# Révisions 2026
# mercredi 3 juin 2026

941

**Exercice 1** *(Ens 2024)*

On dit qu'une suite $(x_n)$ de réels converge au sens de Césaro vers $l$ lorsque $\dfrac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$.
Déterminer toutes les fonctions $f$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui conservent la convergence au sens de Césaro : pour toute suite réelle $(x_n)$, si la suite $(x_n)$ converge au sens de Césaro vers $l$ alors la suite $(f(x_n))$ converge au sens de Césaro vers $f(l)$.

**Exercice 2** *(Ens 2024)*

Existe-t-il deux matrices $N$ et $P$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $N^2 = 0$, $P^2 = P$, $NP$ est nilpotente et $(NP)^2 \neq 0$.

**Exercice 3** *(X 2024)*

Lorsque cela a un sens, on pose $f(z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^5\left(1 + \frac{i}{n^3} - z\right)}$

1. Montrer que $f$ est développable en série entière.
2. Montrer que la restriction de $f$ à l'ensemble des nombres complexes de module 1 n'est pas continue.

**Exercice 4** *(Ens 2024)*

Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes qui suivent la loi de Poisson de paramètre 1.
Pour $z \in [0; 1[$, on pose $f(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} X_k z^k$
Montrer que $\displaystyle\lim_{z\to1^{-1}} P\left(|(1-z)f(z) - 1| > \epsilon\right) = 0$

**Exercice 5** *(Ens 2024)*

Déterminer les fonctions $f$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-1, 1]$ telles que :
$\forall (x, y) \in [-1, 1]^2,\ f(x) - f(y) \geq f(x)^2(x - y)$.

**Exercice 6** *(X 2024)*

Soit $f : [0; 2\pi] \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(0) = f(2\pi)$.
De plus, on suppose qu'il existe un entier $n$ tel que pour tout $k$ compris entre 0 et $n$,
$\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\cos(kt)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} f(t)\sin(kt)\,\mathrm{d}t = 0.$
Quel est le nombre minimum de points d'annulation de $f$ ?

**Exercice 7** *(X 2024)*

Soit $f$ de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$ croissante et continue.
Montrer :
$\forall \epsilon > 0 \; \exists \eta > 0$ tq $\forall (x,y) \in [0;1]^2 \;\; |x-y| < \eta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$

**Exercice 8** *(Ens 2025)*

1. Trouver l'ensemble des fonctions $f : [0;1] \to \mathbb{R}_+^*$ intégrables (continues) telles que :

$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1}{f(t)}\,\mathrm{d}t = 1$$

2. Que dire si on remplace $[0;1]$ par $[0.A]$ avec $A > 1$ ? $A < 1$ ? (En gardant les intégrales égales à 1 ; on ne demande plus de fournir toutes les solutions.