Révisions 2026
lundi 1er juin 2026

941

Exercice 1 *(Centrale 2024)*

1. On s'intéresse à la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui admet pour limite $l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$.
   Montrer que la suite $\left(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet la même limite.
2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite à valeurs réelles strictement positives telle que $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.
   Montrer que $v_n^{1/n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$.
   La réciproque est-elle vraie ?
3. On suppose $v_n^{1/n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.
   Montrer que si $l < 1$ alors la série de terme général v_n converge.
   Montrer que si $l > 1$ alors la série de terme général v_n diverge.
   Montrer que si $l = 1$, on ne peut pas conclure.
   Commenter.

Correction

1. On commence par le cas $l = 0$.
   Soit $\epsilon > 0$.
   $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$ tq $\forall n \geq n_0\ |u_n| \leq \epsilon$

$$\begin{aligned}\forall n \geq n_0 + 1\ \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k\right| &\leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0}|u_k| + \frac{1}{n}\sum_{k=n_0+1}^{n}\epsilon \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0}|u_k| + \frac{n-n_0}{n}\epsilon \\ &\leq \epsilon + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0}|u_k|\end{aligned}$$

   $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n_0}|u_k| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc :
   $\exists n_1 \geq n_0 + 1$ tq $\forall n \geq n_1\ \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n_0}|u_k| \leq \epsilon$
   Donc :
   $\forall n \geq n_1\ \left|\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k\right| \leq 2\epsilon$
   Donc $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
   On suppose ensuite $l \in \mathbb{R}^*$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $w_n = u_n - l$.
$w_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc : $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} w_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
Mais :
$\forall n \in \mathbb{N}^*\ \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} w_k = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k - l$
donc $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$.
On suppose ensuite $l = +\infty$.
Soit $A > 0$.
$\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$ tq $\forall n \geq n_0\ u_n \geq A$
$\forall n \geq n_0 + 1\ \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k \geq \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n_0} u_k + \dfrac{n-n_0}{n}A$
$\forall n \geq 2n_0\ 2(n-n_0) - n = n - 2n_0 \geq 0$
Donc :
$\forall n \geq 2n_0\ \dfrac{n-n_0}{n} \geq \dfrac{1}{2}$
On en déduit :
$\forall n \geq 2n_0\ \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k \geq \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n_0} u_k + \dfrac{1}{2}A$
$\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n_0} u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc :
$\exists n_1 \geq 2n_0$ tq $\forall n \geq n_1\ \left|\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0} u_k\right| \leq \dfrac{A}{4}$
On a alors :
$\forall n \geq n_1\ \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k \geq \dfrac{A}{4}$
Donc $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
Enfin le cas $l = -\infty$ se traite avec $w_n = -u_n$.

2. On commence par le cas $l \in \mathbb{R}_+^*$.
$\ln(v_{n+1}) - \ln(v_n) = \ln\left(\dfrac{v_{n+1}}{v_n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(l)$.
D'après la première question :
$\dfrac{\ln(v_{n+1}) - \ln(v_1)}{n} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(\ln(v_{k+1}) - \ln(v_k)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(l)$
$\dfrac{\ln(v_1)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $\dfrac{\ln(v_{n+1})}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(l)$.
On en déduit $\dfrac{\ln(v_n)}{n} = \dfrac{n-1}{n}\dfrac{\ln(v_n)}{n-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \times \ln(l) = \ln(l)$.
En passant à l'exponentielle, $v_n^{1/n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$.

On suppose ensuite $l = 0$.
$\ln(v_{n+1}) - \ln(v_n) = \ln\left(\dfrac{v_{n+1}}{v_n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$.
D'après la première question :
$\dfrac{\ln(v_{n+1}) - \ln(v_1)}{n} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(\ln(v_{k+1}) - \ln(v_k)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$

$\frac{\ln(v_1)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $\frac{\ln(v_{n+1})}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$.
On en déduit $\frac{\ln(v_n)}{n} = \frac{n-1}{n}\frac{\ln(v_n)}{n-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$.
En passant à l'exponentielle, $v_n^{1/n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Le cas $l = +\infty$ se traite de manière similaire.

