Révisions 2026
mercredi 3 juin 2026

941

Exercice 1 *(CCP 2024)*

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose $||A|| = \max\limits_{1 \leq i \leq n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$ et $\rho(A) = \max(\mathrm{Sp}(A))$.

1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 0 & \mathrm{e}^{i\theta} \end{pmatrix}$. Calculer $||A||$ et $\rho(A)$.
2. Montrer :
   $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2,\ ||AB|| \leq ||A||\ ||B||$.
3. Soit λ une valeur propre de A et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé.

   Montrer que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\},\ |\lambda x_i| \leq \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{i,j} x_j|$.

   En déduire que $\rho(A) \leq ||A||$.
4. Montrer :
   $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \forall k \in \mathbb{N},\ \rho(A^k) = \rho(A)^k$.
5. On suppose A diagonalisable. Montrer que $A^k \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ si, et seulement si $\rho(A) < 1$.

Exercice 2 *(Ens 2024)*

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Déterminer pour $T \in \mathbb{R}$, $M(T) = \lim\limits_{N \to +\infty} \left(I_2 + \dfrac{T}{N} A \right)^N$.

Exercice 3 *(Centrale 2024)*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable.
Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres de A comptées sans leurs multiplicités.
On suppose que $A^k \xrightarrow[k \to +\infty]{} L \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que la famille $(I_n, A, \ldots, A^{p-1})$ est libre.
2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $P_k \in \mathbb{R}_{k-1}[X]$ tel que $A^k = P_k(A)$.
3. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{R}_{k-1}[X]$ tel que $L = P(A)$.
4. 4 autres questions

Exercice 4 *(Centrale 2024)*

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $M \in O(p)$.

1. Montrer que $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) = \operatorname{Ker}(M - I_p) \overset{\perp}{\oplus} \operatorname{Im}(M - I_p)$.
2. Etudier la convergence dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ de la suite $\left(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} M^k\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 5 *(Ens 2025)*

Trouver l'ensemble des matrices $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles qu'il existe un vecteur $x \in \mathbb{R}^2$ tel que $\|A^n x\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Exercice 6 *(Ens 2025)*

Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels telle que

$$\lim_{n\to+\infty}(4x_n + 2x_{n-1} + x_{n-2}) = 7$$

Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = 1$$