

Révisions 2026

mercredi 3 juin 2026

941

Exercice 1 (CCP 2024)

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose $\|A\| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|$ et $\rho(A) = \max(\text{Sp}(A))$.

1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix}$. Calculer $\|A\|$ et $\rho(A)$.

2. Montrer :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2, \|AB\| \leq \|A\| \|B\|.$$

3. Soit λ une valeur propre de A et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé.

$$\text{Montrer que pour tout } i \in \{1, \dots, n\}, |\lambda x_i| \leq \sum_{j=1}^n |a_{i,j} x_j|.$$

En déduire que $\rho(A) \leq \|A\|$.

4. Montrer :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \forall k \in \mathbb{N}, \rho(A^k) = \rho(A)^k.$$

5. On suppose A diagonalisable. Montrer que $A^k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$ si, et seulement si $\rho(A) < 1$.

Correction

1. • Norme $\|A\|$:

$$\|A\| = \max \left(\sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \right)$$

Pour la première ligne : $|1| + |1+i| = 1 + \sqrt{1^2 + 1^2} = 1 + \sqrt{2}$

Pour la deuxième ligne : $|0| + |e^{i\theta}| = 1$

Donc, $\|A\| = \max(1 + \sqrt{2}, 1) = 1 + \sqrt{2}$

• Spectre $\rho(A)$: Les valeurs propres de A sont les racines du polynôme caractéristique de A .

$$\forall \lambda \in \mathbb{C} \chi_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 1 & -1 - i \\ 0 & \lambda - e^{i\theta} \end{pmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - e^{i\theta})$$

Donc, les valeurs propres sont $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = e^{i\theta}$. Ainsi, $\rho(A) = \max(|1|, |e^{i\theta}|) = 1$

2.

$$\begin{aligned}
\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \sum_{j=1}^n |(AB)_{i,j}| &= \sum_{j=1}^n \left| \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j} \right| \\
&\leq \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n |a_{i,k} b_{k,j}| = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{i,k} b_{k,j}| = \sum_{k=1}^n \left(|a_{i,k}| \sum_{j=1}^n |b_{k,j}| \right) \\
&\leq \sum_{k=1}^n (|a_{i,k}| \|B\|) = \|B\| \sum_{k=1}^n |a_{i,k}| \\
&\leq \|B\| \|A\| \text{ indépendant de } i
\end{aligned}$$

Donc $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$.

3. On a : $AX = \lambda X$.

Donc pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $\lambda x_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j$.

Donc pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $|\lambda x_i| = \left| \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \right| \leq \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| |x_j|$.

On prend alors i tel que $|x_i| = \max_{1 \leq j \leq n} (|x_j|) = \|X\|_\infty$.

$$|\lambda| \|X\|_\infty \leq \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \|X\|_\infty = \|X\|_\infty \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \leq \|X\|_\infty \|A\|$$

X est un vecteur propre donc X et non nul et $\|X\|_\infty > 0$ donc :

$$|\lambda| \neq \|A\|$$

Comme c'est vrai pour toute valeur propre de A :

$$\rho(A) \leq \|A\|$$

4. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ donc A est trigonalisable : il existe P inversible telle que $P^{-1}AP = T$ est une matrice triangulaire supérieure.

Les valeurs propres de A , comptées avec leurs multiplicités, sont les nombres $t_{1,1}, \dots, t_{n,n}$. $A = PTP^{-1}$ donc $A^k = PT^kP^{-1}$ et A^k est semblable à T^k . A^k a donc les mêmes valeurs propres que T^k qui se lisent directement sur sa diagonale.

Les valeurs propres de A^k , comptées avec leurs multiplicités, sont donc les nombres $t_{1,1}^k, \dots, t_{n,n}^k$.

La fonction $x \mapsto x^k$ étant croissante sur \mathbb{R}_+ , $\rho(A^k) = \rho(A)^k$.

5. Si A est diagonalisable, alors il existe une matrice inversible P telle que $A = PDP^{-1}$ où D est une matrice diagonale contenant les valeurs propres de A .

On a alors $A^k = (PDP^{-1})^k = PD^kP^{-1}$ où les éléments diagonaux de D^k sont les puissances des valeurs propres de D donc de A .

Si $\rho(A) < 1$, alors toutes les valeurs propres de A ont un module strictement inférieur à 1. Donc tous les coefficients de la matrice diagonale D^k tendent vers 0.

On en déduit $D^k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$ ce qui implique que $A^k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$.