On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :
$\forall p \in \mathbb{N}^*$ $v_{2p-1} = 1$ et $v_{2p} = 2$
$\forall p \in \mathbb{N}^*$ $v_{2p-1}^{1/(2p-1)} = 1 \xrightarrow[p\to+\infty]{} 1$
$\forall p \in \mathbb{N}^*$ $v_{2p}^{1/(2p)} = \exp\left(\frac{\ln(2p)}{2p}\right) \xrightarrow[p\to+\infty]{} 1$
Donc $v_n^{1/n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$
Par contre $\frac{u_{2p}}{u_{2p-1}} = 2 \xrightarrow[p\to+\infty]{} 2$
Par contre $\frac{u_{2p+1}}{u_{2p}} = \frac{1}{2} \xrightarrow[p\to+\infty]{} \frac{1}{2}$
Donc la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge.

3. Il s'agit donc ici d'établir une règle d'application plus générale que la règle de d'Alembert.
   On commence par le cas $l < 1$.
   Soit $r \in]l; 1[$.
   $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$ tq $\forall n \geq n_0$ $v_n^{1/n} \leq r$
   $\forall n \geq n_0$ $0 \leq v_n \leq r^n$
   La série de terme général r^n converge donc la série de terme général v_n converge.

   On passe ensuite au cas $l > 1$.
   Soit $r \in]1; l[$.
   $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$ tq $\forall n \geq n_0$ $v_n^{1/n} \geq r$
   $\forall n \geq n_0$ $0 \leq v_n \leq r^n$
   Donc $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et la série de terme général v_n diverge grossièrement.

   Prenons $v_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   $v_n^{1/n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et la série de terme général v_n diverge.
   Prenons $v_n = \frac{1}{n^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   $v_n^{1/n} = \exp\left(\frac{-2\ln(n)}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et la série de terme général v_n converge.

Exercice 2 *(Mines 2024)*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \ldots, a_n$ des entiers naturels non nuls deux à deux distincts.

1. Montrer que $a_1 + \cdots + a_n \geq 1 + \cdots + n$
2. Soit $\phi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ injective.
   Montrer que la série de terme général $\frac{\phi(n)}{n^2}$ diverge.

Correction

1. On raisonne par récurrence sur n.
   Pour $n = 1$, a_1 est un entier naturel non nul donc $a_1 \geq 1$: la propriété est vraie au rang 1.
   On suppose la propriété vraie au rang n.
   Soient $a_1, \dots, a_{n+1}$ $n+1$ entiers naturels non nuls deux à deux distincts.
   Soit a_M le plus grand.
   Si $a_M < n+1$ alors $a_1, \dots, a_{n+1}$ sont $n+1$ nombres entiers deux à deux distincts compris entre 1 et n : c'est absurde donc $a_M \geq n+1$.
   On a alors d'après l'hyptohèse de récurrence :
   $$\sum_{i=1}^{n+1} a_i = a_M + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq M}}^{n+1} \geq n+1+1+\cdots+n$$
   et la propriété est vraie au rang $n+1$.
2. On note $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite des sommes partielles de la série de terme général $\dfrac{\phi(n)}{n^2}$.
   Supposons que cette série converge et notons S sa somme.
   $S_{2n} - S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} S - S = 0$
   Mais :
   $S_{2n} - S_n = \displaystyle\sum_{i=n+1}^{2n} \frac{\phi(i)}{i^2} \geq \frac{1}{(2n)^2} \sum_{i=n+1}^{2n} \phi(i) \geq \frac{1}{4n^2}(1+2+\cdots+n) = \frac{n+1}{8n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{8}$ et on aboutit à une contradiction.

Exercice 3 *(X 2024)*

On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$

1. Convergence de (S_n) en fonction de α.
2. On suppose $\alpha > 0$.
   Donner un équivalent de S_n.
3. Equivalent de $S_n - \dfrac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}$.

Correction

1. C'est une question de cours.
   La suite (S_n) converge si, et seulement si, $\alpha > -1$.
   Si $\alpha > 0$, la fonction $t \mapsto t^\alpha$ est croissante.
   $\forall n \in \mathbb{N}^* \ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \int_{k-1}^{k} t^\alpha \,\mathrm{d}t \leq S_n \leq \sum_{k=1}^{n} \int_{k}^{k+1} t^\alpha \,\mathrm{d}t$
   $\forall n \in \mathbb{N}^* \ \displaystyle\int_0^n t^\alpha \,\mathrm{d}t \leq S_n \leq \int_1^{n+1} t^\alpha \,\mathrm{d}t$
   $\forall n \in \mathbb{N}^* \ \dfrac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1} \leq S_n \leq \dfrac{(n+1)^{\alpha+1}-1}{\alpha+1} \sim \dfrac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
   On en déduit que (S_n) diverge vers $+\infty$ et on a la réponse à la seconde question.

