Révisions 2026
mercredi 3 juin 2026

941

Exercice 1 *(Ens 2024)*

On dit qu'une suite (x_n) de réels converge au sens de Césaro vers l lorsque $\dfrac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$.
Déterminer toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui conservent la convergence au sens de Césaro : pour toute suite réelle (x_n), si la suite (x_n) converge au sens de Césaro vers l alors la suite $(f(x_n))$ converge au sens de Césaro vers $f(l)$.

Correction
Un peu de culture sur la convergence au sens de Césaro : si (x_n) converge vers l alors (x_n) converge vers l au sens de Césaro mais la réciproque est fausse, l'exemple classique étant celui de la suite $((-1)^n)$. En fait dans la convergence au sens de Césaro, on fait une moyenne ce qui fait que les écarts à la hausse avec l peuvent être compensés par des écarts à la baisse.
Prenons une suite (x_n) telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_{2n} = a$ et $x_{2n-1} = b$ où a et b sont deux valeurs fixées.
$\forall n \in \mathbb{N}^* \ \dfrac{1}{2n}\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} x_k = \dfrac{na+nb}{2n} = \dfrac{a+b}{2}$
$\forall n \in \mathbb{N} \ \dfrac{1}{2n+1}\displaystyle\sum_{k=1}^{2n+1} x_k = \dfrac{n}{2n+1}a + \dfrac{n+1}{2n+1}b \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{a+b}{2}$
Donc la suite (x_n) converge au sens de Césaro vers $\dfrac{a+b}{2}$.
Soit f une fonction conservant la convergence au sens de Césaro.
La suite $(f(x_n))$ converge au sens de Césaro vers $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$.
Mais :
$\forall n \in \mathbb{N} \ f(x_{2n}) = f(a)$ et $f(x_{2n-1}) = f(b)$
donc la suite $(f(x_n))$ converge au sens de Césaro vers $\dfrac{f(a)+f(b)}{2}$.
La convergence au sens de Césaro étant la convergence ordinaire d'une certaine suite, il y a unicité de la limite.
On a donc :
$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 \ f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) = \dfrac{f(a)+f(b)}{2}$
Classiquement, on montre alors avec la continuité que f est affine.
Montrons d'abord que f est continue.
On raisonne par l'absurde : on suppose que f n'est pas continue sur $\mathbb{R}$.
Il existe donc $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que f ne soit pas continue en x_0.
Il existe donc $\epsilon > 0$ tel que :
$\forall \eta > 0 \ \exists x \in [x_0 - \eta; x_0 + \eta]$ tq $|f(x) - f(x_0)| > \epsilon$

En prenant $\eta = \dfrac{1}{n}$, on construit une suite (y_n) qui converge vers 0 et telle que :
$\forall n \in \mathbb{N}^* \ \ |f(y_n) - f(x_0)| \geq \epsilon$
Soit $A = \{n \in \mathbb{N}^* \text{ tq } f(y_n) - f(x_0) > \epsilon\}$ et $B = \{n \in \mathbb{N}^* \text{ tq } f(y_n) - f(x_0) < \epsilon\}$.
$A \cup B = \mathbb{N}^*$ donc A ou B est infini.
Supposons A infini (le cas B infini se traite de manière similaire).
Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer :
$\forall n \in \mathbb{N}^* \ f(y_n) - f(x_0) \geq \epsilon$
La suite (y_n) converge vers x_0 au sens ordinaire donc elle converge au sens de Césaro vers x_0.
On en déduit que $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(y_k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x_0)$
Or :
$\forall n \in \mathbb{N}^* \ \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(y_k) \geq \dfrac{1}{n}\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (f(x_0)+\epsilon) = f(x_0)+\epsilon$
donc on aboutit à une contradiction et f est continue sur $\mathbb{R}$.

On pose $b = f(0)$.
Soit $q \in \mathbb{N}^*$.
On pose $a_q = q\left(f\left(\dfrac{1}{q}\right) - b\right)$ de sorte que $f\left(\dfrac{1}{q}\right) = \dfrac{a_q}{q} + b$
Pour tout $p \in \mathbb{N}$ soit $\mathcal{P}(p) : \forall k \in [\![0;p]\!] \ f\left(\dfrac{p}{q}\right) = a_q\dfrac{p}{q} + b$
a_q et b ont été choisis pour que $\mathcal{P}(1)$ soit vraie.
On suppose $\mathcal{P}(p)$ vraie ($p \in \mathbb{N}^*$).
$\dfrac{p}{q} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{p-1}{q} + \dfrac{p+1}{q}\right)$ donc $f\left(\dfrac{p}{q}\right) = \dfrac{1}{2}\left(f\left(\dfrac{p-1}{q}\right) + f\left(\dfrac{p+1}{q}\right)\right)$
On en déduit :

$$\begin{aligned} f\left(\frac{p+1}{q}\right) &= 2f\left(\frac{p}{q}\right) - f\left(\frac{p-1}{q}\right) \\ &= 2\left(a_q\frac{p}{q} + b\right) - a_q\frac{p-1}{q} - b = a_q\frac{p+1}{q} + b \end{aligned}$$

donc $\mathcal{P}(p+1)$ est vraie.
On a donc :
$\forall p \in \mathbb{N} \ f\left(\dfrac{p}{q}\right) = a_q\dfrac{p}{q} + b$
En particulier avec $p = q$: $a_q = f(1) - b = a_1$ qu'on notera désormais a.
On a donc :
$\forall q \in \mathbb{N}^* \ \forall p \in \mathbb{N} \ f\left(\dfrac{p}{q}\right) = a\dfrac{p}{q} + b$
ou encore :
$\forall r \in \mathbb{Q}_+ \ f(r) = ar + b$
Par continuité de f, on en déduit :
$\forall x \in \mathbb{R}_+ \ f(x) = ax + b$
Enfin si $x < 0$, on écrit $0 = \dfrac{1}{2}(x + (-x))$ donc $f(0) = \dfrac{1}{2}(f(x) + a(-x) + b)$.
On en déduit $f(x) = 2b - (a(-x) + b) = ax + b$
On a donc montré :
$\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } \forall x \in \mathbb{R} \ f(x) = ax + b$
ie f est affine.
La réciproque est triviale.