Inversement si $A^k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$:

$$\forall k \in \mathbb{N} \rho(A)^k = \rho(A^k) \leq \|A^k\| \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$$

On en déduit $\rho(A)^k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$ et donc $\rho(A) < 1$ (et on pourra remarquer qu'on n'a pas besoin de supposer A diagonalisable dans ce sens).

Exercice 2 (*Ens 2024*)

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Déterminer pour $T \in \mathbb{R}$, $M(T) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(I_2 + \frac{T}{N} A \right)^N$.

Correction

$A = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \forall N \in \mathbb{N}^* \quad \left(I_2 + \frac{T}{N} A \right)^N &= \left(P I_2 P^{-1} + \frac{T}{N} P D P^{-1} \right)^N \\ &= \left(P \left(I_2 + \frac{T}{N} D \right) P^{-1} \right)^N \\ &= P \left(I_2 + \frac{T}{N} D \right)^N P^{-1} = P \begin{pmatrix} \left(1 + \frac{T}{N} \right)^N & 0 \\ 0 & \left(1 - \frac{T}{N} \right)^N \end{pmatrix} P^{-1} \end{aligned}$$

Classiquement, $\left(1 + \frac{T}{N} \right)^N \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} e^T$ et $\left(1 - \frac{T}{N} \right)^N \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} e^{-T}$ donc :

$$M(T) = P \begin{pmatrix} e^T & 0 \\ 0 & e^{-T} \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$P \begin{pmatrix} e^T & 0 \\ 0 & e^{-T} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^T & e^{-T} \\ e^T & -e^{-T} \end{pmatrix}$$

$$M(T) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^T + e^{-T} & e^T - e^{-T} \\ e^T - e^{-T} & e^T + e^{-T} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{ch}(T) & \text{sh}(T) \\ \text{sh}(T) & \text{ch}(T) \end{pmatrix}$$

Exercice 3 (*Centrale 2024*)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable.

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres de A comptées sans leurs multiplicités.

On suppose que $A^k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} L \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que la famille (I_n, A, \dots, A^{p-1}) est libre.
2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $P_k \in \mathbb{R}_{k-1}[X]$ tel que $A^k = P_k(A)$.
3. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{R}_{k-1}[X]$ tel que $L = P(A)$.
4. 4 autres questions

Correction

1. Soit $(a_0, \dots, a_{p-1}) \in \mathbb{R}^p$ tel que $\sum_{i=0}^{p-1} a_i A^i = 0$.

Le polynôme $P = \sum_{i=0}^{p-1} a_i X^i$ annule A donc le spectre de A est contenu dans l'ensemble des racines de P .

P a donc au moins p racines deux à deux distinctes tout en étant de degré inférieur ou égal à $p - 1$.

P est donc le polynôme nul et tous ses coefficients sont nuls : $a_0 = \dots = a_{p-1} = 0$.

2. D'après le cours, le polynôme $Q = \prod_{l=1}^p (X - \lambda_l)$ annule A .

Soit $k \in \mathbb{N}$.

On effectue la division euclidienne de X^k par Q :

Il existe $R_k \in \mathbb{R}[X]$ et $P_k \in \mathbb{R}_{k-1}[X]$ tels que $X^k = QR_k + P_k$

$A^k = Q(A)R_k(A) + P_k(A) = P_k(A)$

3. On complète la famille (I_n, A, \dots, A^{p-1}) en une base $(I_n, A, \dots, A^{p-1}, M_1, \dots, M_{n^2-p})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Les coordonnées de L sont les limites des coordonnées des matrices A^k .

Comme les $n^2 - p$ dernières coordonnées de ces matrices sont toutes nulles, il en est de même pour la matrice L .

Exercice 4 (Centrale 2024)

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $M \in O(p)$.

- Montrer que $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) = \text{Ker}(M - I_p) \oplus \text{Im}(M - I_p)$.
- Etudier la convergence dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ de la suite $\left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} M^k \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Correction

1. Soit $X \in \text{Ker}(M - I_p)$ et $Y \in \text{Im}(M - I_p)$.

$X \in \text{Ker}(M - I_p)$ donc $MX = X$

$Y \in \text{Im}(M - I_p)$ donc : $\exists Z \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ tq $Y = MZ - Z$

$(X|Y) = (X|MZ - Z) = (X|MZ) - (X|Z) = (MX|MZ) - (X|Z) = 0$ car $M \in O(p)$

Donc $\text{Ker}(M - I_p) \perp \text{Im}(M - I_p)$ et $\text{Im}(M - I_p) \subset \text{Ker}(M - I_p)^\perp$

Mais $\dim(\text{Ker}(M - I_p)^\perp) = \dim(\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})) - \dim(\text{Ker}(M - I_p)) = \dim(\text{Im}(M - I_p))$

avec la formule du rang.