   Si $\alpha = 0$, $S_n = n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
   Si $\alpha < 0$, la fonction $t \mapsto t^\alpha$ est décroissante.
   Si $-1 < \alpha < 0$, on a :

$\forall n \in \mathbb{N}^* \ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \int_{k-1}^{k} t^\alpha \,\mathrm{d}t \geq S_n \geq \sum_{k=1}^{n} \int_{k}^{k+1} t^\alpha \,\mathrm{d}t$
La fonction $t \mapsto t^\alpha$ étant bien intégrable en 0.
$\forall n \in \mathbb{N}^* \ \displaystyle\int_0^n t^\alpha \,\mathrm{d}t \geq S_n \geq \int_1^{n+1} t^\alpha \,\mathrm{d}t$
$\forall n \in \mathbb{N}^* \ \dfrac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1} \geq S_n \geq \dfrac{(n+1)^{\alpha+1}-1}{\alpha+1} \sim \dfrac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ car $\alpha+1>0$
On en déduit que (S_n) diverge vers $+\infty$.
Si $\alpha = -1$ alors :
$S_n \geq \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \int_{k}^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln(n+1) \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$
Si $\alpha < -1$:
$S_n \leq 1 + \displaystyle\int_1^n t^\alpha \,\mathrm{d}t = 1 + \frac{n^{\alpha+1}-1}{\alpha+1} \leq 1 - \frac{1}{\alpha+1}$ car $\alpha+1<0$
La suite (S_n) est croissante et majorée donc elle converge.

2. Cf la première question. On remarquera que l'équivalent est en fait valable pour $\alpha > -1$.
3.

$$\begin{aligned}
S_n - \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1} &= \sum_{k=1}^{n} k^\alpha - \sum_{k=1}^{n} \int_{k-1}^{k} t^\alpha \,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=1}^{n} \int_{k-1}^{k} \left(k^\alpha - t^\alpha\right) \mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\left[(t-(k-1))\left(k^\alpha - t^\alpha\right)\right]_{k-1}^{k} + \alpha \int_{k-1}^{k} (t-k+1) t^{\alpha-1} \,\mathrm{d}t \right) \\
&= \alpha \sum_{k=1}^{n} \int_{k-1}^{k} (t-k+1) t^{\alpha-1} \,\mathrm{d}t \\
&= \alpha \int_0^1 t^\alpha \,\mathrm{d}t + \alpha \sum_{k=2}^{n} \left(\left[\frac{(t-k+1)^2}{2} t^{\alpha-1} \right]_{k-1}^{k} - \frac{\alpha-1}{2} \int_{k-1}^{k} (t-k+1)^2 t^{\alpha-2} \,\mathrm{d}t \right) \\
&= \frac{\alpha}{\alpha+1} + \frac{\alpha}{2} \sum_{k=2}^{n} k^{\alpha-1} - \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} (t-k+1)^2 t^{\alpha-2} \,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

D'après les questions précédentes, $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} k^{\alpha-1} \sim \frac{n^\alpha}{\alpha}$
De plus :
$0 \leq \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} (t-k+1)^2 t^{\alpha-2} \,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} t^{\alpha-2} \,\mathrm{d}t = \int_1^n t^{\alpha-2} \,\mathrm{d}t = \frac{n^{\alpha-1}}{\alpha-1}$ si $\alpha \neq 1$, $= \ln(n)$ si $\alpha = 1$.
Donc l'équivalent cherché est $\dfrac{n^\alpha}{2}$.

Remarque
La méthode suggérée par l'examinateur était différente.
Soit $F \begin{cases} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \dfrac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1} \end{cases}$

$\alpha > 0$ donc F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{aligned}
S_n - \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1} &= \sum_{k=1}^{n} F'(k) - \sum_{k=1}^{n} (F(k) - F(k-1)) \quad (F(0) = 0) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (F(k-1) - F(k) - (k-1-k)F'(k)) \\
&= F(0) - F(1) + F'(1) + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{2}(k-1-k)^2 F''(k) + \int_k^{k-1} \frac{(k-1-t)^2}{2} F^{(3)}(t)\,\mathrm{d}t \right) \\
&= \frac{\alpha}{\alpha+1} + \frac{\alpha}{2} \sum_{k=2}^{n} k^{\alpha-1} - \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} (t-(k-1))^2 t^{\alpha-2}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

D'après ce qui précède, $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} k^{\alpha-1} \sim \frac{n^\alpha}{\alpha}$ et :
$\displaystyle 0 \leq \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} (t-(k-1))^2 t^{\alpha-2}\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} t^{\alpha-2}\,\mathrm{d}t = \int_1^n t^{\alpha-2}\,\mathrm{d}t = \frac{n^{\alpha-1}-1}{\alpha-1}$ si $\alpha \neq 1$,
$= \ln(n)$ si $\alpha = 1$.
Donc l'équivalent cherché est $\dfrac{n^\alpha}{2}$.