Exercice 2 *(Ens 2024)*

Existe-t-il deux matrices N et P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $N^2 = 0$, $P^2 = P$, NP est nilpotente et $(NP)^2 \neq 0$.

Correction
Supposons que N et P existent.
Soit $Q \in Gl_n(\mathbb{C})$, $N_1 = QNQ^{-1}$, $P_1 = QPQ^{-1}$.
$N_1^2 = QN^2Q^{-1} = 0$
$P_1^2 = QP^2Q^{-1} = QPQ^{-1} = P_1$
$(N_1P_1)^k = \left(QNPQ^{-1}\right)^k = Q(NP)^kQ^{-1}$ donc si $(NP)^k = 0$ alors $(N_1P_1)^k = 0$ et N_1P_1 est nilpotente.
$(N_1P_1)^2 = Q(NP)^2Q^{-1} \neq 0$ car $(NP)^2 \neq 0$ et Q et Q^{-1} sont inversibles.
Il existe donc un couple (N_1, P_1) où N_1 est n'importe quelle matrice semblable à N.
On arrive donc à la question : à quelle matrice N est-elle semblable ?
En dimension 2, si x est un vecteur tel que $Nx \neq 0$ (qui existe car $(NP)^2 \neq 0$ entraîne $N \neq 0$) alors (Nx, x) est une base (classique) et si Q est la matrice de passage à cette base $N = QN_1Q^{-1}$ avec $N_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
On cherche P_1 sous la forme $P_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
$N_1P_1 = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $(N_1P_1)^2 = \begin{pmatrix} c^2 & cd \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $(N_1P_1)^3 = \begin{pmatrix} c^3 & c^2d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
$(N_1P_1)^3 = 0$ donne $c = 0$ qui donne $(N_1P_1)^2 = 0$
On arrive à une contradiction, il n'y a pas de solution si $n = 2$, ce qu'on peut établir sans calcul :
Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est nilpotente alors $A^n = 0$ (classique).
Ici NP est nilpotente donc $(NP)^n = 0$. Mais $(NP)^2 \neq 0$ donc $n > 2$.

On suppose désormais $n \geq 3$.
$N^2 = 0$ donc $\operatorname{Im}(N) \subset \ker(M)$.
Si on note r le rang de M alors $r \leq n - r$ donc $r \leq \dfrac{n}{2}$.
Mais N est non nulle donc $r \geq 1$.
Si $n = 3$ alors $r = 1$ est la seule possibilité.
Si on note $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_r)$ une base de $\operatorname{Im}(N)$, on peut la compléter en $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_{n-r})$ base de $\operatorname{Ker}(N)$.
On note ensuite ϵ_{n-r+i} un antécédent de ϵ_i, $1 \leq i \leq r$.
On montre facilement que $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle la matrice de l'endomorphisme canoniquement associé à N est $\begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Je l'ai écrit comme une matrice par blocs par facilité mais cette matrice ne se prête au calcul par blocs que si n est pair et $r = \dfrac{n}{2}$ (cf la taille des blocs diagonaux).
Dans le cas $n = 3$, on a forcément $N_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

On prend $P_1 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$

$N_1P_1 = \begin{pmatrix} g & h & i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $(N_1P_1)^2 = \begin{pmatrix} g^2 & gh & gi \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $(N_1P_1)^3 = \begin{pmatrix} g^3 & g^2h & i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
N_1P_1 est nilpotente de taille 3 donc $(N_1P_1)^3 = 0$.
On en déduit $g = 0$ puis $(N_1P_1)^2 = 0$: absurde.
Il n'y a pas de solution dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
Dans le cas général, on peut s'attendre à ce qu'il n'y ait pas de solution avec N de rang 1.
On cherche donc une solution en dimension 4 avec $N_1 = \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $P_1 = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$.
$N_1P_1 = \begin{pmatrix} B & D \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $(N_1P_1)^2 = \begin{pmatrix} B^2 & BD \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $(N_1P_1)^3 = \begin{pmatrix} B^3 & B^2D \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
On prend $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ de sorte que $BD = B$ est non nulle.
On z donc $(N_1P_1)^2 \neq 0$ et N_1P_1 nilpotente.
Pour simplifier P_1^2, on prend $C = 0$.
$P_1^2 = \begin{pmatrix} A^2 & 0 \\ BA + DB & BD \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^2 & 0 \\ BA & D \end{pmatrix}$
En prenant $A = D$, on a $P_1^2 = P_1$.
En résumé, les matrices $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ conviennent.
En dimension $n \geq 5$ quelconque, on considère $\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 3 *(X 2024)*

Lorsque cela a un sens, on pose $f(z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^5\left(1 + \frac{i}{n^3} - z\right)}$

1. Montrer que f est développable en série entière.
2. Montrer que la restriction de f à l'ensemble des nombres complexes de module 1 n'est pas continue.

Correction
On peut commencer par prouver que f est définie sur $\mathbb{C} \setminus \left\{1 + \frac{i}{n^3}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$.
En effet si on fixe z dans cet ensemble alors $1 + \frac{i}{n^3} - z \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 - z$ donc :
si $z \neq 1$ alors $\left|\dfrac{1}{n^5\left(1 + \frac{i}{n^3} - z\right)}\right| \sim \dfrac{1}{|1-z|\, n^5}$ et la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^5\left(1 + \frac{i}{n^3} - z\right)}$ converge absolument donc converge.
Si $z = 1$ alors $f(z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{in^2}$ est bien défini.