Donc $\text{Im}(M - I_p) = \text{Ker}(M - I_p)^\perp$.

D'où le résultat.

2. D'après la première question, en concaténant une BON de $\text{Ker}(M - I_p)$ et une BON de $\text{Im}(M - I_p)$, on obtient une BON de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.

Soit P la matrice de passage de la base canonique à cette base.

M et $M - I_p$ commutent donc $\text{Ker}(M - I_p)$ et $\text{Im}(M - I_p)$ sont stables par M .

$P \in O(p)$ et $M = P \begin{pmatrix} I_q & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} P^T$.

R est la matrice dans une BON de $\text{Im}(M - I_p)$ de l'endomorphisme de $\text{Im}(M - I_p)$ induit par M .

R est donc une matrice orthogonale.

Si 1 était valeur propre de R , il y aurait dans $\text{Im}(M - I_p)$ un vecteur non nul invariant par M , en contradiction avec la première question donc la matrice $I_{p-q} - R$ est inversible.

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} M^k = P \begin{pmatrix} I_q & 0 \\ 0 & \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} R^k \end{pmatrix} P^T$$

$$(I_{p-q} - R) \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} R^k = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{p-1} (R^k - R^{k+1}) = \frac{1}{n} (I_{p-q} - R^n)$$

La suite $(R^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée : c'est une suite de matrices orthogonales donc tous les coefficients de ces matrices sont compris entre 0 et 1.

$$\text{Donc : } \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} R^k = (I_{p-q} - R)^{-1} \frac{1}{n} (I_{p-q} - R^n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Donc $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} M^k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \begin{pmatrix} I_q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ qui est la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur $\text{Ker}(M - I_p)$.

Exercice 5 (Ens 2025)

Trouver l'ensemble des matrices $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles qu'il existe un vecteur $x \in \mathbb{R}^2$ tel que $\|A^n x\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

Correction

L'énoncé ne précise pas la norme : c'est inutile car en dimension finie toutes les normes sont équivalentes.

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

χ_A est un polynôme unitaire de degré 2 à coefficients dans \mathbb{R} .

- **Premier cas :** χ_A a deux racines réelles simples λ_1 et λ_2 .

Si une des deux valeurs propres, λ_1 par exemple pour fixer les idées, a une valeur absolue strictement supérieure à 1, on considère x vecteur propre de A associé à λ_1 .

$$\|A^n x\| = \|\lambda_1^n x\| = |\lambda_1|^n \|x\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

Si les deux valeurs propres appartiennent à $[-1; 1]$ alors on considère une base (e_1, e_2) de \mathbb{R}^2 avec $Ae_1 = \lambda_1 e_1$ et $Ae_2 = \lambda_2 e_2$ (une telle base existe bien).

Soit $x \in \mathbb{R}^2$.

$$\exists! (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } x = x_1 e_1 + x_2 e_2$$

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} \quad \|A^n x\| &= \|x_1 A^n e_1 + x_2 A^n e_2\| = \|x_1 \lambda_1^n e_1 + x_2 \lambda_2^n e_2\| \\ &\leq |x_1| |\lambda_1|^n \|e_1\| + |x_2| |\lambda_2|^n \|e_2\| \\ &\leq |x_1| \|e_1\| + |x_2| \|e_2\| \text{ indépendant de } n \end{aligned}$$

Donc la suite $(\|A^n x\|)$ est bornée et ne peut diverger vers $+\infty$.

- **Deuxième cas :** χ_A a une racine réelle double λ

$E_\lambda(A)$ est de dimension 1 ou 2.

Si $E_\lambda(A)$ est de dimension 2 alors $A = \lambda I_2$ et $\|A^n x\| = |\lambda|^n \|x\|$ pour tout $x \in \mathbb{R}^2$ et tout $n \in \mathbb{N}$.

Il existe un vecteur $x \in \mathbb{R}^2$ tel que $\|A^n x\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ si, et seulement si, $|\lambda| > 1$.

Supposons $\dim(E_\lambda(A)) = 1$.

Soit e_1 un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ .

Si $|\lambda| > 1$ alors $\|A^n e_1\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

On suppose désormais $|\lambda| \leq 1$.

On complète (e_1) en (e_1, e_2) base de \mathbb{R}^2 .

La matrice de u_A dans cette base est $\begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ avec $\mu \neq 0$ (penser à la trace).