Exercice 4 *(X 2024)*

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs telle que $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n$ converge.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $v_n = \dfrac{a_0 u_n + a_1 u_{n-1} + \cdots + a_n u_0}{a_0 + \cdots + a_n}$.
Montrer que si la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ converge absolument alors la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} v_n$ converge absolument.

Correction

- **Première méthode**
  Les a_n étant strictement positifs, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n$ converge absolument.
  D'après le cours sur les produits de Cauchy, si la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ converge absolument la série de terme général $w_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k u_{n-k}$ converge absolument.
  Il suffit de remarquer :
  $\forall n \in \mathbb{N}\ |v_n| \leq \dfrac{|w_n|}{a_0}$
  pour conclure.
- **Deuxième méthode**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$.

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N} \ \sum_{k=0}^{n} |v_k| &= \sum_{k=0}^{n} \left| \frac{\sum_{l=0}^{k} a_{k-l} u_l}{S_k} \right| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{k} \frac{a_{k-l} |u_l|}{S_k} \\
&\leq \sum_{l=0}^{n} \sum_{k=l}^{n} \frac{a_{k-l} |u_l|}{S_k} = \sum_{l=0}^{n} \left(\sum_{k=l}^{n} \frac{a_{k-l}}{S_k} \right) |u_l| \\
&\leq \sum_{l=0}^{n} \left(\sum_{k=l}^{n} \frac{a_{k-l}}{S_l} \right) |u_l| = \sum_{l=0}^{n} \left(\sum_{i=0}^{n-l} \frac{a_i}{S_l} \right) |u_l| \\
&\leq \sum_{l=0}^{n} \frac{S_{n-l}}{S_l} |u_l|
\end{aligned}$$

Si on note $S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ et $\Sigma = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$ alors :

$\forall n \in \mathbb{N} \ \sum_{k=0}^{n} |v_k| \leq \frac{S}{a_0} \Sigma$

La suite des sommes partielles de la série à termes positifs, $\sum_{n \geq 0} |v_n|$ est majorée donc cette série converge : c'est ce qu'on demandait de prouver.

Exercice 5 *(Ens 2025)*

Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = \frac{\pi}{2}$ et :

$\forall n \in \mathbb{N} \ u_{n+1} = \sin(u_n)$

La série $\sum u_n^2$ converge-t-elle ?

Correction

La fonction sin étant définie sur $\mathbb{R}$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne pose aucun problème de définition.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n) : u_n \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right]$

$\mathcal{P}(0)$ est vraie.

On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie.

sin est strictement croissante sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ donc $0 = \sin(0) < u_{n+1} \leq \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 < \frac{\pi}{2}$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

On a donc prouvé :

$\forall n \in \mathbb{N} \ u_n \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right]$

$\forall n \in \mathbb{N} \ u_{n+1} - u_n = \sin(u_n) - u_n < 0$ par stricte convexité de sin sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right]$ ou par étude de la fonction $x \mapsto \sin(x) - x$

La suite (u_n) est donc décroissante et minorée donc convergente.
Sa limite est un nombre compris entre 0 et $\dfrac{\pi}{2}$ tel que $\sin(x) = x$.
Seul $x = 0$ convient (convexité ou étude de fonction)

$u_{n+1} - u_n = \sin(u_n) - u_n \sim -\dfrac{u_n^3}{6}$
Les examinateurs s'intéressent alors à l'équation différentielle $y' = -\dfrac{1}{6}y^3$
On a $\dfrac{y'}{y^3} = -\dfrac{1}{6}$ (les examinateurs ne se préoccupent pas dans cette phase de recherche de la division par un nombre qui pourrait être nul)
Donc $-\dfrac{1}{y^2} = -\dfrac{t}{6} + C$.
"Motivé par cette solution", on pose $v_n = \dfrac{1}{u_n^2}$.