1. Formellement :

$$\begin{aligned}
f(z) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^5\left(1+\dfrac{i}{n^3}\right)} \frac{1}{1-\dfrac{z}{1+\dfrac{i}{n^3}}} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n^5\left(1+\dfrac{i}{n^3}\right)} \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\frac{z}{1+\dfrac{i}{n^3}} \right)^p \right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{n^5\left(1+\dfrac{i}{n^3}\right)^{p+1}} z^p \\
&= \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^5\left(1+\dfrac{i}{n^3}\right)^{p+1}} \right) z^p
\end{aligned}$$

qu'il faut maintenant justifier.

- **Première méthode :** avec la théorie des familles sommables :
  Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$.
  $\forall n \in \mathbb{N}^* \ \ |z| < \left|1+\dfrac{i}{n^3}\right| = \sqrt{1+\dfrac{1}{n^6}}$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty} \left| \frac{1}{n^5\left(1+\dfrac{i}{n^3}\right)^{p+1}} z^p \right| &= \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{n^5\left|1+\dfrac{i}{n^3}\right|} \left(\frac{|z|}{\left|1+\dfrac{i}{n^3}\right|} \right)^p \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^5\left|1+\dfrac{i}{n^3}\right|} \frac{1}{1-\dfrac{|z|}{\left|1+\dfrac{i}{n^3}\right|}} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^5} \frac{1}{\left|1+\dfrac{i}{n^3}\right| - |z|}
\end{aligned}$$

  La suite $\left(\dfrac{1}{\left|1+\dfrac{i}{n^3}\right| - |z|} \right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge (vers $\dfrac{1}{1-|z|}$, on notera l'importance de supposer $|z| < 1$ et pas seulement $|z| \leq 1$) donc elle est bornée et :
  $\dfrac{1}{n^5} \dfrac{1}{\left|1+\dfrac{i}{n^3}\right| - |z|} = O\left(\dfrac{1}{n^5}\right)$ donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty} \left| \frac{1}{n^5\left(1+\dfrac{i}{n^3}\right)^{p+1}} z^p \right| < +\infty$, ce qui légitime le calcul initial.
- **Deuxième méthode :** avec les théorèmes du programme
  Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$.
  Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n \begin{cases} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C} \\ x \mapsto \dfrac{1}{n^5\left(1+\dfrac{i}{n^3}\right)^{\lfloor x \rfloor + 1}} z^{\lfloor x \rfloor} \end{cases}$

— Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.
— Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+$:

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}_+ \int_0^x |f_n(t)|\ \mathrm{d}t &\leq \int_0^{\lfloor x\rfloor+1} |f_n(t)|\ \mathrm{d}t = \sum_{p=0}^{\lfloor x\rfloor}\int_p^{p+1} |f_n(t)|\ \mathrm{d}t \\ &\leq \sum_{p=0}^{\lfloor x\rfloor} \frac{1}{n^5\left|1+\dfrac{i}{n^3}\right|}\left(\frac{|z|}{\left|1+\dfrac{i}{n^3}\right|}\right)^p \\ &\leq \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{n^5\left|1+\dfrac{i}{n^3}\right|}\left(\frac{|z|}{\left|1+\dfrac{i}{n^3}\right|}\right)^p \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

La fonction $|f_n|$ est positive et la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^x |f_n(t)|\ \mathrm{d}t$ est majorée donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f_n(t)|\ \mathrm{d}t$ converge.

— La série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$:
Soit $x \in \mathbb{R}_+$.
Soit $p = \lfloor x\rfloor$.
$\forall n \in \mathbb{N}^*\ f_n(x) = \dfrac{1}{n^5\left(1+\dfrac{i}{n^3}\right)^{p+1}} z^p$
$\forall n \in \mathbb{N}^*\ |f_n(x)| = \dfrac{|z|^p}{n^5\sqrt{1+\dfrac{1}{n^6}}^{\,p+1}} \leq \dfrac{1}{n^5}$
Donc la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ converge absolument donc converge.
$\dfrac{1}{n^5}$ étant indépendant de x, on a donc prouvé la convergence normale et :

— $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
— La série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\int_0^{+\infty} |f_n(t)|\ \mathrm{d}t$ converge.

$\forall n \in \mathbb{N}^*\ \displaystyle\int_0^{+\infty} |f_n(t)|\ \mathrm{d}t = \sum_{p=0}^{+\infty}\left|\frac{1}{n^5\left(1+\dfrac{i}{n^3}\right)^{p+1}} z^p\right| = \frac{1}{n^5}\frac{1}{\left|1+\dfrac{i}{n^3}\right| - |z|}$ comme ci-dessus

On montre comme ci-dessus que c'est le terme général d'une série convergente.

On en déduit que la fonction $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et que :

$$\int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n\right)\ \mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$$

ce qui donne :

$$\sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^p}{n^5\left(1+\dfrac{i}{n^3}\right)^{p+1}}=\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{z^p}{n^5\left(1+\dfrac{i}{n^3}\right)^{p+1}}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^5\left(1+\dfrac{i}{n^3}\right)}\frac{1}{1-\dfrac{z}{1+\dfrac{i}{n^3}}}$$

D'où :

$$f(z)=\sum_{p=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^5\left(1+\dfrac{i}{n^3}\right)^{p+1}}\right)z^p$$

Donc f est développable en série entière avec $R\geq 1$.

2. L'idée est de montrer que f n'est pas continue en 1 en exhibant une suite (z_N) de nombres complexes de modules 1 qui converge vers 1 mais telle que la suite $(f(z_N))$ ne converge pas vers $f(1)$.