En écrivant $\begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I_2 + \mu N$ avec $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ou en raisonnant par récurrence, on montre :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1}\mu \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$$

Supposons $|\lambda| = 1$ ie $\lambda = \pm 1$ car $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad A^n e_2 = n\lambda^{n-1}\mu e_1 + \lambda^n e_2 = n\lambda^{n-1} \left(\mu e_1 + \frac{\lambda}{n} e_2 \right)$$

Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \|A^n e_2\| = n \left\| \mu e_1 + \frac{\lambda}{n} e_2 \right\| \quad \text{avec} \quad \left\| \mu e_1 + \frac{\lambda}{n} e_2 \right\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \|\mu e_1\| = |\mu| \|e_1\| > 0 \quad \text{car} \quad \mu \neq 0$$

$$\text{Donc} \quad \|A^n e_2\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

On suppose $|\lambda| < 1$.

Soit $x \in \mathbb{R}^2$.

$$\exists!(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{tq} \quad x = x_1 e_1 + x_2 e_2$$

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \|A^n x\| &= \left\| \left(\lambda^n x_1 + n\lambda^{n-1}\mu x_2 \right) e_1 + \lambda^n x_2 e_2 \right\| \\ &\leq \left| \lambda^n x_1 + n\lambda^{n-1}\mu x_2 \right| \|e_1\| + |\lambda^n| \|e_2\| \\ &\leq n |\lambda|^{n-1} \left(\frac{|\lambda|}{n} |x_1| + |\mu| |x_2| \right) \|e_1\| + |\lambda|^n \|e_2\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

Donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}^2 \quad \|A^n x\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

- **Troisième cas :** χ_A a deux racines complexes conjuguées $a + ib$ et $a - ib$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}_+^*$.

Soit u un vecteur propre (complexe) associé à la valeur propre $a + ib$.

On a montré en cours que si on pose $v = \Re e(u)$ et $w = -\Im m(u)$ alors (v, w) est une base de \mathbb{R}^2 dans laquelle la matrice de u_A est $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = rR_\theta$ si $a + ib = r e^{i\theta}$ avec $r \in \mathbb{R}_+^*$,

R_θ étant la matrice de rotation d'angle θ .

Les normes étant équivalentes, on peut prendre la norme euclidienne associée au produit scalaire qui fait de (v, w) une base orthonormée.

On a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \|Ax\| = r^n \|x\|$$

et la matrice A convient si, et seulement si, $|r| > 1$

Finalement les matrices qui conviennent sont celles qui ont deux valeurs propres (complexes) simples dont l'une au moins est de module strictement supérieur à 1 et les matrices ayant 1 ou -1 comme valeur propre double mais différentes de I_2 et de $-I_2$.

Exercice 6 (Ens 2025)

Soit $(x_n)_{n \geq 1}$ une suite de réels telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (4x_n + 2x_{n-1} + x_{n-2}) = 7$$

Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 1$$

Correction

Pour tout $n \geq 1$, on pose $y_n = x_n - 1$.

$\forall n \geq 3 \quad 4y_n + 2y_{n-1} + y_{n-2} = 4x_n + 2x_{n-1} + x_{n-2} - 7 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ et il s'agit de prouver que $y_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$

La solution générale de $4u_n + 2u_{n-1} + u_{n-2} = 0$ est de la forme $u_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ mais on ne peut pas faire comme pour une relation de récurrence à 1 pas et s'inspirer de la méthode de la variation des deux constantes pour les équations différentielles qui n'est pas au programme.

- **Première méthode**

Soit $u \begin{cases} \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*} \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \mapsto (u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}^*} \end{cases}$

Soit $P = 4X^2 + 2X + 1$.

On suppose que la suite $P(u) ((y_n)_{n \in \mathbb{N}^*})$ converge vers 0 et on veut montrer que la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

Les racines de P sont $r_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{4}$ et $r_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{4}$ donc $P = 4(X - r_1)(X - r_2)$ et la suite

$4(u - r_1 id)((u - r_2 id)(y))$ converge vers 0.

En d'autres termes si on pose $a_n = y_{n+1} - r_2 y_n$ alors :

$$a_{n+1} - r_1 a_n = y_{n+2} - (r_1 + r_2)y_{n+1} + r_1 r_2 y_n = y_{n+2} + \frac{1}{2}y_{n+1} + \frac{1}{4}y_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

On va montrer que (a_n) converge vers 0 puis que (y_n) converge vers 0.