$$\begin{aligned} b_{n+1} - b_n &= \frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} = \frac{u_n^2 - u_{n+1}^2}{u_n^2 u_{n+1}^2} = \frac{(u_n - u_{n+1})(u_n - u_{n+1})}{u_n^2 u_{n+1}^2} \\ &= \frac{(u_n + \sin(u_n))(u_n - \sin(u_n))}{u_n^2 \sin^2(u_n))} \sim \frac{2u_n \frac{u_n^3}{6}}{u_n^2\, u_n^2} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Donc $v_{n+1} - v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{3}$.
Les examinateurs en déduisent, sans dire comment $v_n \sim \dfrac{n}{3}$.
On peut utiliser Césaro : $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(v_{k+1} - v_k) = \dfrac{v_n}{n} - \dfrac{v_0}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{3}$.
On a donc $u_n^2 \sim \dfrac{3}{n}$ et tout est positif donc la série de terme général u_n^2 diverge.

Une autre méthode est possible.
$u_{n+1} - u_n = \sin(u_n) - u_n \sim -\dfrac{u_n^3}{6}$ donc :
$\dfrac{u_n^2}{6} \sim 1 - \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \sim -\ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln(u_n) - \ln(u_{n+1})$
Mais la suite $(\ln(u_n))$ diverge donc la série de terme général $\ln(u_n) - \ln(u_{n+1})$ diverge.
Tout étant positif, on en déduit que la série de terme général u_n^2 diverge.

Exercice 6 *(X 2024)*

Nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{|\tan(n)|}{n}$?

Correction
Soit $E = \displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \left]-\frac{1}{4} + k\pi; \frac{1}{4} + k\pi\right[$.
La longueur de chaque intervalle $\left]-\dfrac{1}{4} + k\pi; \dfrac{1}{4} + k\pi\right[$ est $\dfrac{1}{2} < 1$.
La distance entre deux intervalles consécutifs est $-\dfrac{1}{4} + (k+1)\pi - \left(\dfrac{1}{4} + k\pi\right) = \pi - \dfrac{1}{2} > 1$
Par conséquent,il ne peut pas y avoir 2 entiers consécutifs dans E.
Par conséquent pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|\tan(2n-1)|$ ou $|\tan(2n)| \geq \tan\left(\dfrac{1}{4}\right)$ noté a.

a est strictement positif.
On en déduit que :
$\forall n \in \mathbb{N}^* \ \dfrac{|\tan(2n-1)|}{2n-1} \geq \dfrac{a}{2n-1} \geq \dfrac{a}{2n}$ ou $\dfrac{|\tan(2n)|}{2n} \geq \dfrac{a}{2n}$
Donc :
$\forall n \in \mathbb{N}^* \ \dfrac{|\tan(2n-1)|}{2n-1} + \dfrac{|\tan(2n)|}{2n} \geq \dfrac{a}{2n}$
Si on note (S_n) la suite des sommes partielles de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{|\tan(n)|}{n}$ alors :
$\forall n \in \mathbb{N}^* \ S_{2n} \geq \dfrac{a}{2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
Par conséquent la suite (S_n) diverge et la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{|\tan(n)|}{n}$ aussi.

Exercice 7 *(X 2024)*

Soit (a_n) une suite à valeurs dans $]0;1[$ telle que la série $\displaystyle\sum \frac{a_n}{\ln(1/a_n)}$ converge.
Montrer que la série $\displaystyle\sum \frac{a_n}{\ln(n)}$ converge.