   La suite définie par $z_N=1+\dfrac{i}{N^3}$ est tentante mais z_n n'est pas de module 1. Le nombre complexe de module 1 le plus proche de z_N est $\dfrac{z_N}{|z_N|}=\mathrm{e}^{i\theta_N}$ avec $\theta_N=\arctan\left(\dfrac{1}{N^3}\right)=\dfrac{1}{N^3}-\dfrac{1}{3N^9}+o\left(\dfrac{1}{N^9}\right)$

   (les calculs sont un peu plus simples en prenant $z_N=\mathrm{e}^{i\theta_N}$ avec $\theta_N=\dfrac{1}{n^3}$)

   Les calculs sont simplifiés si on remarque que pour $z=\mathrm{e}^{i\theta}$:

$$\begin{aligned}
\Re e\left(\frac{1}{n^5\left(1+\dfrac{i}{n^3}-z\right)}\right) &= \Re e\left(\frac{1}{n^5\left(1-\cos(\theta)+i\left(\dfrac{1}{n^3}-\sin(\theta)\right)\right)}\right)\\
&= \Re e\left(\frac{1}{n^5}\frac{\left(1-\cos(\theta)-i\left(\dfrac{1}{n^3}-\sin(\theta)\right)\right)}{(1-\cos(\theta))^2+\left(\dfrac{1}{n^3}-\sin(\theta)\right)^2}\right)\\
&= \frac{1}{n^5}\frac{1-\cos(\theta)}{(1-\cos(\theta))^2+\left(\dfrac{1}{n^3}-\sin(\theta)\right)^2}\\
&\geq 0
\end{aligned}$$

   On en déduit :

$$\begin{aligned}
\Re e(f(z_N)) &\geq \frac{1}{N^5}\frac{1-\cos(\theta_N)}{(1-\cos(\theta_N))^2+\left(\dfrac{1}{N^3}-\sin(\theta_N)\right)^2}\\
&= \frac{1}{N^5}\frac{\dfrac{1}{2N^6}+o\left(\dfrac{1}{N^6}\right)}{\left(\dfrac{1}{2N^6}+o\left(\dfrac{1}{N^6}\right)\right)^2+\left(\dfrac{-1}{2N^9}+o\left(\dfrac{1}{N^9}\right)\right)^2}\sim 2N
\end{aligned}$$

   La suite $(\Re e(f(z_N)))$ diverge donc la suite $(f(z_N))$ diverge.

Exercice 4 *(Ens 2024)*

Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes qui suivent la loi de Poisson de paramètre 1.

Pour $z \in [0;1[$, on pose $f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} X_k z^k$

Montrer que $\lim_{z\to 1^-} P\left(|(1-z)f(z) - 1| > \epsilon\right) = 0$

Correction

$\sum_{k=0}^{+\infty} X_k z^k$ est une somme de nombres positifs, elle doit donc se comprendre comme étant égale à $+\infty$ lorsqu'elle diverge (on peut montrer qu'elle est presque sûrement finie mais c'est un autre exercice).

Soit $\epsilon > 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
E\left((1-z)\sum_{k=0}^{n} X_k z^k\right) &= (1-z)\sum_{k=0}^{n} z^k E(X_k) = (1-z)\sum_{k=0}^{n} z^k = 1 - z^{n+1} \\
V\left((1-z)\sum_{k=0}^{n} X_k z^k\right) &= (1-z)^2\sum_{k=0}^{n} z^{2k} V(X_k) = (1-z)^2\sum_{k=0}^{n} z^{2k} = (1-z)\frac{1-z^{2n+1}}{1+z}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P\left((1-z)\sum_{k=0}^{n} X_k z^k > 1+\epsilon\right) &= P\left((1-z)\sum_{k=0}^{n} X_k z^k - \left(1-z^{n+1}\right) > 1+\epsilon - \left(1-z^{n+1}\right)\right) \\
&= P\left((1-z)\sum_{k=0}^{n} X_k z^k - E\left((1-z)\sum_{k=0}^{n} X_k z^k\right) > \epsilon + z^{n+1}\right) \\
&\leq P\left(\left|(1-z)\sum_{k=0}^{n} X_k z^k - E\left((1-z)\sum_{k=0}^{n} X_k z^k\right)\right| > \epsilon + z^{n+1}\right) \\
&\leq (1-z)\frac{1-z^{2n+1}}{(1+z)(\epsilon+z^{n+1})^2}
\end{aligned}$$

La suite $\left((1-z)\sum_{k=0}^{n} X_k z^k\right) = \left(\sum_{k=0}^{n} X_k\left(z^k - z^{k+1}\right)\right)$ est croissante (sommes de termes positifs).

Donc la suite $\left((1-z)\sum_{k=0}^{n} X_k z^k > 1+\epsilon\right)$ est croissante donc par continuité croissante :

$$\begin{aligned}
P\left((1-z)\sum_{k=0}^{+\infty} X_k z^k > 1+\epsilon\right) &= P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty}\left((1-z)\sum_{k=0}^{n} X_k z^k > 1+\epsilon\right)\right) \\
&= \lim_{n\to+\infty} P\left((1-z)\sum_{k=0}^{n} X_k z^k > 1+\epsilon\right) \\
&\leq \lim_{n\to+\infty}(1-z)\frac{1-z^{2n+1}}{(1+z)(\epsilon+z^{n+1})^2} \\
&\leq \frac{1-z}{(1+z)\epsilon^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P\left((1-z)\sum_{k=0}^{n} X_k z^k < 1-\epsilon\right) &= P\left((1-z)\sum_{k=0}^{n} X_k z^k - \left(1-z^{n+1}\right) < 1-\epsilon-\left(1-z^{n+1}\right)\right)\\
&= P\left((1-z)\sum_{k=0}^{n} X_k z^k - E\left((1-z)\sum_{k=0}^{n} X_k z^k\right) < -\epsilon+z^{n+1}\right)\\
&\leq P\left(\left|(1-z)\sum_{k=0}^{n} X_k z^k - E\left((1-z)\sum_{k=0}^{n} X_k z^k\right)\right| > \epsilon-z^{n+1}\right) \text{ si } z^{n+1}<\epsilon\\
&\leq (1-z)\frac{1-z^{2n+1}}{(1+z)(\epsilon-z^{n+1})^2} \text{ à partir d'un certain rang car } z^{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0
\end{aligned}$$