On a donc :

$$\forall n \geq 1 \quad a_{n+1} - r_1 a_n = \epsilon_n$$

avec $\epsilon_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

Les suites vérifiant $x_{n+1} - r_1 x_n = 0$ sont les suites géométriques de raison r_1 ie les suites définies par $x_n = C r_1^n$

On pose donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $C_n = r_1^{-n} a_n$ (penser à la variation de la constante)

On a donc :

$$\forall n \geq 1 \quad C_{n+1} r_1^{n+1} - C_n r_1^{n+1} = \epsilon_n$$

On en déduit :

$$\forall n \geq 1 \quad C_{n+1} - C_n = r_1^{-n-1} \epsilon_n$$

On en déduit :

$$\forall n \geq 2 \quad C_n = \sum_{k=1}^{n-1} (C_{k+1} - C_k) + C_1 = C_1 + \sum_{k=1}^{n-1} r_1^{-k-1} \epsilon_k$$

puis :

$$\forall n \geq 2 \quad a_n = C_1 r_1^n + \sum_{k=1}^{n-1} r_1^{n-k-1} \epsilon_k$$

$$C_1 r_1^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \text{ donc il s'agit de prouver } \sum_{k=1}^{n-1} r_1^{n-k-1} \epsilon_k \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

Soit $\epsilon > 0$.

$\exists n_0 \geq 2$ tq $\forall n \geq n_0$ $|\epsilon_n| \leq \epsilon$ (car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \epsilon_n = 0$)

$$\begin{aligned} \forall n \geq n_0 \left| \sum_{k=1}^{n-1} |r_1|^{n-k-1} \epsilon_k \right| &\leq \sum_{k=1}^{n-1} |r_1|^{n-k-1} |\epsilon_k| \\ &\leq \sum_{k=1}^{n_0} |r_1|^{n-k-1} |\epsilon_k| + \sum_{k=n_0+1}^{n-1} |r_1|^{n-k-1} \epsilon \\ &\leq |r_1|^n \sum_{k=1}^{n_0} |r_1|^{-k-1} |\epsilon_k| + \epsilon \sum_{l=0}^{n-n_0-2} |r_1|^{n-n_0-2-l} \\ &\leq |r_1|^n \sum_{k=1}^{n_0} |r_1|^{-k-1} |\epsilon_k| + \epsilon |r_1|^{n-n_0-2} \frac{|r_1|^{-n+n_0+1} - 1}{|r_1|^{-1} - 1} \\ &\leq |r_1|^n \sum_{k=1}^{n_0} |r_1|^{-k-1} |\epsilon_k| + \frac{\epsilon}{1 - |r_1|} \end{aligned}$$

$|r_1|^n \sum_{k=1}^{n_0} |r_1|^{-k-1} |\epsilon_k| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc :

$\exists n_1 \geq n_0$ tq $\forall n \geq n_1$ $|r_1|^n \sum_{k=1}^{n_0} |r_1|^{-k-1} |\epsilon_k| \leq \epsilon$

Donc :

$\forall n \geq n_1 \left| \sum_{k=1}^{n-1} 2^{k+1-n} y_k \right| \leq \epsilon \frac{2 - |r_1|}{1 - |r_1|}$

Donc $a_n = y_{n+1} - r_2 y_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Dans le raisonnement précédent, on a seulement utilisé $|r_1| < 1$. Or $|r_2| < 1$ donc $y_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

• Deuxième méthode

On pose $Y_n = \begin{pmatrix} y_{n+1} \\ y_n \end{pmatrix}$ de sorte que $Y_{n+1} = AY_n + Z_n$ avec $A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $Z_n = \begin{pmatrix} \delta_n \\ 0 \end{pmatrix}$

avec $\delta_n = \frac{1}{4} (4y_{n+2} + 2y_{n+1} + y_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

$\chi_A = X^2 - \text{tr}(A)X + \det(A) = X^2 + \frac{1}{2}X + \frac{1}{4} = (X - r_1)(X - r_2)$ est scindé à racines simples sur \mathbb{C} donc A est diagonalisable et :

$\exists P \in GL_2(\mathbb{C})$ tq $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix}$

On a :

$$Y_{n+1} = PDP^{-1}Y_n + Z_n$$

$$\text{Donc } P^{-1}Y_{n+1} = DP^{-1}Y_n + P^{-1}Z_n$$

Si on note $P^{-1}Y_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ et $P^{-1}Z_n = \begin{pmatrix} s_n \\ t_n \end{pmatrix}$, on a $u_{n+1} - r_1 u_n = s_n$ et $v_{n+1} - r_2 v_n = t_n$

avec s_n et $t_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

On en déduit comme dans la première méthode : u_n et $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Donc $P^{-1}Y_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Donc $Y_n = P P^{-1}Y_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

En particulier $y_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.