Correction
Ma première idée est que $\ln(n)$ pourrait être plus grand que $\ln\left(\dfrac{1}{a_n}\right)$, ce qui permettrait de conclure facilement.
Mais :
$\ln(n) \geq \ln\left(\dfrac{1}{a_n}\right) \iff n \geq \dfrac{1}{a_n} \iff a_n \geq \dfrac{1}{n}$
Mais $\dfrac{1/n}{\ln(1/n)} = \dfrac{1}{n\ln(n)}$ est le terme général d'une série divergente.
Ensuite je me suis dis que si a_n n'est pas trop petit, a_n et $\ln(n)$ ont le même ordre de grandeur.
Par contre si a_n est petit $\dfrac{a_n}{\ln(n)}$ est plus grand que $\dfrac{a_n}{\ln(1/a_n)}$. Cela semble poser problème mais dans ce cas, a_n seul suffit.
D'où la rédaction suivante.
Soit $n \geq 3$.
Si $a_n \leq \dfrac{1}{n^2}$ alors $\dfrac{a_n}{\ln(n)} \leq a_n \leq \dfrac{1}{n^2}$
Si $a_n \geq \dfrac{1}{n^2}$ alors $\dfrac{1}{a_n} \leq n^2$.
On en déduit $\ln\left(\dfrac{1}{a_n}\right) \leq 2\ln(n)$
puis : $\dfrac{a_n}{\ln(n)} \leq 2\dfrac{a_n}{\ln(1/a_n)}$
On a donc :
$\forall n \geq 3 \ 0 \leq \dfrac{a_n}{\ln(n)} \leq \dfrac{1}{n^2} + 2\dfrac{a_n}{\ln(1/a_n)}$ terme général d'une série convergente
Donc la série $\displaystyle\sum \frac{a_n}{\ln(n)}$ converge.

Exercice 8 *(X 2024)*

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, soit $(u_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{C}$.
On suppose :

- Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{n \geq 0} u_n^{(k)}$ converge absolument.
- Pour toute suite bornée $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(k)} v_n \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$

Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} \left|u_n^{(k)}\right| \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$.

L'examinateur a fait remarqué que la réciproque est vraie ie si $\sum_{n=0}^{+\infty} \left|u_n^{(k)}\right| \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$ alors pour suite bornée $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(k)} v_n \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$ mais qu'on ne s'en occuperait pas dans l'exercice. C'est d'ailleurs très facile à montrer.

Correction
Le candidat a explicité l'hypothèse (v_n) bornée mais sans aboutir.
Au bout de 5 minutes, l'examinateur a donné l'indication suivante :
Montrer que $u_n^{(k)} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$.
Le candidat ne parvenant pas à le montrer, il a donné plus tard une seconde indication : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(k)} v_n \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$ pour **toutes** les suites bornées, essayer des suites bornées particulières.
Le candidat a testé $v_n = 1$, $v_n = (-1)^n$ et $v_n = \frac{1}{n^2}$ sans succès.
L'examinateur a alors posé la question suivante : et si v_n vaut presque tout le temps 0 ?
On fixe donc $n_0 \in \mathbb{N}$ et on considère la suite $(v_n) = (\delta_{n_0,n})$ bien évidemment bornée.
$\forall k \in \mathbb{N}$ $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(k)} v_n = u_{n_0}^{(k)}$
On en déduit $u_{n_0}^{(k)} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$

Au bout de 30 minutes, l'examinateur a donné une nouvelle indication.
On suppose $\sum_{n=0}^{+\infty} \left|u_n^{(k)}\right| = 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
Construire deux suites strictement croissantes d'entiers naturels (a_k) et (N_k) telles que :
$\forall k \in \mathbb{N}$ $\sum_{j=a_{k-1}}^{a_k-1} \left|u_j^{(N_k)}\right| \geq \frac{3}{4}$ (avec la convention $a_{-1} = 0$)
On prend $N_0 = 0$.
$\sum_{j=0}^{+\infty} \left|u_j^{(0)}\right| = 1$ donc il existe $a_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{j=0}^{a_0-1} \left|u_j^{(0)}\right| = \sum_{j=a_{-1}}^{a_0-1} \left|u_j^{(N_0)}\right| \geq \frac{3}{4}$
$\forall j \in [\![a_{-1}; a_0 - 1]\!]$ $u_j^{(k)} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$
Donc $\sum_{j=a_{-1}}^{a_0-1} \left|u_j^{(k)}\right| \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$ et :
$\exists N_1 > N_0$ tq $\sum_{j=a_{-1}}^{a_0-1} \left|u_j^{(N_1)}\right| \leq \frac{1}{8}$

Donc $\displaystyle\sum_{j=a_0}^{+\infty}\left|u_j^{(N_1)}\right| \geq \frac{7}{8} > \frac{3}{4}$ et :

$\exists a_1 > a_0$ tq $\displaystyle\sum_{j=a_0}^{a_1-1}\left|u_j^{(N_1)}\right| \geq \frac{3}{4}$

et on itère le procédé.

Revenons à l'énoncé initial et raisonnons par l'absurde.

On suppose donc que la suite $\displaystyle\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left|u_n^{(k)}\right|\right)_{k\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0.

Il existe donc $\epsilon > 0$ tel que :

$\forall k_0 \in \mathbb{N}\ \exists k \geq k_0$ tq $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left|u_n^{(k)}\right| \geq \epsilon$.

