Révisions 2026
lundi 1er juin 2026

941

Exercice 1 *(Centrale 2024)*

1. On s'intéresse à la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui admet pour limite $l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$.
   Montrer que la suite $\left(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet la même limite.
2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite à valeurs réelles strictement positives telle que $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.
   Montrer que $v_n^{1/n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$.
   La réciproque est-elle vraie ?
3. On suppose $v_n^{1/n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.
   Montrer que si $l < 1$ alors la série de terme général v_n converge.
   Montrer que si $l > 1$ alors la série de terme général v_n diverge.
   Montrer que si $l = 1$, on ne peut pas conclure.
   Commenter.

Exercice 2 *(Mines 2024)*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \dots, a_n$ des entiers naturels non nuls deux à deux distincts.

1. Montrer que $a_1 + \cdots + a_n \geq 1 + \cdots + n$
2. Soit $\phi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ injective.
   Montrer que la série de terme général $\dfrac{\phi(n)}{n^2}$ diverge.

Exercice 3 *(X 2024)*

On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$

1. Convergence de (S_n) en fonction de α.
2. On suppose $\alpha > 0$.
   Donner un équivalent de S_n.
3. Equivalent de $S_n - \dfrac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}$.

Exercice 4 *(X 2024)*

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs telle que $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $v_n = \dfrac{a_0 u_n + a_1 u_{n-1} + \cdots + a_n u_0}{a_0 + \cdots + a_n}$.
Montrer que si la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge absolument alors la série $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge absolument.

Exercice 5 *(Ens 2025)*

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = \dfrac{\pi}{2}$ et :
$\forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} = \sin(u_n)$
La série $\sum u_n^2$ converge-t-elle ?

Exercice 6 *(X 2024)*

Nature de la série $\sum_{n\geq 1} \dfrac{|\tan(n)|}{n}$?

Exercice 7 *(X 2024)*

Soit (a_n) une suite à valeurs dans $]0;1[$ telle que la série $\sum \dfrac{a_n}{\ln(1/a_n)}$ converge.
Montrer que la série $\sum \dfrac{a_n}{\ln(n)}$ converge.

Exercice 8 *(X 2024)*

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, soit $(u_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{C}$.
On suppose :

- Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{n\geq 0} u_n^{(k)}$ converge absolument.
- Pour toute suite bornée $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(k)} v_n \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$

Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} \left|u_n^{(k)}\right| \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$.

L'examinateur a fait remarqué que la réciproque est vraie ie si $\sum_{n=0}^{+\infty} \left|u_n^{(k)}\right| \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$ alors pour suite bornée $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(k)} v_n \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$ mais qu'on ne s'en occuperait pas dans l'exercice.
C'est d'ailleurs très facile à montrer.

Exercice 9 *(Ens 2024)*

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n = A$. Quelles sont les valeurs que peut prendre $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n^2$?