Par continuité décroissante :

$$\begin{aligned}
P\left((1-z)\sum_{k=0}^{+\infty} X_k z^k < 1-\epsilon\right) &= P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty}\left((1-z)\sum_{k=0}^{n} X_k z^k < 1-\epsilon\right)\right)\\
&= \lim_{n\to+\infty} P\left((1-z)\sum_{k=0}^{n} X_k z^k < 1-\epsilon\right)\\
&\leq \lim_{n\to+\infty}(1-z)\frac{1-z^{2n+1}}{(1+z)(\epsilon-z^{n+1})^2}\\
&\leq \frac{1-z}{(1+z)\epsilon^2}
\end{aligned}$$

Donc :
$P\left(|(1-z)f(z)-1|>\epsilon\right) \leq \dfrac{2(1-z)}{(1+z)\epsilon^2}$
et on conclut facilement.

Exercice 5 *(Ens 2024)*

Déterminer les fonctions f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-1,1]$ telles que :
$\forall (x,y)\in[-1,1]^2,\ f(x)-f(y)\geq f(x)^2(x-y)$.

Correction
$\forall (x,y)\in[-1;1]$ tq $x<y$, $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}\leq f(x)^2$
On fixe x et on fait tendre y vers x. On obtient :
$\forall x\in[-1;1[\ f'(x)\leq f(x)^2$
$\forall (x,y)\in[-1;1]$ tq $x>y$, $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}\geq f(x)^2$
On fixe x et on fait tendre y vers x. On obtient :
$\forall x\in]-1;1]\ f'(x)\geq f(x)^2$
On en déduit :
$\forall x\in]-1;1[\ f'(x)=f(x)^2$
puis par continuité :
$\forall x\in[-1;1]\ f'(x)=f(x)^2$
En physique cette équation se résout en séparant les variables, c'est plus technique en mathématiques.
On commence par observer que la fonction nulle est solution.

Si f n'est pas la fonction nulle, donc par continuité il existe $x_0 \in]-1;1[$ tel que $f(x_0) \neq 0$.
Par continuité, il existe $\delta > 0$ tel que f ne s'annule pas sur $[x_0-\delta; x_0+\delta]$.
On définit alors $b = \inf\{x \in [x_0;1] \text{ tq } f(x)=0\}$ si cet ensemble est non vide, 1 sinon.
De même, on définit $a = \sup\{x \in [-1;x_0] \text{ tq } f(x)=0\}$ si cet ensemble est non vide, -1 sinon.
On a $-1 \leq a \leq x_0-\delta < x_0 < x_0+\delta \leq b \leq -1$
$\forall x \in]a;b[\ \dfrac{f'(x)}{f(x)^2} = 1$
Donc :
$\exists C \in \mathbb{R}$ tq $\forall x \in]a;b[\ -\dfrac{1}{f(x)} = x+C$
Donc :
$\forall x \in]a;b[\ f(x) = -\dfrac{1}{x+C}$ (avec $x+C$ nécessairement non nul)
Si $\{x \in [x_0;1] \text{ tq } f(x)=0\}$ est non vide alors $f(b)=0$ et $f(b) = -\dfrac{1}{b+C}$.
C'est absurde. Idem à gauche de x_0.
Donc :
$\forall x \in [-1;1]\ f(x) = -\dfrac{1}{x+C}$ avec $C \in \mathbb{R}\setminus[-1;1]$.

Réciproquement, la fonction nulle satisfait les conditions de l'énoncé.
Pour le cas général soit $C \in \mathbb{R}\setminus[-1;1]$ et $f \begin{cases} [-1;1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto -\dfrac{1}{x+C} \end{cases}$

$$\forall (x,y) \in [-1;1]^2\ f(x)-f(y) \quad = \quad -\frac{1}{x+C} + \frac{1}{y+C} = \frac{x-y}{(x+C)(y+C)}$$

On va devoir distinguer plusieurs cas.

- **Premier cas :** $C > 1$.
  Si $x > y$ alors $0 < y+C < x+C$ donc $0 < \dfrac{1}{x+C} < \dfrac{1}{y+C}$
  Donc $\dfrac{1}{(x+C)(y+C)} > \dfrac{1}{(x+C)^2} = f(x)^2$
  $x-y>0$ donc $f(x)-f(y) = \dfrac{x-y}{(x+C)(y+C)} \geq f(x)^2(x-y)$
  Si $x < y$ alors $0 < x+C < y+C$ donc $0 < \dfrac{1}{y+C} < \dfrac{1}{x+C}$
  Donc $\dfrac{1}{(x+C)(y+C)} < \dfrac{1}{(x+C)^2} = f(x)^2$
  $x-y<0$ donc $f(x)-f(y) = \dfrac{x-y}{(x+C)(y+C)} \geq f(x)^2(x-y)$
  f est solution du problème.

- **Deuxième cas :** $C < -1$.
  Si $x > y$ alors $y+C < x+C < 0$ donc $\dfrac{1}{x+C} < \dfrac{1}{y+C} < 0$
  Donc $\dfrac{1}{(x+C)(y+C)} < \dfrac{1}{(x+C)^2} = f(x)^2$
  $x-y>0$ donc $f(x)-f(y) = \dfrac{x-y}{(x+C)(y+C)} < f(x)^2(x-y)$
  f n'est pas solution du problème.