Il existe donc ϕ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ strictement croissante telle que :

$\forall k \in \mathbb{N}\ \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left|u_n^{(\phi(k))}\right| \geq \epsilon$.

On prend $N_0 = \phi(0)$ et $a_{-1} = 0$.

Il existe $a_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\displaystyle\sum_{j=0}^{a_0-1}\left|u_j^{(\phi(0))}\right| = \sum_{j=a_{-1}}^{a_0-1}\left|u_j^{(N_0)}\right| \geq \frac{3}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\left|u_n^{(N_0)}\right|$

$\forall j \in [\![a_{-1}; a_0-1]\!]\ u_j^{(\phi((k))} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$

Donc $\displaystyle\sum_{j=a_{-1}}^{a_0-1}\left|u_j^{(\phi(k))}\right| \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$ et :

$\exists N_1 > N_0$ tq $\displaystyle\sum_{j=a_{-1}}^{a_0-1}\left|u_j^{(\phi(N_1))}\right| \leq \frac{\epsilon}{8}$

$\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty}\left|u_j^{(\phi(N_1))}\right| \geq \epsilon$ donc $\displaystyle\frac{\epsilon}{8} \leq \frac{1}{8}\sum_{j=0}^{+\infty}\left|u_j^{(\phi(N_1))}\right|$ et $\displaystyle\sum_{j=a_{-1}}^{a_0-1}\left|u_j^{(\phi(N_1))}\right| \leq \frac{1}{8}\sum_{j=0}^{+\infty}\left|u_j^{(\phi(N_1))}\right|$

Donc $\displaystyle\sum_{j=a_0}^{+\infty}\left|u_j^{(\phi(N_1))}\right| \geq \frac{7}{8}\sum_{j=0}^{+\infty}\left|u_j^{(\phi(N_1))}\right| > \frac{3}{4}\sum_{j=0}^{+\infty}\left|u_j^{(\phi(N_1))}\right|$ et :

$\exists a_1 > a_0$ tq $\displaystyle\sum_{j=a_0}^{a_1-1}\left|u_j^{(\phi(N_1))}\right| \geq \frac{3}{4}\sum_{j=0}^{+\infty}\left|u_j^{(\phi(N_1))}\right|$

On construit ainsi deux suites strictement croissantes d'entiers telles que :

$\forall k \in \mathbb{N}\ \displaystyle\sum_{j=a_{k-1}}^{a_k-1}\left|u_j^{(\phi(N_k))}\right| \geq \frac{3}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\left|u_n^{(\phi(N_k))}\right|$

On considère alors la suite (v_n) définie par :

$\forall k \in \mathbb{N}\ \forall n \in [\![a_{k-1}, a_k - 1]\!]\ v_n = \mathrm{e}^{-i\theta_n^{(k)}}$ où $\theta_n^{(k)}$ est un argument de $u_n^{(\phi(N_k))}$ (avec la convention $\theta_n^{(k)} = 0$ si $u_n^{(\phi(N_k))} = 0$.

