}M_{i,j}x_j\right|=\left|\sum_{j=1}^{n}u_i^{j-1}x_j\right|\leq\sum_{j=1}^{n}|u_i|^{j-1}|x_j|\leq\sum_{j=1}^{n}|x_i|=n\,|x_i|$
On en déduit $|\lambda|\leq n$ puis $|\det(M)|\leq n^n$
Donc :

$\prod_{i\neq j}|u_i-u_j|\leq n^{2n}$
D'où :
$\left(\prod_{i\neq j}|u_i-u_j|\right)^{\frac{1}{n(n-1)}}\leq n^{\frac{2}{n-1}}$, ce qui est trop grand.
$\prod_{i\neq j}|u_i-u_j|=|\det(M)|^2=\det(M)\overline{\det(M)}=\det(M)\overline{\det(M^T)}=\det\left(M\overline{M}^T\right)$
Soient $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ les valeurs propres de la matrice $M\overline{M}^T$, comptées avec leurs multiplicités.
$\prod_{i\neq j}|u_i-u_j|=\prod_{k=1}^{n}\lambda_k$
Soit X un vecteur propre associé à une valeur propre λ de $M\overline{M}^T$.
$\overline{X}^TM\overline{M}^TX=\overline{Y}^TY$ avec $Y=\overline{M}^TX$ donc :
$\overline{X}^TM\overline{M}^TX=\sum_{k=1}^{n}|y_k|^2\in\mathbb{R}_+$
Mais $\overline{X}^TM\overline{M}^TX=\overline{X}^T(\lambda X)=\lambda\sum_{k=1}^{n}|x_k|^2$
X est non nul donc $\sum_{k=1}^{n}|x_k|^2\in\mathbb{R}_+^*$, ce qui entraîne $\lambda\in\mathbb{R}_+$.
L'inégalité arithmético-géométrique donne alors :
$\left(\prod_{i\neq j}|u_i-u_j|\right)^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}\lambda_k}\leq\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\lambda_k=\frac{1}{n}\mathrm{tr}\left(M\overline{M}^T\right)$
Or :
$\forall k\in[\![1;n]\!]\ \left(M\overline{M}^T\right)_{k,k}=\sum_{l=1}^{n}M_{k,l}\overline{M_{k,l}}=\sum_{l=1}^{n}|M_{k,l}|^2=\sum_{l=1}^{n}1=n$
Donc :
$\left(\prod_{i\neq j}|u_i-u_j|\right)^{\frac{1}{n}}\leq n$
et on conclut facilement.