Finalement les solutions sont les fonctions $\begin{cases} [-1,1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{-1}{x+C} \end{cases}$ avec $C > 0$ et la fonction nulle.

Exercice 6 *(X 2024)*

Soit $f : [0; 2\pi] \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(0) = f(2\pi)$.
De plus, on suppose qu'il existe un entier n tel que pour tout k compris entre 0 et n,
$\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\cos(kt)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} f(t)\sin(kt)\,\mathrm{d}t = 0.$
Quel est le nombre minimum de points d'annulation de f ?

Correction
On va montrer par récurrence sur n que f s'annule au moins $2n+2$ fois.
Les fonctions s'annulant une infinité de fois présentent ici peu d'intérêt donc on va se restreindre à $F = \{f \in \mathcal{C}([0; 2\pi], \mathbb{R}) \text{ tq } \mathrm{Card}\,\{x \in [0; 2\pi] \text{ tq } f(x) = 0\} < +\infty\}$.
Les zéros de f, différents de 0 et de 2π sont isolés :
Si $f(x) = 0$ avec $x \in]0; 2\pi[$ alors il existe $\delta > 0$ tel que pour tout y appartenant à $[x-\delta; x+\delta] \setminus \{x\}$, $f(y) \neq 0$.
Il résulte alors du théorème des valeurs intermédiaires que f est de signe constant sur $[x-\delta; x[$ et sur $]x; x+\delta]$. On dira que f change de signe en x si les signes de f de part et d'autre de x sont différents.
En 0, le signe de f à gauche sera celui de f à gauche en 2π, f pouvant être vue comme la restriction à $[0; 2\pi]$ d'une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique à cause de l'hypothèse $f(0) = f(2\pi)$.
Finalement l'hypothèse de récurrence sera $\mathcal{P}(n)$: toute fonction $f \in F$ telle que pour tout k compris entre 0 et n, $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\cos(kt)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} f(t)\sin(kt)\,\mathrm{d}t = 0$ s'annule en changeant de signe au moins $2n+2$ fois.

On commence par montrer que $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Soit $f \in F$ telle que $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.
f doit changer de signe au moins une fois sur $]0; 2\pi[$: sinon f est une fonction différente de la fonction nulle (elle ne s'annule qu'un nombre fini de fois) continue de signe constant et d'intégrale nulle. Notons t_0 un point où f s'annule en changeant de signe et supposons que t_0 est unique sur $]0; 2\pi[$.
0 est à gauche de t_0 et 2π à droite donc $f(0)f(2\pi) \leq 0$.
Mais $f(2\pi) = f(0)$ donc $f(0)^2 \leq 0$.
On en déduit $f(0) = f(2\pi) = 0$.
De plus le signe de f à droite de 0 est celui de f à gauche de t_0 et celui de f à gauche de 0 est celui de f à droite de t_0 : f change de signe en 0.
$\mathcal{P}(0)$ est donc vraie.
Remarquons que 2 est non seulement un minorant mais aussi un minimum : la fonction cos appartient à F et son intégrale sur $[0; 2\pi]$ est nulle. cos ne s'annule que deux fois sur $[0; 2\pi]$ en $\dfrac{\pi}{2}$ et en $3\dfrac{\pi}{2}$.

On suppose $\mathcal{P}(n-1)$ vraie ($n \in \mathbb{N}^*$).
Soit $f \in F$ telle que k compris entre 0 et n, $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\cos(kt)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} f(t)\sin(kt)\,\mathrm{d}t = 0.$
D'après l'hypothèse de récurrence, f s'annule en changeant de signe au moins $2n$ fois.

Supposons que f s'annule en changeant de signe exactement $2n$ fois en $t_1, \dots, t_{2n}$ avec $0 \leq t_1 < \dots < t_{2n} \leq 2\pi$.
On cherche trois nombres non tous nuls a, b et c tels que
$a + b\cos(t_1) + c\sin(t_1) = a + b\cos(t_2) + c\sin(t_2) = 0$.
Cela équivaut à $\begin{pmatrix} \cos(t_1) & \sin(t_1) \\ \cos(t_2) & \sin(t_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ -a \end{pmatrix}$
Le déterminant de la matrice est $\sin(t_2 - t_1)$ qui est non nul sauf si $t_2 - t_1 = \pi$ mais dans ce cas $\sin(t - t_1) = 0 - \sin(t_1)\cos(t) + \cos(t_1)\sin(t)$ s'annule en $t = t_1$ et en $t = t_2$ et $(a, b, c) = (0, -\sin(t_1), \cos(t_1))$ convient.
On pourra remarquer que si $n \geq 2$, alors l'écart minimal entre 2 t_i consécutifs est strictement inférieur à π et on peut prendre ce t_i plutôt que t_1.
En t_1 et en t_2 la fonction $t \mapsto a + b\cos(t) + c\sin(t)$ change de signe : sinon sa dérivée serait nulle et on aurait en t_1 par exemple : $-b\sin(t_1) + c\cos(t_1) = 0$
D'où $\begin{pmatrix} \cos(t_1) & \sin(t_1) \\ -\sin(t_1) & \cos(t_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ 0 \end{pmatrix}$.
On en déduit $\begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t_1) & -\sin(t_1) \\ \sin(t_1) & \cos(t_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a\cos(t_1) \\ -a\sin(t_1) \end{pmatrix}$.
On a alors :
$0 = a + b\cos(t_2) + c\sin(t_2) = a(1 - \cos(t_2 - t_1))$
$0 \leq t_1 < t_2 \leq 2\pi$ et on ne peut pas avoir $t_1 = 0$ et $t_2 = 2\pi$ sinon f serait de signe constant.
Donc $\cos(t_2 - t_1) \neq 1$ et $a = 0$, puis $b = c = 0$.
La fonction $t \mapsto f(t)(a + b\cos(t) + c\sin(t))$ ne change donc pas de signe en t_1 et en t_2.
On a : $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)(a + b\cos(t) + c\sin(t))\,\mathrm{d}t = 0$ par linéarité de l'intégrale.