La suite (v_n) est évidemment bornée.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{j=0}^{a_{k-1}-1} u_n^{(\phi(N_k))} v_n\right| &\leq \sum_{j=0}^{a_{k-1}-1}\left|u_n^{(\phi(N_k))}\right||v_n| = \sum_{j=0}^{a_{k-1}-1}\left|u_n^{(\phi(N_k))}\right| = \sum_{j=0}^{+\infty}\left|u_n^{(\phi(N_k))}\right| - \sum_{j=a_{k-1}}^{+\infty}\left|u_n^{(\phi(N_k))}\right| \\
&\leq \sum_{j=0}^{+\infty}\left|u_n^{(\phi(N_k))}\right| - \sum_{j=a_{k-1}}^{a_k-1}\left|u_n^{(\phi(N_k))}\right| \leq \frac{1}{4}\sum_{j=0}^{+\infty}\left|u_n^{(\phi(N_k))}\right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left|\sum_{j=a_k}^{+\infty} u_n^{(\phi(N_k))} v_n\right| &\leq \sum_{j=a_k}^{+\infty} \left|u_n^{(\phi(N_k))}\right| |v_n| = \sum_{j=a_k}^{+\infty} \left|u_n^{(\phi(N_k))}\right| = \sum_{j=0}^{+\infty} \left|u_n^{(\phi(N_k))}\right| - \sum_{j=0}^{a_k-1} \left|u_n^{(\phi(N_k))}\right| \\ &\leq \sum_{j=0}^{+\infty} \left|u_n^{(\phi(N_k))}\right| - \sum_{j=a_{k-1}}^{a_k-1} \left|u_n^{(\phi(N_k))}\right| \leq \frac{1}{4} \sum_{j=0}^{+\infty} \left|u_n^{(\phi(N_k))}\right|\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\left|\sum_{j=0}^{+\infty} u_n^{(\phi(N_k))} v_n\right| &\geq \left|\sum_{j=a_{k-1}}^{a_k-1} u_n^{(\phi(N_k))} v_n\right| - \left|\sum_{j=0}^{a_{k-1}-1} u_n^{(\phi(N_k))} v_n\right| - \left|\sum_{j=a_k}^{+\infty} u_n^{(\phi(N_k))} v_n\right| \\ &\quad \text{par l'inégalité triangulaire} \\ &\geq \sum_{j=a_{k-1}}^{a_k} \left|u_n^{(\phi(N_k))}\right| - \left|\sum_{j=0}^{a_{k-1}-1} u_n^{(\phi(N_k))} v_n\right| - \left|\sum_{j=a_k}^{+\infty} u_n^{(\phi(N_k))} v_n\right| \\ &\geq \frac{3}{4} \sum_{j=0}^{+\infty} \left|u_n^{(\phi(N_k))}\right| - \frac{1}{4} \sum_{j=0}^{+\infty} \left|u_n^{(\phi(N_k))}\right| - \frac{1}{4} \sum_{j=0}^{+\infty} \left|u_n^{(\phi(N_k))}\right| \\ &\geq \frac{1}{4} \sum_{j=0}^{+\infty} \left|u_n^{(\phi(N_k))}\right| \geq \frac{\epsilon}{4}\end{aligned}$$

On a donc une application ψ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ strictement croissante telle que :
$\forall k \in \mathbb{N} \ \left|\sum_{j=0}^{+\infty} u_n^{(\psi(k))} v_n\right| \geq \frac{\epsilon}{4}$
Par conséquent la suite $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(k)} v_n\right)_{k \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0.

Exercice 9 *(Ens 2024)*

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n = A$. Quelles sont les valeurs que peut prendre $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n^2$?

Correction

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n = A$.
On en déduit :
$\forall n \in \mathbb{N}\ x_n \leq A$
puis :
$\forall n \in \mathbb{N}\ x_n^2 \leq A x_n$
En sommant, on a donc : $0 \leq \sum_{n=0}^{+\infty} x_n^2 \leq A^2$
Si on prend $x_0 = A$ et $x_n = 0$ pour $n \geq 1$ alors $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n^2 = A^2$
Le cas $A = 0$ étant de peu d'intérêt, on suppose $A > 0$.
Les x_n ne peuvent donc pas être tous nuls, les x_n^2 non plus.

Donc $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n^2 > 0$.

Si on prend $x_0 = \cdots = x_p = \dfrac{A}{p+1}$ et $x_n = 0$ pour $n > p$ alors $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n^2 = \dfrac{A^2}{p+1} \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$

Si on prend $x_0 = At$, $x_1 = \cdots = x_p = \dfrac{(1-t)A}{p}$ et $x_n = 0$ pour $n > p$ avec $t \in [0;1]$ alors :
$\sum_{n=0}^{+\infty} x_n^2 = A^2 \left(t^2 + \dfrac{(1-t)^2}{p} \right) = A^2 f(t)$
La fonction f est $\mathcal{C}^\infty$ et :
$\forall t \in [0;1]\ f'(t) = 2t - \dfrac{2(1-t)}{p} = \dfrac{2}{p}\left((p+1)t - 1\right)$
f est décroissante sur $\left[0; \dfrac{1}{p+1}\right]$ de $\dfrac{1}{p}$ à $f\left(\dfrac{1}{p+1}\right) = \dfrac{1}{p+1}$.
f est croissante sur $\left[\dfrac{1}{p+1}; 1\right]$ de $\dfrac{1}{p+1}$ à 1.
Donc $f([0;1]) = \left[\dfrac{1}{p+1}; 1\right]$ et :
$\forall p \in \mathbb{N}^*\ \left[\dfrac{A^2}{p+1}; A^2\right]$ est inclus dans l'ensemble cherché.
Finalement l'ensemble cherché est $]0; A^2]$