$$\begin{aligned} \forall k \in [\![1; n-1]\!] \quad \cos(t)\cos(kt) &= \frac{1}{2}(\cos((k-1)t + \cos((k+1)t)) \\ \sin(t)\sin(kt) &= \frac{1}{2}(\cos((k-1)t - \cos((k+1)t)) \\ \sin(t)\cos(kt) &= \frac{1}{2}(\sin((k+1)t - \sin((k-1)t)) \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \forall k \in [\![0; n-1]\!] \qquad & \int_0^{2\pi} f(t)(a + b\cos(t) + c\sin(t))\cos(kt)\,\mathrm{d}t \\ = \; & \int_0^{2\pi} f(t)(a + b\cos(t) + c\sin(t))\sin(kt)\,\mathrm{d}t \\ = \; & 0 \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse de récurrence, la fonction $t \mapsto f(t)(a + b\cos(t) + c\sin(t))$ s'annule en changeant de signe au moins $2n$ fois.
Dans le cas général ie $t_2 - t_1 \neq \pi$, $a \neq 0$ et $a + b\cos(t) + c\sin(t) = a + A\sin(t - \tau)$ ne s'annule qu'en t_1 et t_2 donc les points où $f(t)(a + b\cos(t) + c\sin(t))$ s'annule en changeant de signe sont les points $t_3, \dots, t_{2n}$.
On en déduit $2n - 2 \geq 2n$: c'est absurde.
Reste le cas où $t_2 - t_1 = \pi$.
D'après l'hypothèse de récurrence, la fonction $t \mapsto f(t)\sin(t - t_1)$ s'annule en changeant de signe au moins $2n$ fois.

Si $t_1 \neq 0$ alors $\sin(t-t_1)$ ne s'annule qu'en t_1 et en $t_1+\pi=t_2$. En ces points $f(t)\sin(t-t_1)$ ne change pas de signe.
Donc les points où $f(t)\sin(t-t_1)$ s'annule en changeant de signe sont les points $t_3,\dots,t_{2n}$.
On en déduit $2n-2 \geq 2n$: c'est absurde.
Reste le cas où $t_1=0$ et $t_2=\pi$.
Dans ce cas, la fonction $t \mapsto f(t)\sin(t)$ s'annule en changeant de signe au moins $2n$ fois.
$\sin(t)$ s'annule en 0, en π et en 2π. $f(t)\sin(t)$ ne change pas de signe en 0 et en π. Elle ne change pas non plus de signe en 2π par périodicité, ce qui permet de conclure comme dans les cas précédents.

Reste à exhiber une fonction qui vérifie ces hypothèses et qui s'annule $2n+2$ fois.
La fonction $t \mapsto \cos((n+1)x)$ convient.
En effet les points où elle s'annule sont les nombres $\dfrac{1}{(n+1)}\left(\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right)$ avec $0 \leq k \leq 2n+1$.

Exercice 7 *(X 2024)*

Soit f de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$ croissante et continue.
Montrer :
$\forall \epsilon>0\ \exists \eta>0$ tq $\forall (x,y)\in[0;1]^2\ \ |x-y|<\eta \Longrightarrow |f(x)-f(y)|<\epsilon$

Correction
f continue sur $[0;1]$ signifie f continue en tout point de $[0;1]$ ce qui peut s'écrire :
$\forall y\in[0;1]\ \forall\epsilon>0\ \exists\eta>0$ tq $\forall x\in[0;1]\ \ |x-y|<\eta \Longrightarrow |f(x)-f(y)|<\epsilon$
Cela ressemble beaucoup à l'énoncé mais c'est différent : ici η dépend de y et de ϵ alors que dans l'énoncé, η ne dépend que de ϵ.
On raisonne par l'absurde. On suppose :
$\exists\epsilon>0$ tq $\forall\eta>0\ \exists(x,y)\in[0;1]^2$ tq $|x-y|<\eta$ et $|f(x)-f(y)|\geq\epsilon$
f est continue en 1 donc :
$\exists\delta\in]0;1[$ tq $\forall x\in[1-\delta;1]\ f(1)-\epsilon<f(x)\leq f(1)$
Soit $n_0\in\mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{1}{n_0}<\delta$
Pour tout $n\geq n_0$, soit $E_n=\left\{x\in[0;1-\delta]\ \text{ tq } f\left(x+\dfrac{1}{n}\right)-f(x)\geq\epsilon\right\}$.
D'après l'hypothèse, il existe $(x,y)\in[0;1]^2$ tel que $|x-y|<\dfrac{1}{n}$ et $|f(x)-f(y)|\geq\epsilon$
Quitte à échanger x et y, on peut supposer $x\leq y$.
$|f(x)-f(y)|\geq\epsilon$ donc $x<1-\delta$
On a alors $x\leq y<x+\dfrac{1}{n}<1-\delta+\delta=1$ et $f(y)-f(x)\geq\epsilon$ car f est croissante.
Donc $f\left(x+\dfrac{1}{n}\right)\geq f(y)\geq f(x)+\epsilon$ et $x\in E_n$.
E_n est non vide et majoré par 1 donc possède une borne supérieure x_n.
Il existe une suite (y_p) d'éléments de E_n qui converge vers x_n.
$\forall p\in\mathbb{N}^*\ f\left(y_p+\dfrac{1}{n}\right)-f(y_p)\geq\epsilon$
En faisant tendre p vers $+\infty$, on obtient $f\left(x_n+\dfrac{1}{n}\right)-f(x_n)\geq\epsilon$ (f est continue)
Si $x\in E_{n+1}$ alors $f\left(x+\dfrac{1}{n}\right)-f(x)\geq f\left(x+\dfrac{1}{n+1}\right)-f(x)\geq\epsilon$ et $x\in E_n$.
Donc $E_{n+1}\subset E_n$ et x_n est un majorant de E_{n+1}. Par conséquent, $x_{n+1}\leq x_n$.

La suite (x_n) est décroissante et minorée donc elle converge vers $l \in [0;1]$.
$\forall n \geq n_0\ f\left(x_n + \dfrac{1}{n}\right) - f(x_n) \geq \epsilon$
En faisant tendre n vers $+\infty$, on en déduit $f(l) - f(l) \geq \epsilon > 0$: absurde

Exercice 8 *(Ens 2025)*

1. Trouver l'ensemble des fonctions $f : [0;1] \to \mathbb{R}_+^*$ intégrables (continues) telles que :

$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1}{f(t)}\,\mathrm{d}t = 1$$

2. Que dire si on remplace $[0;1]$ par $[0;A]$ avec $A > 1$? $A < 1$? (En gardant les intégrales égales à 1 ; on ne demande plus de fournir toutes les solutions).

Correction

1. Si f est continue sur $[0;1]$ elle y est intégrable.
Dans le cadre du programme, on pourrait prendre f continue par morceaux.
On pourrait aussi prendre $]0;1[$ à la place de $[0;1]$ et on aurait besoin de l'hypothèse "f intégrable".
Pour les examinateurs, une fonction peut être intégrable sur $[0;1]$ sans y être continue ou continue par morceaux.

$$\begin{cases} \mathcal{C}^0([0;1]) \to \mathbb{R} \\ (f,g) \mapsto \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \end{cases} \quad \text{est un produit scalaire (vérifications faciles)}$$

Donc par Cauchy-Schwarz, si f est une fonction vérifiant les conditions de l'énoncé :

$$1 = \left| \int_0^1 \sqrt{f(t)} \frac{1}{\sqrt{f(t)}}\,\mathrm{d}t \right| \leq \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \times \int_0^1 \frac{1}{f(t)}\,\mathrm{d}t = 1$$

Il y a donc égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
On en déduit :
$\exists a \in \mathbb{R}$ tq $\forall t \in [0;1]\ \sqrt{f(t)} = \dfrac{a}{\sqrt{f(t)}}$
Donc :
$\forall t \in [0;1]\ f(t) = a$
Mais alors $a = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 1$ donc :
$\forall t \in [0;1]\ f(t) = 1$
La réciproque est triviale.

2. Cette fois on a par Cauchy-Schwarz, si f est une fonction vérifiant les conditions de l'énoncé :

$$A = \left| \int_0^A \sqrt{f(t)} \frac{1}{\sqrt{f(t)}}\,\mathrm{d}t \right| \leq \int_0^A f(t)\,\mathrm{d}t \times \int_0^A \frac{1}{f(t)}\,\mathrm{d}t = 1$$

Donc il n'y a aucune solution si $A > 1$.
Si $A < 1$, il pourrait y en avoir et l'énoncé semble demander de prouver qu'il y en a sans toutefois demander toutes les solutions.
Les fonctions constantes ne conviennent pas : $\displaystyle\int_0^A f(t)\,\mathrm{d}t = 1$ donne $f(t) = \dfrac{1}{A}$

Mais alors :
$\displaystyle\int_0^A \frac{\mathrm{d}t}{f(t)} = \int_0^A A\,\mathrm{d}t = A^2 \neq 1$
On cherche f affine :
$\forall t \in [0;A]\ f(t) = at + b > 0$
$\displaystyle\int_0^A f(t)\,\mathrm{d}t = a\frac{A^2}{2} + bA$
On prend donc $b = \dfrac{1 - \dfrac{aA^2}{2}}{A}$.

$$\begin{aligned}
\int_0^A \frac{\mathrm{d}t}{f(t)} &= \left[\frac{1}{a}\ln(at+b)\right]_0^A = \frac{1}{a}\left(\ln(aA+b) - \ln(b)\right) \\
&= \frac{1}{a}\ln\left(1 + \frac{aA}{b}\right) = \frac{1}{a}\ln\left(1 + \frac{aA^2}{1 - \dfrac{aA^2}{2}}\right) \\
&= \frac{1}{a}\ln\left(\frac{1 + \dfrac{aA^2}{2}}{1 - \dfrac{aA^2}{2}}\right)
\end{aligned}$$

$\displaystyle\frac{1}{a}\ln\left(\frac{1 + \dfrac{aA^2}{2}}{1 - \dfrac{aA^2}{2}}\right) \xrightarrow[\substack{a\to 0\\ a>0}]{} A^2 < 1$
$\displaystyle\frac{1}{a}\ln\left(\frac{1 + \dfrac{aA^2}{2}}{1 - \dfrac{aA^2}{2}}\right) \xrightarrow[\substack{a\to \frac{2}{A^2}\\ a<\frac{2}{A^2}}]{} +\infty$
Donc avec la continuité et le théorème des valeurs intermédiaires :
$\exists a \in \left]0;\dfrac{2}{A^2}\right[$ tq $\displaystyle\frac{1}{a}\ln\left(\frac{1 + \dfrac{aA^2}{2}}{1 - \dfrac{aA^2}{2}}\right) = 1$
On a alors $b = \dfrac{1 - \dfrac{aA^2}{2}}{A} > 0$ de sorte que $f(t) > 0$ pour tout $t \in [0;A]$.